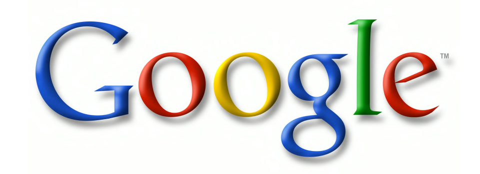






INTEGRATION

DER

LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

MIT

CONSTANTEN UND VERÄNDERLICHEN COEFFICIENTEN.

VON

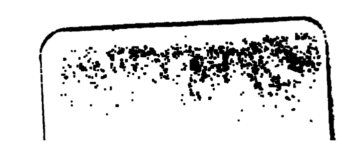
JOSEF PETZVAL.



Auf Kosten der kais. Akademie der Wissenschaften.

ZWEITER BAND.

WIEN, 1859.
IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
Buchhändler der kais. Akademie der Wissenschaften.





INTEGRATION

DER

LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

MIT

CONSTANTEN UND VERÄNDERLICHEN COEFFICIENTEN.

VON

JOSEF PETZVAL.



Auf Kosten der kais. Akademie der Wissenschaften.

ZWEITER BAND.

WIEN, 1859.
IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
Buchhändler der kais. Akademie der Wissenschaften.

Vorrede.

Gegen das Ende 1850, mithin vor beiläufig acht Jahren, habe ich der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien ein Werk überreicht über die Integration linearer Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten, enthaltend die Frucht von mehr als zwei Decennien fortgesetzter Studien über diesen ebenso interessanten, wie schwierigen Gegenstand. Den damals vorhandenen Materialien gemäss wurde dasselbe auf einen Band von beiläufig sechzig Druckbogen veranschlagt und war in sechs Abschnitte getheilt, die zu zweien in drei aufeinanderfolgenden Lieferungen erscheinen sollten. Der Druck ging etwas langsamer vor sich theils darum, weil der Satz sowohl, wie auch die Correctur eines solchen viele längere Formeln mit mathematischen Symbolen, Buchstabengrössen, Strichen, Stellenzeigern u. s. w. enthaltenden Werkes, wenn man den Anforderungen der Zweckmässigkeit, Schönheit, Druckfehlerfreiheit zugleich Genüge leisten will, an und für sich ein langsamer ist, theils weil ich zu dieser Zeit über die stabile Unterstützung noch nicht verfügte, die mir seitdem zu Theil geworden ist. Eben diese Verzögerung jedoch ermöglichte ein tieferes Eingehen in die einzelnen Bestandlehren dieses Wissenszweiges, der dadurch eine völlige Umarbeitung erlitt. Hie und da schien es räthlich, eine und dieselbe wichtigere Theorie von mehreren verschiedenen Gesichtspunkten aus zu beleuchten. Bei anderen Gelegenheiten wurde von einer analytischen Thatsache, deren Stattfinden nur in einzelnen Beispielen nachzuweisen in der ursprünglichen Absicht lag, ein allgemeiner Beweis aufgefunden. Mehrere Paragraphe wurden

interpolirt zum Zwecke der leichteren Uebersicht, um nämlich dem Leser so zu sagen von einem erhöhten Standpunkte aus die Gesammtheit der zur Erkenntniss der Form und Sonderung der particulären Integrale von einander allmälich entwickelten Vorschriften überschauen zu lassen, zum Theile aber auch in der Absicht, ihn mit dem Geiste, in welchem dieses Werk geschrieben ist, inniger zu befreunden. Mitunter gelang es sogar, diese Wissenschaft mit einigen neuen seitdem aufgefundenen Methoden zu bereichern. Eine solche ist z. B. die Auffindung der algebraischen Gleichung, deren irrationale Wurzeln im allgemeinen Integrale einer linearen Differentialgleichung erscheinen, imgleichen die Integration solcher linearer Differentialgleichungen, die in ihren Coefficienten die Transcendente 0^{0^x} beherbergen, nebst der daran sich knüpfenden allgemeinen Behandlung des Reflexionsproblemes der Wellen u. s. w. Durch diese Zusätze hat sich aber der Umfang des Werkes verdoppelt und ich sah mich genöthigt, mit den ersten zwei Lieferungen, die die drei ersten Abschnitte des Werkes enthielten, einen ersten Band abzuschliessen und die folgenden drei Abschnitte einem ferneren zweiten Bande zuzuweisen. Dieser erste Band erschien im Jahre 1853; den zweiten lege ich gegenwärtig der mathematischen Lesewelt vor.

In den höheren Gebieten der Kunst sowohl, wie auch der Wissenschaft bricht sich das Neue nur langsam und nach harten Kämpfen Bahn, darum wird auch schon in der Vorrede zum ersten Bande des hier besprochenen Werkes die Bemerkung gemacht, dass ausgedehntere, einen einzigen Gegenstand im Zusammenhange verfolgende mathematische Werke, die jedesmal schwer zu studiren sind, besonders wenn sie ihren Zweck auf etwas ungewohnte Weise erreichen, neue Definitionen, Eintheilungen, Methoden u. s. w. zu Grunde legen und damit eine veränderte Form der mathematisch-wissenschaftlichen Forschung begründen oder einleiten, sich nur schwer bei den Zeitgenossen Eingang verschaffen und selbst bei dem höchsten Interesse ihres Gegenstandes oft mehrere Decennien auf die ihnen gebührende Beachtung harren müssen. Belege hiefür bietet die Geschichte der Wissenschaft in Fülle. Ein auffallendes Beispiel liefert eines der grössten Werke aller Zeiten, ich meine Newton's Principia nova. Unmittelbar nach seinem Erscheinen wurde die Priorität in Abrede gestellt von Leuten, die höchst wahrscheinlich das Buch gar nicht gelesen hatten und mindestens seinen vollen Inhalt nicht kannten. Anerkennung ward ihm gar keine zu Theil, an Tadel hingegen war kein

Mangel. Selbst später, als des Verfassers wissenschaftliche Verdienste durch die einträgliche Stelle eines Münzwardeins belohnt wurden, wo er sich also in einen angesehenen Mann verwandelte, war es in England Sitte, das Werk zu loben und auch darauf stolz zu sein, aber nicht zu lesen. Erst dreissig Jahre nach dem Tode Newton's schenkten ihm nicht die Engländer, sondern die Franzosen die gebührende Aufmerksamkeit, daher es vermuthlich auch kam, dass die erhabenste aller Wissenschaften, die für den Menschen das allerhöchste Interesse hat, die Mechanik des Himmels, ihre Geburtsstätte verlassend, in den Besitz einer anderen Nation, der französischen, überging. Geschah nun diess mit dem Buche aller Bücher, so muss es wohl noch mehr der Fall sein mit der Integration der linearen Differentialgleichungen, die das hohe menschliche Interesse bei weitem nicht haben kann, und brauchte das einbändige Werk vierzig Jahre zu seiner Aufnahme, so ist diess um so mehr von dem zweibändigen zu erwarten, das ich gegenwärtig vorlege. Dem Wissenschaftsforscher kommt es aber nicht zu, sich über die laue Anerkennung, die seinen Bestrebungen zu Theil wird, die ungerechten und oft böswilligen Angriffe, deren Ziel er ist, zu beklagen, denn eben weil die Erscheinung eine allgemeine ist, so ist sie auch tief in der Natur der Sache und des Menschen begründet und steht da als unmittelbare Folge der dem Zeitalter eigenthümlichen Geistesrichtung. Es ziemt ihm vielmehr, über die Ursachen des specifisch langsamen Fortschrittes der Wissenschaft, die beinahe ein ebenso würdiger Gegenstand akademischer Forschungen sind, als die Wissenschaft selbst, nachzudenken, durch die geeigneten Mittel abzuhelfen, wo diess möglich ist, und alles was sich nicht ändern lässt, alle ungerechten Urtheile, falschen Anschuldigungen, böswilligen Angriffe mit stoischem Gleichmuthe hinzunehmen, ja sogar zum Nutzen und Frommen der Wissenschaft so gut als möglich zu benützen. Ich war bisher immer bestrebt, diess zu thun, und wenn auch die unangenehmen Erfahrungen, die ich auf diesem Kampfplatze gesammelt habe, sich mit den Erlebnissen eines Galiläi, Copernicus u. s. w. nicht messen können, so begreifen sie mindestens alles in sich, was in aufgeklärten Zeiten der stillen Thätigkeit des Wissenschaftsforschers an Hindernissen in den Weg gelegt und als Verunglimpfung auf sein schuldloses Haupt gehäuft zu werden vermag. Gewiss ist kein Gelehrter, so wie ich, geeignet, über die Schattenseite der Wissenschaftsforschung ein Werkchen zur allgemeinen Belehrung zu schreiben, was ich in der Folge auch zu thun gedenke.

Neue Wissenschaft muss dem menschlichen Geschlechte beiläufig wie Arznei beigebracht werden in winzig kleinen Dosen, wenn sie willige Aufnahme und gebührende Anerkennung finden will, denn ihr Studium ist ein schwieriges und zwar nicht nur für die jüngere Generation, sondern mehr noch für den älteren Gelehrten mit dem hochgefeierten Namen, der mit der Entwicklung seiner eigenen Ideen beschäftigt, das verdiente Vorrecht, von den Bemühungen des Anderen keine Notiz zu nehmen, also gar nichts mehr lesen zu dürfen, beansprucht. Lässt sich daher ein grosses Lehrgebäude, wie die Theorie der linearen Differentialgleichungen, nicht füglich in kleine Parzellen zerlegen, fügt sich vielmehr Methode an Methode, Untersuchung an Untersuchung mit Nothwendigkeit wie in einem grossen Baue Stein auf Stein, so darf sich der Verfasser nicht wundern, wenn sein Werk lange Zeit hindurch den Zeitgenossen völlig unbekannt bleibt. Sein eigentliches Publikum sind dann anfänglich wenigstens nur seine Schüler und als Lehrmittel gilt nicht nur das Buch, sondern mehr noch das lebendige Wort. Das beste Mittel, der neuen und schweren Wissenschaft willigere Aufnahme und schnellere Verbreitung zu verschaffen ist daher die Gründung einer Schule jüngerer Mathematiker, denen man am allerleichtesten die eigene Geistesrichtung einimpft. Der Lehrer, der keine Mühe scheut, wiederholend, Irrthümer berichtigend, den eigentlichen Geist der Wissenschaft hervorhebend, der in den Büchern nur zwischen den Zeilen zu lesen ist, unablässig einzuwirken, hat gewiss das beste Mittel getroffen, nicht nur die Wissenschaft zu verbreiten, sondern auch sie dem Vaterlande zu erhalten. Diesen Bestrebungen verdanke ich es, dass mein Werk, wiewohl selbst im übrigen Deutschland noch beinahe völlig unbekannt, dennoch in Oesterreich bereits Früchte getragen hat. Die durch den frühen Tod Fourier's verloren gegangenen, sehr werthvollen Wissensschätze, die mit den Untersuchungen im Gebiete der linearen Differentialgleichungen in der innigsten Verwandtschaft stehen, sind durch die Bemühungen Heger's wieder aufgefunden, und die algebraischen Gleichungen mit Buchstabenparametern in den Coefficienten, die besonders in der mathematischen Physik weit öfter vorkommen, als reine Zahlengleichungen, sind hiemit einer regelrechten analytischen Behandlung unterworfen. Hoffentlich werden auch die transcendenten Gleichungen unseren derartigen Bemühungen nicht lange widerstehen.

Auch der Leser dieses Werkes, wenn er dasselbe nicht blos flüchtig zu überblicken, sondern vielmehr eines ernsten Studiums zu würdigen sich entschliessen kann, wird hoffentlich

finden, dass auch für ihn gesorgt und alles Geeignete gethan sei, das Studium desselben zu erleichtern, zwar nicht durch eine weitläufige und umständliche Darstellung, die auch im Grunde nicht zweckgemäss gewesen wäre; der Styl ist vielmehr kurz und präcis, so wie diess einem solchen mathematischen Werke ziemt; allein ich habe überall gesucht dem Leser pie Bildung eines vorläufigen Begriffes des Inhaltes der einzelnen Abschnitte zu erleichtern, indem ich meine Forschungen an die wohlbekannte Theorie der algebraischen Gleichungen anlehne und zu wiederholten Malen hinweise auf die durchgreifende Aehnlichkeit, die zwischen diesen beiden Wissenschaftszweigen besteht. Ich habe überall, wo zu befürchten stand, dass das Gedächtniss des Lesers durch die zu grosse Mannigfaltigkeit der wissenschaftlichen Vorschriften zu sehr belastet werden könnte, für eine allgemeine Uebersicht sowohl, als durch eine summarische Wiederholung durch eigene Paragraphe gesorgt. Ich habe endlich sorgfältig Alles vermieden, was nur irgendwie das Studium des Werkes erschweren könnte; es kommen in demselben keine neuen Worte und auch keine alten in neuer Bedeutung vor, selbst neue Zeichen werden nur höchst spärlich angewendet, mit einem Worte, alles ist erzielt mit den alten Mitteln.

Aber eben dieser letzte, gewiss sehr dankenswerthe Vorzug ist es, der dem Verfasser mancherlei Angriffe bereits zugezogen hat und noch zuziehen wird. Man hat seine Rechnungen zerlegt in kleine Parzellen und hat finden wollen, dass diese nicht neu seien. Siehe da, hat man gesagt, diess ist ein Stein, der sich bereits in einem anderen Lehrgebäude Seite x Zeile y vorfindet, mithin ist es nicht neu. Möge sich der Leser durch solche Recensentenkünste nicht irre führen lassen. Die Untersuchungsmittel, Kunstgriffe der Rechnung, kurz die einzelnen kleineren Bestandtheile sind allerdings alt, aber das daraus aufgeführte Gebäude ist doch neu, und wenn der Leser auch nur bei irgend einem Paragraphe sich zur Annahme verleiten lässt, er habe lauter alte, völlig bekannte Dinge vor sich, so wird er den Standpunkt des Verfassers verlieren und sich selbst das Verständniss erschweren. Ich glaube nicht, dass irgend eine wenn auch meisterhaft abgefasste kurze Darstellung des Inhaltes, Recension u. s. w. geeignet sei, von eben demselben einen genügenden Begriff zu geben, und es dürfte von dem ganzen zweiten Bande gelten, was in Grunert's Archiv von dem III. Abschnitte des ersten Bandes gesagt wird: „Der Inhalt des dritten Abschnittes ist so reichhaltig, dass eine nur

einigermassen vollständige Angabe desselben hier leider nicht möglich ist. Ueberhaupt ist dieses Werk so reich an neuen Methoden und dem Verfasser eigenthümlichen Darstellungen älterer Methoden, dass man nur durch ein sehr sorgfältiges und eingehendes Studium desselben sich einen ganz deutlichen Begriff von seinem Wesen und seiner Bedeutung verschaffen kann.“

Der vorliegende zweite Band ist so wie der erste in drei Abschnitte getheilt, sie enthalten der Reihe nach: die Transformationslehre, die Integrationsmethoden und die partiellen Differentialgleichungen. Ich will es versuchen, hier von dem Inhalte dieser drei Abschnitte einen kurzen, wenn auch ungenügenden Vorbegriff zu geben.

Ich habe an mehreren Stellen des Werkes und namentlich schon in der Einleitung die Verwandtschaft hervorgehoben, in der die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit jener der algebraischen Gleichungen steht, daher es denn als passende, die Uebersicht nicht nur wesentlich erleichternde, sondern sogar mit logischer Nothwendigkeit sich aufdringende Massregel erschien, die letztere auf schickliche Weise in ihre Bestandtheile zerlegt, zum Muster aufzustellen und die erstere, so weit diess angeht, ihr Theil für Theil nachzubilden. Nachdem es nun bekannt ist, dass die Theorie der algebraischen Gleichungen eine sogenannte Transformationslehre, d. h. einen Inbegriff von Lehrsätzen enthalte, mittelst welcher aus einer gegebenen Gleichung eine andere abgeleitet werden kann, deren Wurzeln bestimmte Functionen der Wurzeln der ersteren sind, welche man zu diesem Zwecke gar nicht zu kennen braucht; nachdem man überdiess weiss, dass eine solche Transformation mancherlei Nutzen gewähre und sogar einem Approximationsverfahren zur Auffindung der Wurzeln zu Grunde gelegt werden könne; so erschliesst sich leicht, dass auch eine Transformationslehre der Theorie der linearen Differentialgleichungen vermuthlich einen ebenso grossen, wenn nicht einen grösseren, ausgedehnteren Nutzen bieten könne. Dem ist auch wirklich so, denn ich zeige, dass während bei den algebraischen Gleichungen sämmtliche Wurzeln durch das geeignete Verfahren ohne vorhergehende Transformation allenfalls ermittelt werden können, diess bei Berechnung der particulären Integrale einer linearen Differentialgleichung nur in seltenen Fällen thunlich sei. Die nächste Ursache hievon ist, weil man bei Berechnung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung immer nur eine einzige Zahlen- oder Functionsform vorliegen hat, deren Bestimmung im Detail eine Reihe vollkommen congruenter Rechnungsoperationen

erheischt; die particulären Integrale einer Differentialgleichung hingegen verschiedenen Functionsclassen angehörige Elemente enthalten, die sich auf verschiedene Weise in den Coefficienten abbilden und desshalb auch auf andere und andere Weise berechnet werden müssen. Ich zeige ferner, dass in vielen Fällen das Ergebniss der Transformation bereits das Integral der Gleichung selber sei, was übrigens auch bei den algebraischen Gleichungen nicht selten der Fall ist.

Wenn nun aber auch die hervorgehobene, weitverzweigte Aehnlichkeit zwischen den algebraischen Gleichungen und den linearen Differentialgleichungen wirklich besteht; so erfordert doch der grössere Gegenstand veränderte, meist erweiterte Grundansichten. Ich habe demgemäss, durch die auf dem neuen Felde vorkommenden Umstände genöthigt, von dem Begriffe: Transformation der Gleichungen folgende allgemeinere, auf algebraische sowohl, wie auf Differentialgleichungen anwendbare Definition gegeben: Eine Gleichung oder mehrere solche transformiren heisst, eine oder mehrere Gleichungen bilden, deren Genüge leistende Werthe mit jenen der ersten in einem bestimmten analytischen Zusammenhange stehen, Genüge leistende Werthe, welche dort Wurzeln, hier particuläre Integrale heissen.

In dem einfachsten der hier denkbaren Fälle würde nur eine zu transformirende und nur eine transformirte Gleichung vorliegen, und die Theorie der algebraischen Gleichungen betrachtet auch im Wesentlichen nur diesen einzigen Fall. Auf dem Gebiethe der Infinitesimalrechnung jedoch sind wir durch unsere Bedürfnisse gezwungen, auch die complizirteren Fälle, wo nämlich mehrere zu transformirende Gleichungen vorhanden sind und nur eine Transformirte gesucht wird, oder wo eine einzige zu Transformirende in mehrere Transformirte zerfällt, der Betrachtung zu unterwerfen, und diess ist die erste der Ursachen, aus welchen unsere Transformationslehre jene der algebraischen Gleichungen an Umfang und Verwicklung übertreffen muss. Eine zweite Ursache liegt in dem besonderen Umstande, dass die linearen Differentialgleichungen ihren Eigenschaften nach vorzugsweise Aehnlichkeit besitzen mit algebraischen Gleichungen, die in ihren Coefficienten noch unbestimmt gelassene Parameter bergen, von welchen sohin die Wurzeln Functionen sind, und nicht sosehr mit solchen mit numerischen Coefficienten, weil sich nicht leicht eine Differentialgleichung wird finden lassen, in der solche constante Parameter ganz fehlen. Hätte man bisher ähnliche algebraische Gleichungen in den

Kreis der Untersuchungen gezogen, so würde auch die ihnen angehörige Transformationslehre einen grösseren Umfang gewonnen haben, ja sie wird diess auch bei dem gegenwärtigen Stande der Dinge, weil sie die Lösung von Problemen, wie das folgende, kaum ausschliessen darf: Aus der gegebenen Gleichung ist eine andere abzuleiten, deren Wurzeln die ersten, oder höheren Differentialquotienten der gegebenen sind, genommen nach irgend einem darin erscheinenden Parameter. Uns aber auf dem Felde der Differentialgleichungen liegt es zunächst ob, Methoden anzugeben, die particulären Integrale einer Differentialgleichung, ohne dass man sie kennt, und in der Gleichung selbst nicht nur einigen algebraischen Rechnungsoperationen: Multipliziren oder Dividiren mit einer bestimmten oder erst zu bestimmenden Function zu unterwerfen, sondern auch der eines ein- oder mehrmaligen Differenzirens und Integrirens. Es ist ihm ein eigener Paragraph gewidmet, der auch vorläufig den Nutzen dieser Transformationsart nicht nur in Bezug auf leichtere Integration, sondern auch auf die allgemeine Kenntniss der Natur der Differentialgleichungen ersichtlich macht.

Die dritte und vornehmste Ursache aber der Grösse der auf diesem Felde zu überwindenden Schwierigkeiten liegt in dem weit complizirteren Coefficientenbaue. Während nämlich die Coefficienten einer algebraischen Gleichung die allereinfachsten symmetrischen Functionen der Wurzeln sind, beziehlich vom ersten angefangen 1, 2, 3, . . . Dimensionen biethend, zeigen sich die Coefficienten einer linearen Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung schon in ihrer Urform als zweiwerthige Functionen der particulären Integrale durchaus von n Dimensionen und noch überdiess mit Differentialquotienten derselben bis zum n^{ten} versehen. Wie sehr diess die Behandlung erschwere, ist unter anderen daraus ersichtlich, dass es z. B. sehr leicht ist, die Wurzeln einer algebraischen Gleichung in derselben zum Quadrat zu erheben, während dasselbe bei den particulären Integralen der Differentialgleichung, wenn auch nicht als theoretische, doch als praktische Unmöglichkeit gelten dürfte. Je schwieriger aber ein solcher Gegenstand ist, desto bereitwilliger lässt er sich dehnen ins Lange und Breite, wenn ihn der stets im Auge zu behaltende Hauptzweck nicht in die gebührenden Grenzen zurückführt, und dieser ist lediglich das Verstehen der inhaltsvollen Sprache, welche die Differentialgleichungen reden. Diesem Hauptzwecke nun werden nur jene Transformationen zusagen, die bei

dem Integrations- oder vielmehr Discussionsgeschäfte der Gleichungen vom Nutzen sein können. Da solchergestalt der Zweck, der hier verfolgt wird, ein praktischer ist, so schien es überdiess noch angemessen, einer jeden auseinandergesetzten Transformationsweise, insoferne diess möglich ist, allsogleich die Angabe ihres Nutzens beizufügen. Weil ferner das Transformiren in den meisten Fällen ein unmittelbarer Bestandtheil des Integrirens selbst ist, den Andeutungen aus der Formenlehre unmittelbar auf dem Fusse folgend, ja manchmal die Integration selber abschliesst; so schien dabei eine ähnliche Einfachheit wünschenswerth, wie bei den Vorschriften der Formenlehre selbst. Ich habe daher, so oft diess der Deutlichkeit zusagte, die praktisch wichtigen Transformationsarten zur Erleichterung der Uebersicht über die vorkommenden wichtigen Rechnungsmomente zuerst in Anwendung auf die einfacheren Fälle von Differentialgleichungen niederer Ordnungen, der zweiten, dritten nämlich durchgeführt und den allgemeinen durch complizirte Rechnungen zu entsprechend weitläufigen Formeln führenden Fall einer zu transformirenden Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung der Behandlung in einem späteren Paragraphe zugewiesen.

Es liegt in der Natur der Sache, und wird desshalb Niemanden Wunder nehmen, wenn die Transformationslehre über die Form der particulären Integrale neue Aufschlüsse bringt und zwar im höheren Masse, als diess bei jener der algebraischen Gleichungen der Fall ist. Offenbar können Formen-, Transformations- und Integrationslehre insgesammt nur einen einzigen Zweck verfolgen und dieser ist Ermittlung der Eigenschaften der Genüge leistenden Werthe; jedoch mit dem Unterschiede, dass der Formenlehre nur die Erörterung von so vielen Eigenschaften der particulären Integrale zusteht, als eben nothwendig und hinreichend sind, im Allgemeinen den Unterschied zwischen ihnen zu begründen; Transformation und Integration hingegen es mit allen Eigenschaften bis ins kleinste Detail zu thun hat, und hiemit die Discussion abschliesst. Diesen Grundsätzen gemäss liess sich derjenige Theil der Transformationslehre, der beim Integrationsgeschäfte praktischen Nutzen verspricht, so einfach als möglich dargestellt, in sechs Paragraphe gliedern. Sie handeln:

Der erste Paragraph von der Befreiung eines oder mehrerer particulärer Integrale von einem Divisor $(x - \alpha)^k$ durch Multiplication mit demselben.

Der zweite hat auf dieselbe Weise die Befreiung von einem Factor, wie $e^{\int \varphi dx}$

wo φ nicht gebrochen ist, und die dadurch zu bewirkende Herabsetzung des betreffenden particulären Integrales von der zweiten zur ersten Classe zum Gegenstande.

Der dritte beschäftigt sich mit der Befreiung von einem ähnlichen Factor, wo aber φ gebrochen und mit einem Nenner wie $(x-\alpha)^m$ versehen ist, unter m eine von Eins verschiedene Zahl verstanden und so, dass das davon befreite particuläre Integral für $x=\alpha$ weder unendlich noch unstetig wird.

Der vierte lehrt die particulären Integrale in der Differentialgleichung selbst den Rechnungsoperationen des Differenzirens und Integrirens zu unterwerfen und die damit verbundenen analytischen Erscheinungen zu deuten.

Der fünfte handelt von der Verwechslung der unabhängigen Veränderlichen und ihrem Nutzen in gewissen speciellen Fällen, lässt sohin die particulären Integrale unangetastet und stellt sie nur hin als Functionen einer neuen unabhängigen Variablen, die von der gegebenen eine bestimmte Function ist.

Der sechste ist, wieder ohne die particulären Integrale anzutasten, der Auflösung folgender doppelten Aufgabe gewidmet:

a) Die Differentialgleichung aufzusuchen, welche die particulären Integrale zweier oder mehrerer Differentialgleichungen als Genüge leistende Werthe in sich vereinigt und

b) umgekehrt zwei gegebenen Gleichungen von den vorhandenen, beiden gemeinschaftlichen particulären Integralen zu befreien.

Die annoch folgenden, zu demselben Abschnitte gehörigen Paragraphe, fünf an der Zahl, dienen nur zur Verallgemeinerung der in den sechs früheren vorgetragenen Lehren. Sie behandeln nämlich ganz allgemein die Transformation einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung mit beliebigen Coefficienten.

Die Fassung des ganzen Abschnittes trägt, wie aufmerksame Leser vermuthlich finden werden, einen etwas eigenthümlichen Anstrich von minutiöser Sorgfalt, scheinbar auf Kleinigkeiten verausgabt, zu dessen Rechtfertigung einige Erläuterungen nicht überflüssig sein werden. Die verschiedenen Transformationen sind zum grössten Theile an sich genommen weder schwer, noch neu und es wird wohl kaum einen nur halbwegs auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung heimischen Analysten geben, dem sie nicht bereits vorgekommen wären, meist

ohne den geringsten Nutzen zu bringen. Wie oft sind die verschiedensten Transformationen unternommen worden, so zu sagen auf gut Glück, ohne dass man sich über ihren Zweck Rechenschaft zu geben im Stande war; wie oft ist die transformirte Gleichung weggeworfen worden, wenn sie complizirter war, oder mindestens schien, entweder in Bezug auf die Ordnungszahl oder auf die Gradzahl der Coefficienten, da man daraus immer schloss, dass sie schwerer zu integriren sei als die Vorgelegte, ohne jemals hievon überzeugt zu sein; wie oft ist man, dem Ziele nahe, umgekehrt, das mit einem einzigen ferneren Schritte zu erreichen gewesen wäre! Mit einem Worte, man tappte in tiefer Finsterniss, bei der der Rechner an die Analysis oft Fragen stellte, die er selber nicht verstand, deren Bedeutung ihm wenigstens nicht im ganzen Umfange klar geworden war und somit auch natürlich Antworten bekam, die er nicht verstand, oder die er sich wenigstens nicht vollständig auszulegen wusste. Solch' ein unwissenschaftliches Verfahren kann nicht zum Ziele führen; es ist vielmehr unumgänglich nothwendig, dass man bei jeder Umformung, die die Differentialgleichung erfährt, ihren Zweck angebe, und ihre Wirkung auf den Bau der Gleichung, insofern sie sich bestimmen lässt, im Voraus verkünde, dass man ferner, mit der Leuchte der Formenlehre in der Hand, alle analytischen Erscheinungen, die bei den durchgeführten Rechnungsentwicklungen auftauchen, einer sorgsamen Prüfung unterwerfe, und ihnen die entsprechenden Eigenschaften der Genüge leistenden Werthe gegenüberstelle. So wird es geschehen, dass jede Transformation die Gleichung durchsichtiger macht, indem sie stets mehr und mehr von der Beschaffenheit der particulären Integrale enthüllt, bis endlich die Integration selbst ihre Kenntniss vervollständigt, und daher rührt dieses auf den ersten Anblick etwas kleinlich erscheinende, sorgfältige Beachten und Vergleichen der bei den Rechnungen erhaltenen Formen. Es ist in der Natur der Sache begründet und auf dem Felde der Differentialgleichungen durch die Nothwendigkeit gebothen.

Es hat mit der mathematischen Analysis eine eigene, in allen ihren Theilen zur Genüge in die Augen fallende und dennoch vielleicht nicht genug gewürdigte Bewandtniss. Der menschliche Geist hat zur Unterstützung des beschränkten menschlichen Gedächtnisses sich eine eigenthümliche Zeichensprache gebildet und hat vermittelst derselben gewisse Theile des Denkgeschäftes in Form von Rechen- oder Untersuchungsmethoden der Analysis übertragen, die ihm in den gewöhnlichen logischen Formen durchzuführen schwer oder gar nicht möglich

gewesen wäre, die sie aber so zu sagen mechanisch mit Leichtigkeit durchnimmt. Hiedurch gewinnt sie, obwohl ursprünglich selbst Erzeugniss des menschlichen Geistes, in gewisser Weise ihm gegenüber Individualität, setzt die begonnene Gedankenreihe fort, bringt die lange Reihe der Schlussfolgerungen auf die passendste Form, berichtigt durch die mannigfachen Arten der in ihr liegenden Deductionen ad absurdum Irrthümer, und scheint so mit dem mathematischen Forscher ein wahres Zwiegespräch zu führen, in welchem gewöhnlich der letztere sich als der im Irrthum Befangene beurkundet. Eben in Folge des Umstandes aber, dass die mathematische Analysis als Erzeugniss des menschlichen Geistes auch nichts anderes geben kann, als was der menschliche Geist ursprünglich hineingelegt hat, obgleich ausgedrückt in den mannigfaltigsten und überraschendsten Formen, während hinwiederum der menschliche Geist meistentheils nur sehr wenig als Merkmal des Gesuchten hineinzulegen vermag, in analytischer Sprache gehörig ausgedrückt, was dann, je weniger es ist, auf desto mehr verschiedene Dinge passt, beantwortet die Analysis die ihr gestellten Fragen unpartheiisch, umfassend und vollständig in einem für unsere Geisteskräfte viel zu inhaltsvollen Lapidarstyle, der uns nur durch Zerlegung in einfache Bestandsatzungen verständlich wird. Diess begründet zwischen dem Forscher und dem grossen Werkzeuge, dessen er sich bedient, der Mathematik nämlich, ein ganz eigenthümliches Verhältniss. Es sind nämlich gewissermassen zwei, die an der Forschung Theil nehmen: der neue Forscher und die alte Wissenschaft. Die letztere entfaltet so zu sagen eine Neigung kurz und bündig alles auf einmal zu sagen, was sie weiss, alle an sie gestellten Fragen in der umfassendsten Weise beantwortend, und entschliesst sich zur Darlegung des Speciellen nur, wenn sie dazu gezwungen wird. Der Rechner hingegen versteht das Allgemeine nicht, oder wünscht darüber keine Kunde einzuziehen und forscht nach dem Speciellen. Er wünscht z. B. nur ein einziges particuläres Integral einer linearen Differentialgleichung oder nur eine einzige Wurzel einer algebraischen Gleichung kennen zu lernen. Die Analysis hingegen spricht gerne von allen. Versteht es also der Rechner nicht, sich in der präcisen Zeichensprache der Wissenschaft deutlich auszudrücken, so gibt es allsobald zwischen ihm und ihr ein Missverständniss, das gewöhnlich entweder mit einer Deductio ad absurdum, oder mit der Angabe von etwas endigt, was man ohnehin schon gewusst hat, und wornach man eigentlich gar nicht fragen wollte. Der Leser wird nun gut thun, dieses Werk über die Integration der Differentialglei-

chungen überhaupt und die Transformationslehre insbesondere aufzufassen als Anleitung zu einem solchen, systematisch geführten Zwiegespräche, auf dass ihm eine jede der Transformationsarten, die er hier kennen lernt, erscheine so zu sagen als Form der Conversation, die man passend gewählt hat, um Gelegenheit zu finden, der Analysis die speciellen Eigenschaften der gesuchten Functionen der Reihe nach abzufragen, und die allgemeinen Antworten, zu denen sie Neigung hat, und die für uns nicht belehrend sein würden, weil wir ihren Inhalt entweder schon kennen, oder gar nicht verstehen, so viel als möglich zu vermeiden. Es wird sich eben hiedurch von selbst die Ueberzeugung aufdringen, dass es unumgänglich nothwendig sei, allen in der Rechnung vorkommenden Erscheinungen die gebührende Aufmerksamkeit zuzuwenden und besonders die Ausnahmsfälle sorgfältig zu berücksichtigen, die vielleicht auf einem anderen Felde Nebensache wären, auf dem der Integration der Differentialgleichungen jedoch als Hauptsache hervortreten, weil sie ebenso viele specielle Eigenschaften der gesuchten particulären Integrale kund geben.

Diese Betrachtungen, die man sich nicht oft genug wiederholend einprägen kann, erweitern den Gesichtskreis und zeigen auch die Transformationslehre in einem anderen Lichte. Man sieht sehr bald ein, dass man zwar seit den ältesten Zeiten der Analysis einiges hieher Gehörige gehabt habe; man konnte es aber nicht brauchen, dagegen man dasjenige, was brauchbar gewesen wäre, nicht gehabt hat. Es ist in der That nicht neu, dass man ein particuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung von einem Divisor $(x - \alpha)^k$ befreien könne durch die Substitution: $y = (x - \alpha)^{-k} z$; auch das ist Jedermann klar, dass eine solche Transformation die Anfrage in sich enthalte, ob sich aus einem der particulären Integrale ein solcher Divisor sondern lasse, und dass die Antwort darauf in der Transformirten in z liege; allein welchen Nutzen bringt es denn, wenn ich eben dieser Transformirten schon wegen ihrer Ordnungszahl nichts weiter entnehme, als dass sich aus jedem der particulären Integrale und in jedem Falle ein solcher Divisor abscheiden lasse? Selbst das ist noch von gar keinem Vortheil, wenn man tiefer in den Coefficientenbau eingehend zum Schlusse gelangt, dass im Allgemeinen die particulären Integrale einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition sich zu neuen Functionen n an der Zahl vereinigen lassen, die beziehlich der 0ten, 1sten, 2ten, ... $n - 1^{\text{sten}}$ Potenz von $x - \alpha$ propor-

tional sind, denn es versteht sich diess alles von selbst; aber dass jede Ausnahme von dieser Regel mindestens einen Factor $x-\alpha$ des ersten Coefficienten zur nothwendigen Folge hat, ja gelegentlich selbst eine ganze Gruppe solcher Factoren in den Anfangscoefficienten, dass man aus der Art ihres Vorkommens und den damit verbundenen analytischen Erscheinungen die Anzahl und Beschaffenheit der im Ausnahmszustande sich befindenden Genüge leistenden Werthe zu erschliessen vermag, dass man zu erkennen im Stande ist, ob dieser Zustand einen Factor oder Divisor $(x-\alpha)^k$ einer Irrationalgrösse, einem Logarithmus in erster oder höherer Potenz entspräche, oder lediglich die Folge sei einer neu eingeführten unabhängigen Veränderlichen, das war nicht bekannt und bringt Nutzen, denn es legt die speciellen Eigenschaften der Integrale blos, an denen sie erfasst, aus dem Verbande mit den übrigen losgelöst und dann einzeln der Berechnung unterworfen werden können.

Aehnliches lässt sich vom Inhalte des §. 2 sagen. Die Einführung einer neuen Veränderlichen nämlich durch die Substitution: $y=e^{\int\varphi dx}z$ ist allerdings etwas ziemlich Bekanntes und wenigstens in speciellen Fällen gar nicht selten geübt. Es gilt der Anfrage gleich, ob sich aus dem Integrale ein exponentieller Factor sondern lasse. Es hat aber Niemand die Antwort verstanden, die die Transcendente in z enthält, weil Niemand den eigentlichen Zweck dieser Substitution begriff oder auch nur begreifen konnte, welcher ist, die particulären Integrale durch Abscheidung eines geeigneten exponentiellen Factors zur ersten Functionsclasse herabzubringen, denn man kannte ja die Eintheilung der Functionen in Classen nicht. Zwar hat schon Fourier darauf hingewiesen, dass die bisher übliche Eintheilung der Functionen in algebraische und transcendente unwissenschaftlich sei (was früher bekannt geworden ist, nannte man algebraisch, was später, transcendent), auch dass man genöthigt sein werde, sie mit der Zeit durch eine andere zu ersetzen, er sagt aber nicht durch welche. So lange man nun eine Definition oder logische Eintheilung in einer Wissenschaft nicht braucht, so lange man nichts Erhebliches darauf gründet, hat man allerdings das Recht, sie sich völlig nach Belieben zu bilden. Sobald man aber genöthigt ist, ein ganzes Lehrgebäude, oder mindestens einen grossen Theil desselben darauf zu stellen, hört diese Willkürlichkeit auf, und es entscheidet der Erfolg über die Zweckmässigkeit des Grundbegriffes oder der Eintheilung. Sagt sie der Klarheit zu, vereinfacht sie die mathematische Gesetzgebung, dann ist sie gut, führt

sie hingegen zu endlosen Verwicklungen, dann liegt in unseren Formeln selbst die unwiderstehliche Nöthigung, die unhaltbare Eintheilung oder den unpassenden Grundbegriff aufzugeben und durch einen anderen zu ersetzen. Diess ist nun der Fall mit der neuen Eintheilung der Functionen in Classen, die dem ganzen Werke zu Grunde liegt, und durchaus nichts Willkürliches an sich trägt. Alle Functionen erster Classe nämlich, d. h. diejenigen, von welchen man entweder beweisen kann, dass sie sich bei dem unendlichen Wachsen der darin enthaltenen Veränderlichen einer Potenz derselben fortwährend nähern, oder was dasselbe ist, Differentialquotienten bieten, die je um die Einheit niedriger sind in der Gradzahl, also die algebraischen, die Logarithmen und elliptischen Functionen und unzählige andere, prägen, wenn in einer Differentialgleichung als particuläre Integrale vorhanden, ihren Coefficienten einerlei Merkmale auf, und sind daher auch durch denselben Integrationsact zu erhalten, so dass erst im ferneren Verfolge der Rechnung eine nähere Bestimmung möglich wird. Alle Functionen höherer Classen hingegen sind aus anderen, radical verschiedenen Merkmalen in der Gleichung kennbar und auch durch völlig andere Rechenoperationen zu gewinnen. Die Transformation selbst war also bekannt, aber ihr Zweck war es nicht, auch kannte man kein Merkmal des bereits erreichten Zweckes in der Transformirten, denn man wusste nicht, dass es ein Abfall sei um die Einheit in der Gradzahl in den letzten Coefficienten der Transformirten in x. Gerade dasjenige aber, was man nicht wusste, erweist sich als nützlich, weil es dazu dient, die particulären Integrale einzeln oder gruppenweise zur Integration vorzubereiten.

Nicht anders ist es mit dem Inhalte von §. 3, auch dieser hat zum Zwecke, die Auffindung der mit φ bezeichneten Function, also des multiplicativen Bestandtheiles zweiter Classe des particulären Integrales nur in einer etwas anderen Form und in umgekehrter Ordnung der Glieder.

Das Differenziren und Integriren der particulären Integrale in der Differentialgleichung selbst hat zuerst Liouville an einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung im Journal de l'école polytechnique gezeigt. So wie alle anderen Transformationsarten gelegentlich den Integrationsact bereits abschliessen, so ist diess auch bei dem einfachen Beispiele Liouville's der Fall. Der §. 4 verallgemeinert nicht nur diese Transformationsweise, sondern führt auch zu Resultaten, die mit ihrer Quelle in einem geringen Zusammenhange zu stehen scheinen; er

gibt nämlich Aufschluss über die Anzahl der Bedingungsgleichungen des geschlossenen Vorhandenseins der Genüge leistenden Werthe, die zwischen den constanten Parametern der Differentialgleichung erfüllt sein müssen und über die Möglichkeit des Vorkommens logarithmischer Transcendenten in der absteigenden Entwicklung.

Gleiche Bewandtniss hat es auch mit §§. 5 und 6. Sie müssen alle der Aufmerksamkeit des Lesers empfohlen und keiner darf beim Studium des Werkes übergangen werden, als etwas bereits Bekanntes enthaltend, denn sind auch die Substitutionen nicht eben neu, so ist es doch wenigstens der klar ausgesprochene Zweck und die daraus abgeleiteten Folgerungen; ja selbst die darauf folgenden Paragraphe, die nur die Verallgemeinerung der in den sechs ersten vorgetragenen Lehren enthalten, dürfen wenigstens bei einem zweiten Studium des Werkes nicht überschlagen werden, denn abgesehen davon, dass gegenwärtig neue Wahrheiten nur hinter gewaltigen Entwicklungen des Calculs mehr hervorgezogen zu werden vermögen, dass mithin selbst die Taktik grosser Rechnungsentwicklungen ein eigenes Interesse hat, enthalten diese letzten Paragraphe die Grundlage wichtiger allgemeiner Beweise und einer neuen Integrationsmethode vermittelst einer algebraischen Gleichung.

Wenn nach den Vorschriften der Formenlehre die particulären Integrale von einander gesondert, nach jenen der Transformationslehre aber in ihre verschiedenen aggregativen oder multiplicativen Bestandtheile zerlegt worden sind, die je einem anderen Rechenverfahren unterliegen, z. B. in ihre Factoren erster und zweiter Classe oder in ihre der Mac-Laurinschen Reihenentwicklung fähigen oder nicht fähigen Bestandtheile; so schreitet man, sie einzeln oder gruppenweise vornehmend, zu ihrer völligen Entwicklung bis ins kleinste Detail. Jedes zu diesem Zwecke dienliche allgemeine Verfahren nenne ich eine Integrationsmethode, zum Unterschiede von einer Transformationsweise, wenn gleich eine solche mitunter und in speciellen Fällen die Integration abschliesst. So führt das Abscheiden einer Exponentiellen aus dem particulären Integral jedesmal zur Integration selbst, wenn dieses Integral eben nur eine reine Exponentielle ist. Auf dieselbe Weise ist das Integriren mit einer Differentiation in der Gleichung selbst abgethan, wenn das Integral die Eigenschaft hat, sich durch mehrmaliges Differenziren auf Null zurückzuziehen u. s. w. Auf ähnliche Weise legt aber auch die Substitution ganzer Zahlen in eine algebraische Gleichung in speciellen Fällen eine Wurzel

bloss, ohne dass desshalb diese Substitution gleich eine Auflösungsmethode genannt zu werden verdiente.

Die Integration einer Differentialgleichung kann ferner entweder mehr den Character einer Auflösung oder mehr jenen einer Discussion tragen. Wenn man z. B. eine algebraische Gleichung des zweiten Grades zwischen x und y vorliegen hat und den Werth von y nach den dafür bestehenden Regeln der Elementarmathematik hinzeichnet, so hat man diese Gleichung aufgelöst, was zwar leicht genug ist, aber sehr wenig lehrt. Wenn man hingegen die Curven aufzählt, die aus der geometrischen Construction einer solchen Gleichung hervorgehen können je nach den verschiedenen Werthen der darin vorhandenen constanten Parameter, so hat man die Gleichung discutirt. Diess ist schwerer und mühsamer, schafft aber tiefere Einsicht. Die Integrationsmethoden, vier an der Zahl, die ich bringe, tragen zum Theil vorzugsweise den Character der Auflösung und zum Theil jenen der Discussion. Ich lege dem Letzteren einen höheren Werth bei. Diese vier Methoden sind: Erstens, die Integration in Form von aufsteigenden Reihen; zweitens, die in asymptotischer Form oder die absteigende Integration; drittens die in Form von bestimmten Integralen und viertens die durch eine algebraische Gleichung, welche die im Integrale vorkommenden Irrationalgrössen zu Wurzeln hat. Sie sind insgesammt einfach in ihren Grundzügen und es scheint diess zu dem Glauben zu berechtigen, dass die Theorie der linearen Differentialgleichungen seiner Zeit sich zu den nützlichsten und elegantesten Zweigen der Analysis ausbilden werde, in diesen ihren Vorzügen selbst die Theorie der algebraischen Gleichungen überragend.

Das Integriren in aufsteigender Reihenform vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel, nicht bloss linearer, sondern beliebig gestalteter Differentialgleichungen ist seit den ältesten Zeiten bekannt, und dennoch lässt sich behaupten, dass man von demselben bisher nur selten einen nützlichen Gebrauch gemacht habe. Diese Reihenform ist nämlich das allgemeine, allen bisher verwendeten Functionsformen passende Kleid; sie eignet sich daher auch ganz vorzüglich um allgemeine Eigenschaften der Functionen, z. B. derjenigen, die eine Differentialgleichung erfüllen, etwa die Existenz und Form des Integrales zu beweisen. Ich habe diess zuerst in der Einleitung zum ersten Bande dieses Werkes gethan; zum Integriren jedoch und zur Ermittlung der speciellen Eigenschaften des Integrales taugt sie beinahe nie, wenig-

stens so lange nicht, als die Entwicklung vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel ungestört von Statten geht, denn eben weil sie die allgemeine Form aller Functionen ist, macht sie dieselben auch alle gleich, so dass an ihnen gar keine specielle Eigenschaft und nicht einmal mehr die Classe zu der sie gehörig sind, kennbar ist. Sie dient nicht einmal zur numerischen Berechnung, denn da die gewonnenen Reihen meist nur zwischen engen Grenzen convergiren, so lernt der Rechner durch sie nur ein sehr geringes Bruchstück der Function oder vielmehr mehrerer, man weiss nicht wie durch einander geworfener Functionen kennen, und die Differentialgleichung selbst spricht zu ihm weit beredter, als das in dieser Form gewonnene Integral. Ganz anders verhält sich die Sache in den Ausnahmsfällen, wo die Mac-Laurin'sche Formel den Dienst verweigert, die Rechnung durch das Erscheinen unendlicher Coefficienten unterbrochen wird und man die Reihenentwicklung bald auf diese, bald auf jene Weise zu erzwingen genöthigt ist. Aus der Art wie und dem Orte wo diese Unterbrechungen vorkommen, zieht man dann die allerwerthvollsten Aufschlüsse über die Beschaffenheit des Integrales, lernt die in demselben vorhandenen gebrochenen irrationalen und logarithmischen Bestandtheile kennen, lernt ferner die letzten durch Anwendung von Integralformeln, die mit unbestimmten Integralzeichen ausgestattet sind und in ihrer Anordnung des Näheren bestimmt werden, vermeiden und gewinnt endlich Reihen, die mindestens sehr oft die unbeschränkte Convergenz der Exponentialreihe noch überbiethen und in den minder günstigen Fällen die zwar begrenzte aber bestimmte Convergenz der Potenzentwicklung eines bekannten Binomes besitzen. Desswegen ist auch in diesem Werke die Integration in aufsteigender Reihenform insoferne als sie bisher bekannt war, kaum erwähnt, der Discussion der Ausnahmsfälle hingegen viel Sorgfalt und ein beträchtlicher Raum gewidmet.

Die zweite Integrationsmethode und zugleich diejenige, die unter allen am meisten den Character der Discussion trägt, ist die absteigende oder asymptotische. Der Klarheit der Einsicht sagt sie am allermeisten zu, denn es liegt schon in ihrer Natur die Sonderung der particulären Integrale in ihre multiplicativen Bestandtheile erster und zweiter Classe, von welchen die einen den algebraischen Functionen ähnliche Eigenschaften besitzen, die anderen hingegen jene Eigenthümlichkeiten des Wachsthumes und der Periodicität ausweisen, die den reellen oder imaginären Exponentialgrössen angehörig sind und die beide bereitwillig genug

geometrisch construirt vor die Augen des Geistes treten. Die asymptotische Integration besitzt überdem den Vorzug, an den geschlossenen Integralen so oft sie vorhanden sind, gleichsam vorüber zu führen, d. h. die Bedingungsgleichungen des geschlossenen Vorkommens ihrer Anzahl und Form nach liegen im Gange der Rechnung selbst. Da sie als Hauptmethode die meiste Beachtung verdient, so ist ihr auch besondere Sorgfalt gewidmet worden. Man lernt die Glieder der absteigenden Entwicklung in recurrenter sowohl, wie auch independenter Form kennen und es ist namentlich zur Aufstellung der letzteren ein besonderes combinatorisches Verfahren, das bei allen Differentialgleichungen dasselbe bleibt, angegeben; und bricht man die absteigende Entwicklung bei irgend einem Gliede willkürlich ab, so ist gezeigt, auf was, anstatt auf Null, das Resultat der Substitution des so gekürzten particulären Integrales sich reduzire, wodurch man über das Mass der Genauigkeit, mit welcher derselbe Genüge leistet, Aufschluss erhält.

Die dritte Integrationsmethode ist die in Form von bestimmten Integralen. Vermittelst derselben wird gezeigt, dass man die Integration einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung mit Coefficienten, welche die Gradzahl m nicht überschreiten, abhängig machen könne von der Integration einer anderen Hilfsgleichung von der m^{ten} Ordnung mit Coefficienten von der Gradzahl n. Die Coefficienten dieser letzteren biethen Ansteigungen, die die reciproken Werthe der Ansteigungen in der ersteren sind, aber in entgegengesetzter Anordnung, und die zweite Hilfsgleichung ist wieder die ursprüngliche Differentialgleichung selbst. Die durch diese Methode gewonnenen Integrale zerfallen natürlich in zwei Gruppen. Die eine entspricht den Factoren des ersten Coefficienten der Hilfsgleichung ihrer Zahl und Beschaffenheit nach, und wird entweder durch bestimmte Integrale mit unendlich nahe aneinander liegenden Grenzen, die von Cauchy sogenannten Intégrales singulières oder vermittelst der aufsteigenden Reihenform und durch Verwandlung in die lichtvollere asymptotische Form gewonnen; die andere Gruppe entspricht den Ansteigungen in den Coefficienten der Hilfsgleichung und besteht aus bestimmten Integralen, deren Grenzen gewöhnlich 0 und ∞ sind, mit hinzugefügten Bedingungsgleichungen zwischen den Integrationsconstanten.

Wenn gewisse Symptome Irrationalgrössen im allgemeinen Integrale vermuthen lassen, die man durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen nicht wegschaffen kann oder will, so kann man sich die Integration dadurch bewerkstelligt denken, dass man

die höhere algebraische Gleichung angibt, die diese Irrationalgrössen zu Wurzeln hat und diess zwar wo möglich mit geschlossenen Coefficienten, und zugleich die Art angibt, wie diese Irrationalgrössen in die particulären Integrale eingehen. Es kann diess geschehen auf zweierlei Art, nämlich erstens, indem man zu gleicher Zeit die algebraische Gleichung sammt der absteigenden Entwicklung ihrer Wurzeln vornimmt, wodurch man die Coefficienten der ersteren erhält schichtenweise; oder zweitens, indem man sich die algebraische Gleichung allein verschafft ohne Berechnung ihrer Wurzeln; man erhält dadurch die Coefficienten derselben in ganzen Lagen von mehreren Schichten auf Einmal und stösst abermals im Verlaufe der Rechnung auf die Bedingungsgleichungen des geschlossenen Vorhandenseins. Hiemit schliesst sich die Integration der Differentialgleichungen an die schönen Untersuchungen Anton Müller's über die algebraischen Curven und Heger's über die algebraischen Gleichungen an und bildet mit ihnen abermals eine Methode, bei der der Character der Discussion vorherrschend ist.

Jede dieser vier Integrationsmethoden hat ihren Bereich vorzüglicher Brauchbarkeit und findet in einer augenfälligen Form der Differentialgleichung ihre vorzügliche Berechtigung, z. B. die aufsteigende in den Abfällen von weniger als einer Einheit in der Gradzahl bei den letzten Coefficientenpaaren; die asymptotische bei Fortschreitungen im Niveau und vorhandenen Integralen erster Classe; die in Form von bestimmten Integralen bei Differentialgleichungen von hoher Ordnungszahl mit dem Grade nach nieder gebauten Coefficienten; die durch eine algebraische Gleichung bei irrationaler Beschaffenheit des Integrales.

Um der Theorie der linearen Differentialgleichungen die gewünschte Vollständigkeit zu verleihen, mussten auch Systeme von mehreren solchen mit ebenso vielen abhängigen Veränderlichen ξ, η, ζ und Einer unabhängigen x der Betrachtung unterzogen werden. Diess liess sich kurz und doch umfassend genug desshalb leisten, weil das Integriren solcher Systeme eigentlich ein Integriren der daraus erhaltenen linearen Eliminationsgleichung ist, mithin zu keinen anderen analytischen Erscheinungen führen kann, als den wohlbekannten und in den vorangegangenen Abschnitten einer möglichst sorgfältigen Betrachtung unterworfenen. Die drei Integrationsmethoden: in aufsteigender Reihenform, in der asymptotischen und in Form von bestimmten Integralen in Anwendung auf Systeme von Differentialgleichungen schliessen den fünften Abschnitt und hiemit auch die eigentliche Theorie der linearen Differentialgleichungen, so

zwar, dass der annoch folgende sechste Abschnitt nicht mehr betrachtet werden kann als Bestandtheil dieses Lehrgegenstandes, sondern mehr als eine Anleitung zu dessen nützlichem Gebrauche, gewissermassen die Brücke, die die rein analytische Theorie mit der physisch-mechanischen Wissenschaftsforschung und vorzugsweise der Undulationslehre in Verbindung bringt. Ich habe mir Mühe gegeben, diesen sechsten Abschnitt so zu halten, dass er von einem jeden ersten mathematischen Leser unabhängig von den vorangehenden Lehren dieses Werkes verstanden werden kann, damit er die Lectüre mit diesem sechsten Abschnitte beginnen könne. Es wird ihn diess auf den Standpunct des Verfassers stellen und wird ihn über den Zweck, der hier verfolgt wird, aufklären. Diess ist das beste Mittel, das vielleicht etwas schwierigere Studium des Werkes zu erleichtern.

Es klingt beinahe befremdend, wenn man von einer dreitheiligen, aus Formenlehre, Transformationslehre und Integrationsmethode bestehenden Theorie, deren erster Theil, die Formenlehre, so einfache Vorschriften bringt, dass es Wunder nimmt, wie sie bisher unbekannt bleiben konnte; der zweite, die Transformationslehre beinahe lauter seit den ältesten Zeiten übliche Rechnungsentwicklungen ins Auge fasst, der dritte aus ihren Grundzügen nach so einfachen Methoden zusammengesetzt ist, dass sie ohne Anstand allsogleich in die Lehrbücher der Infinitesimal-Analysis aufgenommen werden können, freimüthig gesteht, sie sei schwer zu studiren und diess zwar trotz des, wie man sich, glaube ich, überzeugen wird, ebenso einfachen, wie präcisen Styles. Es ist diess aber keineswegs wunderbarer, als die Thatsache, dass Fourier's schöne Arbeiten über algebraische Gleichungen mit Buchstabenparametern in den Coefficienten trotz der sehr genauen Angabe ihrer Resultate in seinem Exposé synoptique und trotz der Mühe, die sich vermuthlich französische und andere Gelehrte gaben, sie wieder herzustellen, demohngeachtet durch seinen frühzeitigen Tod verloren waren und blieben, und dass es erst ein Paar Decennien später Heger gelang, sie wieder zu reproduziren. Es hat diess auch einerlei Grund: Das eine nämlich und das andere ist zwar einfache aber bisher neue, ungewohnte Mathematik, die die Mehrzahl der Leser täuscht, welche Methoden von dem Zuschnitte der von Lagrange, Pfaff, Jacobi u. s. w. herrührenden darin suchen und etwas anderes völlig davon Verschiedenes finden, mit dem sie sich erst dann wieder zu befreunden vermögen, wenn sie die ausgezeichnete Wirksamkeit desselben bei Problemen der

mathematischen Physik mit der Hilflosigkeit der älteren Methoden auf diesem Felde zu vergleichen Gelegenheit gefunden haben. Ich bin natürlicher Weise durch eine mehr als zwanzigjährige Bekanntschaft und durch meine Erfahrungen als Lehrer mit diesen Schwierigkeiten und mit all' den Irrthümern und Abwegen, auf die man gerathen kann, vertrauter, als irgend Jemand. Ich habe täglich Gelegenheit zu sehen, wie selbst bedeutendere Talente in ihrer Begierde, schnell mit zu produziren, irre gehen und statt wahrhaft Erspriessliches anzustreben, völlig unnütze Differentialgleichungen aufsuchen, die kein anderes Verdienst haben, als das, in geschlossener Form integrabel zu sein, nutzlose Bestrebungen, deren auch ich mich ehemals, bevor es mir gelang, tiefere Einsicht in die Natur dieser Sache zu gewinnen, schuldig gemacht habe, von denen aber, weil ich sie für völlig werthlos und dem Fortschreiten der Wissenschaft vielmehr hinderlich halte, durchaus gar nichts in das vorliegende Werk aufgenommen wurde. Da aber dieselben Hindernisse, welche meine eigenen Fortschritte auf dieser Bahn verlangsamten, auch dem Leser das Studium des Werkes erschweren, so kann ich wohl in einer Vorrede nichts Besseres thun, als den Inhalt möglichst klar darlegen und auf diese Hindernisse, und endlich auf die beste Art, das Studium des Werkes zu beginnen, aufmerksam machen.

Das erste habe ich im Vorhergehenden zu leisten gesucht, und unternehme es nun, dem Leser kurz und bündig die Klippen zu bezeichnen, die er zu vermeiden hat.

Das dem Wissenschaftsforscher angeborene Bestreben nach dem Vollendeten, Abgeschlossenen und Vollkommenen macht ihn, wenn es irre geleitet wird, einem gewissen bösen Dämon unterthan, der sehr passend der böse Geist der Quadraturen des Cirkels genannt werden kann. Dieser verleitet ihn, etwas zu suchen, was nicht da ist, und erschöpft damit völlig unnützer Weise seine Zeit und seine Kräfte. Er existirt in anderer und anderer Gestalt beinahe in allen Zweigen der menschlichen Erkenntniss und es hat beinahe eine jede Wissenschaft ihre eigene Quadratur des Cirkels. Der eine sucht sie in der Gestalt eines Perpetuum mobile, der andere strebt nach geschlossenen algebraischen Formeln für Gleichungen, die den vierten Grad übersteigen; der dritte will die Störungsgleichungen integriren, ohne Entwicklung der Störungsfunction in Reihen; dem vierten behagen nur Integrale der Differentialgleichungen in geschlossener Form, und eben dieser ist es, der mit dem unglücklichen Forscher nach der Quadratur des Cirkels die allermeiste Verwandtschaft hat.

Die Thätigkeit des menschlichen Geistes, vermittelst welcher er mathematische Begriffe formt, ist eine doppelte, nämlich geometrische Anschauung oder Rechnung, und der Ursprung unserer Begriffe ist entweder ein graphischer, oder arithmetisch-analytischer, also in letzter Instanz auf die Rechnungsoperation des Zählens zurückführbarer. Dasjenige nun, was unmittelbares Erzeugniss ist von einer dieser beiden, sehr wesentlich verschiedenen Geistesthätigkeiten, kann zwar zu gleicher Zeit manchmal auch als Erzeugniss der anderen gelten, wird es aber in der Regel nicht. Z. B. Der Umfang eines Kreises kann auf graphischem Wege, d. h. durch Zeichnen ohne Anstand aus dem Halbmesser construirt werden, hieraus folgt aber noch lange nicht, dass man denselben Umfang aus dem Halbmesser auch auf dem Wege des Zählens und zwar durch eine endliche Anzahl solcher Rechenoperationen müsse erhalten können. Die hartnäckige Annahme, es müsse das Letztere thunlich sein, ist es, die die Geisteskräfte dieser Unglücklichen erschöpft, und die auch auf den Boden der Differentialgleichungen übertragen, manchen redlichen Forscher in der Vorzeit am rüstigen Fortschreiten gehindert haben mag. Die Infinitesimalanalysis ist nämlich die Brücke, welche die geometrische Anschauung mit dem aus der Grundoperation des Zählens abgeleiteten Rechnen verknüpft. Dasjenige, was wir Differentialquotienten nennen, ist bereits graphischen Ursprunges. $\frac{dy}{dx}$ bedeutet die trigonometrische Tangente eines Winkels, $\frac{dy^2}{dx^2}$ ist der Repräsentant des Krümmungshalbmessers u. s. w. Da nun aber eine jede Differentialgleichung zwischen y und x eine Relation ausdrückt zwischen diesen Grössen graphischen Ursprunges, so ist offenbar y selbst, d. h. das Integral der Differentialgleichung desselben graphischen Ursprunges. Wer nun verlangt, dass es aus x auch auf dem Wege des Zählens ableitbar sein müsse durch eine endliche Reihe solcher Rechnungsoperationen, verlangt offenbar etwas, was zufällig manchmal geleistet werden kann, in der Regel aber unmöglich ist, stellt also genau dieselbe ungereimte Forderung, von welcher sich auch der unglückliche Forscher nach der Quadratur des Cirkels nicht losmachen kann. Man kann ihn auch ebenso necken mit inhaltslosen geschlossenen Formeln, die der wohlbekannten $\pi = -\sqrt{-1}\, log \sqrt{-1}$ völlig analog sind, und genau so, wie diese, auch nicht den allergeringsten Nutzen bringen. Wiewohl nun diess alles nicht nur an und für sich sehr klar ist und durch eine Auswahl passender Beispiele noch viel klarer gemacht werden könnte, so lässt sich doch der Satz: Suche das Unmögliche nicht, als praktische,

allgemein giltige Regel nicht aufstellen, und jeder, der sich in der Wissenschaft neue Wege eröffnen will, wird über kurz oder lang der Gefahr begegnen, im nutzlosen Forschen nach etwas, was nicht existiren kann, seine Kräfte zu verzehren. So lange es Denker geben wird, wird es auch Irrthümer geben; nur der nicht denkt, der kann auch nicht irren, und gerade der frohe Glaube an das Dasein des Gesuchten ist einer der möglichen Irrthümer, die selbst die strenge Wissenschaft dulden muss, wenn sie nicht auf jeden Fortschritt Verzicht leisten will. Es wäre freilich besser, wenn namentlich der Mathematiker, dessen Forschungen die allermühsamsten und langwierigsten sind, und der das, was er sucht, der Analysis immer sorgfältig vordefiniren muss, zur Vermeidung unnützer Mühen immer damit anfangen könnte, zuerst die Möglichkeit seiner Definition zu beweisen. Dies ist aber bekanntlich so schwer, dass man es nur in den allerseltensten Fällen thunlich findet und höchstens als praktische Regel den Satz aufstellen kann: Nimm die Möglichkeit des Gesuchten, von der Du nicht überzeugt bist, nicht allzu hartnäckig an.

Diese Bemerkungen gelten nicht bloss dem Streben nach geschlossenen Formeln, wenn diese zu gar nichts anderem dienen, als das Schwere auf das noch Schwerere und das Unverständliche auf das noch Unverständlichere zurückzuführen, sondern auch jenem nach einer unerreichbaren Einfachheit, Allgemeinheit und Sicherheit. Sie sind auch nicht bloss vom Nutzen in der Theorie der Differentialgleichungen, sondern in beinahe allen Zweigen der menschlichen Erkenntniss. Der Leser ist zwar gegen den Irrthum einigermassen geschützt, wenn er sich der Führung des Verfassers mindestens so lange überlässt, bis er eine genügende Kenntniss des ganzen Lehrgebäudes in groben Umrissen gewonnen hat, verfällt ihm aber möglicher Weise allsogleich, sobald er sich in dem neuen einer beinahe unbegrenzten Fortbildung fähigen Gegenstande eigene neue Wege zu eröffnen strebt.

Wenn es nach langen Mühen gelungen ist, den lebendigen Strom des Wissens in ein anderes, regelrechteres und besseres Flussbett zu leiten, geht dennoch die Mehrzahl der Verehrer der Wissenschaft noch eine Zeit lang den alten gewohnten Pfad. Diess ist der Fall selbst bei den einfachsten und wirksamsten Zweigen der menschlichen Erkenntniss, z. B. der Infinitesimalanalysis. Man sucht sie die wahrhaft populäre in den Lehrbüchern zu umgehen durch allerlei Betrachtungen älteren Zuschnittes, die populär genannt werden, es aber nicht sind; ja

es fehlt selbst gegenwärtig nicht an neuerfundenen synthetischen Methoden, zu gewissen Curven Tangenten zu ziehen, die alle überflüssig gemacht werden durch unsere einfachen Formeln für die Subtangente und Subnormale. Diess ist, wenn man will, schwere, auch geniale, aber unnütze Wissenschaft und sagt weder dem Fortschritte noch der Verbreitung zu, und der in solchen Bestrebungen Befangene, bildet sich selbst ein Hinderniss des rüstigen Fortschrittes und erspriesslichen Wirkens.

Dem grössten Theile aller dieser Schwierigkeiten, die die Fortschritte der Wissenschaft wesentlich behindern, entgeht man einfach dadurch, dass man die Mathematik nicht als Zweck, sondern als Mittel zu einem höheren Zwecke betrachtet, welcher ist: Studium der Natur. Man kann zwar auch mit diesem Ziele im Auge noch immer von dem rechten Pfade abweichen und in ein inhaltsleeres Formelgewirre sich verirren, wird jedoch durch die höhere Tendenz auf den rechten Weg immer wieder zurückgeführt. Man entringt allmählig den mathematischen Formeln einen anderen Sinn, den Methoden eine andere Geltung und schreitet, wenn auch langsam, doch stetig zur Höhe der Wissenschaft hinan und die mannigfachen Formen der Irrthümer, die vielgestaltigen Quadraturen des Cirkels verschwinden, wie in Dunst und Nebel aufgelöst, in der Tiefe. Es muss jedoch hiezu die rechte Zeit gekommen sein und das Material, welches die Mathematik zu verarbeiten bestimmt ist, aufgespeichert haben. Erst wenn diess geschehen ist, vermag man den praktischen Zweck der Theorie der Differentialgleichungen richtig und gründlich aufzufassen, Verständniss nämlich jenes inhaltsvollen Lapidarstyles, den die Differentialgleichungen reden, erzielt durch gleichviel welche Mittel, sei es Integration, sei es directe Betrachtung der Gleichung selbst und zwar nicht aller Differentialgleichungen, sondern vorderhand vorzugsweise nur derjenigen, denen man bei Problemen der Physik und Mechanik begegnet. Diese sind aber höchst selten andere als Partialgleichungen, und werden erst durch eine gewisse Reihe von analytischen Massnahmen in gewöhnliche Differentialgleichungen verwandelt. Wiewohl ich nun Sorge getragen habe, eine reine Theorie der linearen Differentialgleichungen aufzustellen, so geschah diess doch immer mit Hinblick auf dieses letzte Ziel: Integration nämlich der Partialgleichungen, und es dürfte auch für den Leser gerathen sein, diesen Ausgangspunkt fortwährend im Auge zu behalten und das Studium des ganzen

Werkes immerhin mit dem sechsten und letzten Abschnitte zu beginnen, um dadurch klar einzusehen, was der Verfasser eigentlich beabsichtigt.

Dieser letzte Abschnitt zerfällt in fünf Paragraphe, von welchen der erste im Wesentlichen dazu bestimmt ist, eine allgemeine Uebersicht über die Probleme der Mechanik und Physik und ihre bisherigen Behandlungsweisen zu geben, von letzteren irgend eine bestimmte zu erkiesen, und die Wahl derselben zu rechtfertigen. Es ist diejenige, die möglichst besonnen Schritt vor Schritt vorgehend, alle Umstände der Erscheinung, deren Gesetz gesucht wird, der Analysis einzeln abfrägt; und die Zerklüftung in mehrere Grundprobleme, mit welcher dann auch die Verwandlung der Partialgleichung in eine gewöhnliche verknüpft ist, liegt in ihrer Natur. Diese Grundprobleme sind: a) Untersuchung der Wellenlinie oder Wellenfläche, b) das Reflexionsproblem in zwei verschiedenen Fassungen, in denen es vorkömmt, und c) die Darstellung des anfänglichen Erregungszustandes. Es versteht sich wohl von selbst, dass es keineswegs in der Absicht lag, diesen so inhaltsreichen Gegenstand zu erschöpfen, sondern eben nur auf den durchgreifenden Nutzen aufmerksam zu machen, den die Theorie der linearen Differentialgleichungen im Gebiete der Wissenschaftsforschung gewähren kann, und diess zwar, wenn man allen anderen die folgende Behandlungsweise der Probleme der Undulationslehre vorzieht, welcher auch die der Wärmeprobleme analog ist.

Durch die gestellte Anfrage nach einem periodischen Zustande und nach der Wellenfläche oder Wellenlinie verwandelt man zuvörderst die vorliegende Partialgleichung oder das System von mehreren solchen in eine einzige gewöhnliche lineare Differentialgleichung. Diese sucht man dann durch die in dem Werke auseinandergesetzten passend gewählten Methoden zu integriren und zwingt durch schickliche Wahl der Integrationsconstanten das erhaltene Integral noch dazu, die Bedingungen an den Grenzen des materiellen Systemes zu erfüllen. Hiemit erringt man dann gewöhnlich die Kenntniss aller einfachen Schwingungsweisen, deren eben dieses System fähig ist. Diess ist der Inhalt von §. 2.

Sollten aber gar keine Bedingungen an den Grenzen gegeben sein und das materielle System aus mehreren heterogenen Theilen zusammengesetzt erscheinen, die durch Trennungsflächen oder dünne Trennungsschichten von einander gesondert sind, während jedem Theile eine andere Differentialgleichung der Bewegung oder ein anderes System von solchen angehört,

so sucht man zuvörderst alle diese Bewegungsgleichungen in eine einzige zu vereinigen, indem man in die Coefficienten die Exponentielle höherer Ordnung 0^{0^x} aufnimmt. Die Grundzüge einer allgemeinen Integrationsmethode für solche Differentialgleichungen werden auseinandergesetzt, ein Beispiel der Anwendung derselben ist zwar nicht gegeben, weil mir daran lag, den rein analytischen Character des Werkes möglichst zu wahren. Die Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften enthalten jedoch das einfachste der hieher gehörigen Beispiele, die Theorie der Schwingungen nämlich solcher gespannter Saiten, die aus mehreren Stücken von verschiedener Stärke zusammengeknüpft sind. Das Reflexionsproblem in dieser Fassung ist der Inhalt von §. 3.

Nach gehörig erworbener Kenntniss der einfachen Schwingungs- und Reflexionserscheinungen, bleibt noch übrig, den Einfluss zu erörtern der Art und Weise, wie im materiellen Systeme der Schwingungszustand hervorgerufen worden ist. Der schon von Lagrange bei Schwingungen gespannter Saiten eingeschlagene und von Poisson bei den Schwingungen einer elastischen Feder weiter fortgebildete Weg eines isolirenden Multiplicators zur Bestimmung gewisser Coefficienten, die im allgemeinen Integrale noch zur Disposition stehen, war derjenige, auf den ich mein vorzüglichstes Augenmerk richtete. Es gelang mir endlich nach langen Mühen, eine, wie ich glaube, wohl gerundete allgemeine Theorie dieses isolirenden Multiplicators aufzustellen. Ich finde nämlich die Differentialgleichung, aus welcher dieser isolirende Multiplicator gezogen wird, sammt der dazu gehörigen Grenzgleichung, ich beweise, dass die Multiplicatorengleichung der Multiplicatorengleichung, also die zweite Multiplicatorengleichung der gegebenen Bewegungsgleichung wieder die letztere selbst sei, und benütze diesen besonderen Umstand zum Beweise, dass man es nur mit einer einzigen transcendenten Gleichung zu thun habe, die der Bewegungs- und Multiplicatorengleichung gemeinschaftlich ist, dass man somit in einem jeden Falle und bei sämmtlichen, wenn auch noch unerörterten Bewegungsproblemen so viele isolirende Multiplicatoren erhalten werde, nicht mehr und nicht weniger, als zur wirklichen Darstellung des anfänglichen Erregungszustandes nothwendig und zureichend sind. Diess ist der Inhalt von §. 4 und das vielleicht etwas schwierigere Studium desselben möge den Leser nicht abschrecken, denn er wird hiemit eines allgemeinen Beweises theilhaftig, der eine Anzahl Specialbeweise enthält.

Schlüsslich wird im §. 5 auch der Fall beherzigt, wo bei einem im Raume ausgedehnten materiellen Systeme die Begrenzung durch mehrere Paare zu einander paralleler Ebenen bewerkstelligt wird. Das Reflexionsproblem im Raume wird nämlich durch ganz andere analytische Hilfsmittel zu einer befriedigenden Lösung gebracht, als das bei linearen Systemen und die Verschiedenheit spricht sich auch thatsächlich in der Natur aus durch den Umstand, dass, während lineare materielle Systeme nur bestimmte Schwingungsweisen, wenn auch entnommen einer unendlichen Reihe, respective bestimmter Töne fähig sind, ein im Raume ausgedehntes materielles System jede beliebige Schwingungsweise, beziehlich jeden beliebigen Ton fortzupflanzen vermag.

In der Vorrede zum ersten Bande habe ich eine Reihe von Abhandlungen als Beispielsammlung zu dem vorliegenden Werke versprochen, enthaltend die Auflösung gewisser bisher noch unerledigter Probleme der Mechanik und Physik mit den hier gewonnenen analytischen Hilfsmitteln. Die zuvor erwähnte Theorie der Schwingungen solcher gespannter Saiten, die aus mehreren heterogenen Bestandtheilen zusammengefügt sind, möge als die erste derselben angesehen werden; ein Paar andere sind noch unter der Feder und sollen bald nachkommen.

Es ist gewiss nichts Geringes, wenn dem Leser zugemuthet wird, dass er sich durch zwei starke Bände einer ziemlich schwierigen Theorie durcharbeiten soll, und hieraus entspringt, wie ich glaube, die Verpflichtung, ihm zu zeigen, dass seine Mühe keine verlorene sei und dass ihm dafür ein wirksames Mittel der Wissenschaftsforschung gebothen werde, welches ihn geraden Weges und mit möglichster Vermeidung alles erfolglosen Herumtappens zum gewünschten Ziele führt. Hiezu sollen eine kleine Anzahl möglichst einfacher, aber sorgfältig gewählter und instructiver Beispiele dienen, die ich zur Erläuterung der schwierigeren Lehren dem mathematischen Publicum noch zu schulden glaube.

Wien im April 1859.

Der Verfasser.

IV. Abschnitt.

Transformationslehre.

Einleitung.

Es ist zu wiederholten Malen und namentlich schon in der Einleitung dieses Werkes die Verwandtschaft hervorgehoben worden, in der die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit jener der Algebraischen steht, daher es denn räthlich erschien, die Letztere, auf passende Weise in ihre Bestandtheile zerlegt, zum Muster aufzustellen, und die Erstere, in so weit diess anging, ihr Theil für Theil nachzubilden. Nachdem es nun bekannt ist, dass die Theorie der algebraischen Gleichungen eine sogenannte Transformationslehre, d. h. einen Inbegriff von Lehrsätzen enthalte, mittelst welcher aus einer gegebenen Gleichung eine andere abgeleitet werden kann, deren Wurzeln bestimmte Functionen der Wurzeln der Ersteren sind, welche man übrigens gar nicht zu kennen braucht, nachdem man überdiess weiss, dass solch eine Transformation mancherlei nützliche Zwecke erreichen helfe, und sogar einem Approximationsverfahren zur Auffindung der Wurzeln zu Grunde gelegt werden könne; so liegt wohl die Vermuthung nahe, dass eine Transformationslehre der Theorie der linearen Differentialgleichungen wenigstens einen eben so grossen, wenn nicht einen grösseren, ausgedehnteren Nutzen biethen werde. Und dem ist auch wirklich so, denn wir werden sehen, dass während bei den algebraischen Gleichungen sämmtliche Wurzeln durch das geeignete Verfahren, ohne vorhergehende Transformation allenfalls ermittelt werden können; diess bei Berechnung der particulären Integrale einer linearen Differentialgleichung nur in seltenen Fällen thunlich ist.

Wenn nun aber auch die hervorgehobene Ähnlichkeit zwischen den algebraischen Gleichungen und den linearen Differentialgleichungen wirklich besteht, so erfordert der grössere Gegenstand doch immer veränderte, meistens erweiterte Grundansichten. Demgemäss bemerken wir, dass wir durch die auf dem neuen Felde vorkommenden Umstände genöthiget seien, von dem Begriffe: Transformation der Gleichungen folgende allgemeinere, auf algebraische sowohl, wie auf Differentialgleichungen anwendbare Definition zu geben: Eine Gleichung oder mehrere solche transformiren heisst, eine oder mehrere andere Gleichungen bilden, deren Genüge leistende Werthe mit jenen der Ersteren in einem bestimmten analytischen Zusammenhange stehen, Genüge leistende Werthe, welche dort Wurzeln, hier particuläre Integrale

heissen. In dem einfachsten der hier denkbaren Fälle würde nur eine zu transformirende und auch nur eine transformirte Gleichung vorliegen, und die Theorie der algebraischen Gleichungen betrachtet auch im Wesentlichen nur diesen einfachen Fall; auf dem Gebiethe der Infinitesimalrechnung jedoch sind wir durch unsere Bedürfnisse gezwungen, auch die complicirteren Fälle, wo nämlich mehrere zu transformirende Gleichungen vorhanden sind, und nur Eine transformirte Gleichung gesucht wird, oder wo eine einzige zu transformirende Gleichung in mehrere transformirte zerfällt, der Betrachtung zu unterwerfen, und diess ist die erste der Ursachen, aus welchen unsere Transformationslehre jene der algebraischen Gleichungen an Umfang und Verwicklung übertreffen muss. Eine zweite Ursache liegt in dem besonderen Umstande, dass die linearen Differentialgleichungen ihren Eigenschaften nach eher Ähnlichkeit besitzen mit algebraischen Gleichungen, die in ihren Coefficienten noch unbestimmt gelassene Parameter bergen, von welchen demnach die Wurzeln Functionen sind: als mit solchen mit numerischen Coefficienten. Hätte man bisher ähnliche algebraische Gleichungen in den Kreis der Untersuchungen gezogen, so würde auch die ihnen angehörige Transformationslehre einen grösseren Umfang gewonnen haben, insoferne, als sie die Lösung von Problemen, wie das folgende, aufzunehmen genöthiget gewesen wäre: Aus der gegebenen Gleichung ist eine andere abzuleiten, deren Wurzeln die ersten oder höheren Differentialquotienten der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, genommen nach irgend einem der darin enthaltenen Parameter. Hiemit im Zusammenhange nun wird es uns obliegen, Methoden anzugeben, die particulären Integrale einer Differentialgleichung, ohne dass man sie kennt, und in der Gleichung selbst, nicht nur den algebraischen Rechnungsoperationen zu unterwerfen, sondern auch der eines ein- oder mehrmaligen Differenzirens und Integrirens.

Die dritte und vornehmste Ursache aber der Grösse der auf diesem Felde zu überwindenden Schwierigkeiten liegt in dem complicirteren Coefficientenbaue; während nämlich die Coefficienten einer algebraischen Gleichung die allereinfachsten, der niedrigsten Klasse angehörigen symmetrischen Functionen der Wurzeln sind, bezüglich $1, 2, 3 \ldots n$ Dimensionen bietend, zeigen sich die Coefficienten einer linearen Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung in ihrer Urform schon als zweiwerthige Functionen der particulären Integrale, durchaus von n Dimensionen, und noch überdiess mit Differentialquotienten versehen. Wie sehr diess die Behandlung erschwere, ist unter anderen daraus ersichtlich, dass es z. B. sehr leicht ist, die Wurzeln einer algebraischen Gleichung in derselben zum Quadrat zu erheben, während dasselbe bei den particulären Integralen der linearen Differentialgleichungen zu den praktischen Unmöglichkeiten gehören dürfte. Je schwieriger nun aber ein solcher Gegenstand ist, desto bereitwilliger lässt er sich dehnen ins Lange und ins Breite, wenn ihn der stets im Auge zu behaltende Hauptzweck, das Verstehen nämlich der inhaltsvollen Sprache, welche die Differentialgleichungen reden, nicht in die gebührenden Grenzen zurückführt; diesem Hauptzwecke nämlich werden nur jene Transformationsarten zusagen, die bei dem Integrationsgeschäfte selbst von Nutzen sein können, und nur mit diesen soll sich der vorliegende vierte Abschnitt beschäftigen. Da solchergestalt der Zweck, den wir verfolgen, ein praktischer ist, so scheint es überdiess noch angemessen, einer jeden auseinandergesetzten Transformationsweise, insoferne diess möglich ist, alsogleich die Angabe ihres Nutzens beizufügen. Weil ferner das Transformiren in den mei-

sten Fällen ein unmittelbarer Bestandtheil des Integrirens selbst ist, den Andeutungen aus der Formenlehre unmittelbar auf dem Fusse folgend, ihm demnach eine ähnliche Einfachheit wünschenswerth ist, wie den Vorschriften der Formenlehre selbst; so schien es räthlich, alle praktisch nützlichen Transformationsarten zur Erleichterung der Uebersicht zuerst in Anwendung auf die einfacheren Fälle von Differentialgleichungen niederer Ordnungen durchzuführen, und den allgemeinen, durch complicirte Rechnungen zu entsprechend weitläufigen Formeln führenden Fall einer zu transformirenden Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung einer besonderen Behandlung in einem späteren Paragraphe zu unterwerfen. Es ist schon in der Vorrede gesagt worden, dass die Bearbeitung dieser letzten Paragraphe ein Verdienst des Herrn Josef Derffel, derzeit Privatdocenten am hiesigen k. k. polytechnischen Institute, sei. Endlich liegt es in der Natur der Sache und wird desshalb Niemanden Wunder nehmen, wenn unsere Transformationslehre über die Form der Genüge leistenden particulären Integrale neue Aufschlüsse bringt, die desshalb gewiss Niemand in die Formenlehre zu verweisen Lust tragen wird, weil ja die ganze Theorie der linearen Differentialgleichungen nur den Einen Zweck hat, und haben kann, nämlich die Eigenschaften der Genüge leistenden Werthe zu ermitteln, also im Grunde denselben Zweck, den auch die Formenlehre verfolgt, nur mit dem Unterschiede, dass dieser letzteren nur die Erörterung von so vielen Eigenschaften der einzelnen particulären Integrale zusteht, als eben nothwendig und hinreichend sind, den Unterschied zwischen ihnen zu begründen, erstere hingegen es mit allen Eigenschaften bis ins kleinste Detail zu thun hat. Diesen Betrachtungen gemäss wollen wir dasjenige, was sich von der Transformationslehre beim Integrationsgeschäfte als praktisch nützlich erwiesen hat, so einfach als möglich dargestellt, in den sechs ersten Paragraphen dieses Abschnittes auseinander setzen, zunächst in Anwendung auf einfachere Fälle; die darauf folgenden Paragraphe vom siebenten an aber sollen der Verallgemeinerung der in diesen ersten sechs auseinandergesetzten Lehren gewidmet sein, und zwar soll:

Der erste Paragraph von der Befreiung Eines particulären Integrales oder mehrerer von einem Divisor wie $(x-\alpha)^k$ durch Multiplication mit demselben handeln.

Der Zweite auf ähnliche Weise die Befreiung von einem exponentiellen Factor wie $e^{\int \varphi dx}$, wo φ eine ganze Function von x ist, und die dadurch zu bewirkende Herabsetzung des betreffenden particulären Integrales von der zweiten zur ersten Klasse zum Gegenstande haben.

Der Dritte soll sich mit der Befreiung von einem ähnlichen Factor beschäftigen, wo jedoch φ gebrochen und mit einem Nenner wie $(x-\alpha)^m$ versehen ist, unter m eine von der Einheit verschiedene Zahl verstanden, und so, dass das in Rede stehende particuläre Integral nach der geschehenen Befreiung für $x=\alpha$ nicht unendlich oder unstetig wird.

Der Vierte lehrt die particulären Integrale in der Differentialgleichung selbst den Rechnungsoperationen des Differenzirens und Integrirens unterwerfen, und die hiemit verbundenen analytischen Erscheinungen zu deuten.

Der Fünfte handelt von der Verwechslung der unabhängigen Veränderlichen und ihrem Nutzen in speciellen Fällen, lässt sohin die particulären Integrale unangetastet, und stellt sie nur hin als Functionen einer neuen unabhängigen Variablen, die von der Gegebenen eine bestimmte Function ist.

Der Sechste ist wieder, ohne die particulären Integrale anzutasten, der Auflösung von folgender doppelten Aufgabe gewidmet, nämlich: a) die Differentialgleichung aufzusuchen, welche die particulären Integrale zweier oder mehrerer ähnlichen Differentialgleichungen als Genüge leistende Werthe in sich vereiniget, und b) umgekehrt aus einer gegebenen solchen transformirten und Einer der beiden zu transformirenden Gleichungen die andere zu finden.

Die Fassung des ganzen vorliegenden Abschnittes trägt, wie man vermuthlich finden wird, einen etwas eigenthümlichen Anstrich von minutiöser Sorgfalt, oft, scheinbar wenigstens, auf Kleinigkeiten verausgabt, zu dessen Rechtfertigung hier wohl noch ein paar Worte am Platze sind. Die verschiedenen Transformationen, die wir hier ausführen lehren, sind zum grössten Theile weder schwer, noch neu, und es wird wohl kaum einen nur halbwegs auf dem Gebiethe der Infinitesimalrechnung heimischen Analysten geben, dem sie nicht bereits vorgekommen wären. Allein wie oft ist nicht eine gewisse Transformation unternommen worden, so zu sagen auf gut Glück, und ohne dass man sich über den Zweck derselben Rechenschaft zu geben im Stande war, wie oft ist die transformirte Gleichung weggeworfen worden, als complicirter, entweder in Bezug auf die Ordnungszahl der Gleichung, oder Gradzahl der Coefficienten, woraus man denn immer schloss, dass sie schwerer zu integriren sei, als die vorgelegte, ohne in der Regel hievon überzeugt zu sein. Wie oft ist man da dem Ziele nahe umgekehrt, das mit einem einzigen ferneren Schritte zu erreichen gewesen wäre. Wenn wir nun unsere Transformationslehre so einrichten würden, dass wir jedesmal sagten: wenn die Differentialgleichung diese Form hat, so wird man diese bestimmte Transformation machen, die dann, weil sie keine analytischen Schwierigkeiten biethet, dem Leser überlassen wird, so würden wir zwar eine sehr kurze, oder vielmehr gar keine Transformationslehre bringen, wir würden aber andererseits die Sache auch beim Alten lassen, d. h. bei der alten Dunkelheit, bei der der Rechner an die Analysis oft Fragen stellt, deren Bedeutung ihm entweder gar nicht, oder wenigstens nicht im ganzen Umfange klar geworden ist, und daher auch Antworten bekommt, die er entweder gar nicht, oder wenigstens nicht in ihrer ganzen Vollständigkeit auszulegen im Stande ist. Es ist daher auch unumgänglich nothwendig, dass wir bei jeder Umformung, die die Differentialgleichung erfährt, ihren Zweck unmittelbar angeben, und ihre Wirkung, insoferne wir sie bestimmen können, voraus verkünden; dass wir ferner mit der Leuchte der Formenlehre in der Hand alle analytischen Erscheinungen, die bei den durchgeführten Rechnungsentwicklungen auftauchen, einer sorgsamen Prüfung unterwerfen, und ihnen die entsprechenden Eigenschaften der Genüge leistenden Werthe gegenüberstellen: so wird es geschehen, dass jede Transformation die Gleichung durchsichtiger macht, indem sie stets mehr und mehr von den particulären Integralen enthüllt, bis endlich die wirkliche Integration selbst ihre Kenntniss vervollständigt.

Es hat mit der mathematischen Analysis eine eigene, in allen ihren Parthieen zur Genüge in die Augen fallende, und dennoch vielleicht nicht genug gewürdigte Bewandtniss. In Folge des Umstandes nämlich, dass wir, Gebrauch machend von der ihr eigenthümlichen Zeichensprache, gewisse Theile des Denkgeschäftes in Form von Rechen- oder Untersuchungsmethoden ihr übertragen haben, die in den gewöhnlichen logischen Formen durchzuführen unsere Kräfte schwer, oder gar nicht zugereicht haben würden, die sie aber so zu sagen mechanisch mit Leichtigkeit durchnimmt, gewinnt sie, obwohl selbst Erzeugniss

des menschlichen Geistes, gegenüber von demselben in gewisser Weise Individualität, setzt die begonnene Gedankenreihe fort, bringt die Schlussfolgerungen auf die passendste Form, berichtigt durch die mannigfachen Arten der in ihr liegenden Deductionen ad absurdum Irrthümer, und führt so mit dem mathematischen Forscher ein wahres Zwiegespräch. In Folge des Umstandes ferner, dass die mathematische Analysis, eben weil sie Erzeugniss des menschlichen Geistes ist, auch nichts geben kann, als was der menschliche Geist ursprünglich hineingelegt hat, während demselben, in analytischer Sprache gehörig ausgedrückt, meistentheils nur sehr wenig als Merkmal des Gesuchten ursprünglich hineinzulegen gelingt, was dann, je weniger es ist, auf desto mehr verschiedene Functionen passt: beantwortet sie die gestellten Fragen unpartheiisch, umfassend und vollständig in einem für unsere Geisteskräfte viel zu inhaltsvollen Lapidarstyle, der uns nur durch Zerlegung in einfache Bestandsatzungen verständlich wird. Diess begründet zwischen dem Forscher und dem grossen Werkzeuge, dessen er sich bedient, der Mathematik nämlich, ein ganz eigenthümliches Verhältniss. Die Wissenschaft entfaltet so zu sagen eine Neigung kurz und bündig alles auf einmal zu sagen, was sie weiss, alle an sie gestellten Fragen in der umfassendsten Weise beantwortend, und entschliesst sich zur Darlegung des Speciellen nur, wenn sie dazu gezwungen wird, der Rechner hingegen versteht das Allgemeine nicht und forscht nach dem Speciellen, er wünscht z. B. nur ein einziges particuläres Integral einer linearen Differentialgleichung kennen zu lernen; die Analysis hingegen spricht gerne von allen. Versteht es also der Rechner nicht, sich in der präcisen Zeichensprache der Wissenschaft deutlich auszudrücken, so gibt es zwischen ihr und ihm ein Missverständniss, das entweder mit einer Deductio ad absurdum oder nach langen Rechnungen mit der Angabe von etwas endigt, was man ohnehin schon gewusst hat. Wir wünschen nun, dass der Leser dieses Werk über die Integration der Differentialgleichungen überhaupt und die Transformationslehre insbesondere auffasse als Anleitung zu einem solchen Zweigespräche, auf dass ihm eine jede der Transformationsarten, die er hier kennen lernen wird, so zu sagen erscheine als Form der Conversation, die man passend gewählt hat, um Gelegenheit zu finden, der Analysis die speciellen Eigenschaften der gesuchten Functionen der Reihe nach abzufragen, und die allgemeinen Antworten, zu denen sie Neigung hat, und die für uns nicht belehrend sein würden, weil wir ihren Inhalt schon kennen, oder nicht verstehen, so viel als möglich zu vermeiden. Er wird hiedurch von selbst die Überzeugung gewinnen, dass es unumgänglich nothwendig sei, allen in der Rechnung vorkommenden Erscheinungen die gebührende Aufmerksamkeit zuzuwenden und besonders die Ausnahmsfälle sorgfältig zu berücksichtigen, die auf einem anderen Felde Nebensache wären, auf dem der Integration der Differentialgleichungen jedoch als Hauptsache hervortreten, weil sie eben so viele specielle Eigenschaften der gesuchten particulären Integrale kund geben.

---

§. 1.

Befreiung von einem Divisor, wie $(x-\alpha)^k$.

Es gibt wohl keine leichtere Aufgabe, als die: alle particulären Integrale einer gegebenen Differentialgleichung mit einem gegebenen Factor L zu multipliciren, d. h. aus ihr eine andere abzuleiten, deren sämmtliche Genüge leistenden Werthe aus jenen der ersteren durch Multiplication mit L hervorgehen. Stellt man nämlich das allgemeine Integral der Differentialgleichung:

$$X_n\, y^{(n)} + X_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + X_1\, y' + X_0\, y = 0 \tag{1}$$

hin unter der folgenden, wohlbekannten Form:

$$y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \ldots\ldots + C_n\, y_n, \tag{2}$$

so ist der angedeutete Zweck durch die Substitution:

$$Ly = z \quad \text{also} \quad y = \frac{z}{L} \tag{3}$$

offenbar erreicht, da man, wie alsogleich aus der Verbindung von (2) und (3) einzusehen,

$$z = C_1\, Ly_1 + C_2\, Ly_2 + \ldots\ldots + C_n\, Ly_n \tag{4}$$

hat. Genau auf dieselbe Weise ist es auch nicht schwer, sämmtliche particulären Integrale der hingestellten Differentialgleichung durch eine beliebige Function von x, die wir u nennen wollen, zu dividiren; es genügt nämlich hiezu die Einführung einer neuen Veränderlichen z vermittelst der Substitution:

$$\frac{y}{u} = z, \quad \text{also} \quad y = uz. \tag{5}$$

Die hiedurch gewonnene Gleichung in z ist die folgende:

$$\begin{aligned}
& z^{(n)} \Big[X_n u \Big] + \\
& + z^{(n-1)} \Big[n\, X_n u' + X_{n-1} u \Big] + \\
& + z^{(n-2)} \Big[\binom{n}{2} X_n u'' + \binom{n-1}{1} X_{n-1} u' + X_{n-2} u \Big] + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + z'' \Big[\binom{n}{n-2} X_n u^{(n-2)} + \binom{n-1}{n-3} X_{n-1} u^{(n-3)} + \binom{n-2}{n-4} X_{n-2} u^{(n-4)} + \ldots + X_2 u \Big] \\
& + z' \Big[n\, X_n u^{(n-1)} + (n-1)\, X_{n-1} u^{(n-2)} + (n-2)\, X_{n-2} u^{(n-3)} + \ldots + 2 X_2 u' + X_1 u \Big] \\
& + z \Big[X_n u^{(n)} + X_{n-1} u^{(n-1)} + X_{n-2} u^{(n-2)} + \ldots + X_2 u'' + X_1 u' + X_0 u \Big] = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Sie umfasst auch den Fall eines allen particulären Integralen hinzugefügten Factors L, der daraus hervorgeht, wenn man $u = \frac{1}{L}$ setzt, und der allgemeine, ihr Genüge leistende Werth von z ist offenbar:

Es liegt aber in der Natur der Sache, dass diejenigen Eigenschaften der Functionen u und L, die nach den Ergebnissen der Formenlehre den sichtbarsten Einfluss auf den Coefficientenbau der Differentialgleichung nehmen, namentlich ihr Verhalten für sehr grosse Werthe von x und für solche Endliche, durch die sie unendlich, oder Null, oder unstetig gemacht wird, in der Regel nicht ohne Einfluss auf die Gestalt der vorliegenden Gleichung in z sein werden, und dass diese Functionen in ihrer Eigenschaft als Factor oder Divisor sämmtlicher particulären Integrale die von diesen herrührenden Merkmale gelegentlich erdrücken werden, gerade so, als wenn z. B. nicht $\frac{y_1}{u}$, sondern $\frac{1}{u}$ schlechtweg der Genüge leistende Werth wäre. Mitunter wird es ferner geschehen, dass sie eben nur diese Merkmale wesentlich verändern, so zwar, dass z. B. die von $\frac{y_1}{u}$ herrührenden Kennzeichen weder die dem y_1, noch die dem $\frac{1}{u}$ entsprechenden sind. Endlich werden sie auch oft die in Rede stehenden Merkmale ganz und gar unverändert lassen. Durch schickliche Wahl nun des bisher noch ganz unbestimmt gelassenen Factors L, oder Divisors u lassen sich allerlei erspriessliche Verwandlungen der einzelnen particulären Integrale erzielen, die als Einleitung zu ihrer wirklichen Berechnung in vorgesteckter Form nicht bloss dienlich, sondern vielmehr in vielen Fällen unerlässlich sind. Einen dieser Fälle wollen wir in diesem Paragraphe zum Gegenstande unserer Betrachtungen machen, den nämlich, wo ein oder mehrere particuläre Integrale vorhanden sind, versehen mit einem Divisor, wie $(x-\alpha)^k$, der ihrer Entwicklung nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel bekanntlich hindernd entgegensteht, sohin ihre Auffindung in dieser Form ohne vorgängige Transformation nothwendiger Weise unmöglich machen muss. Die zu solchem Zwecke benöthigte Transformation ist aber offenbar schlechthin die Multiplication mit dem Factor $(x-\alpha)^k$. Nach den Ergebnissen der Formenlehre kommt nun ein solches particuläres Integral mit dem Nenner $(x-\alpha)^k$ dann vor, wenn der erste Gleichungscoefficient X_n einen einzigen Factor $x-\alpha$, der zweite aber keinen besitzt und, wenn zugleich

$$k = \left.\frac{X_{n-1}}{X'_n}\right\}_{\alpha} - n + 1$$

wird. Sollte es mehrere particuläre Integrale, etwa r an der Zahl geben, mit Nennern:

$$(x-\alpha)^{k_1}, \quad (x-\alpha)^{k_2}, \quad \ldots\ldots \quad (x-\alpha)^{k_r},$$

so würden die ersten Gleichungscoefficienten Factoren $x-\alpha$ der Reihe nach: r, $r-1$, ... 2, 1 biethen müssen, während zu gleicher Zeit die k_1, k_2, ... k_r, als die r Wurzeln einer algebraischen Gleichung des r^{ten} Grades erscheinen würden. Jedenfalls aber lässt sich bemerken, dass die Multiplication sämmtlicher particulären Integrale mit dem Factor $(x-\alpha)^k$, so lange k unbestimmt gelassen wird, allen eine unbestimmte Anzahl von Factoren $(x-\alpha)$ ertheilen, für schicklich gewählte Werthe von k, etwa k_1, k_2, ... oder k_r aber, wie später gezeigt werden soll, nur Eines derselben von jeder Spur von $x-\alpha$ frei machen werde, während die übrigen alle eine gewisse Anzahl solcher Factoren in der Regel entweder im Zähler oder im Nenner beibehalten. Hieraus folgt, dass, wenn

man in der Gleichung (6) in z die Function $u = (x - \alpha)^{-k}$ annimmt. ihre Coefficienten nothwendig der Reihe nach Factoren $x - \alpha$ bezüglich n, $n - 1$, ... 2, 1 an der Zahl ausweisen müssen, theilweise auch mehrere, nie aber weniger, so lange k unbestimmt gelassen wird; für specielle Werthe von k hingegen, nämlich k_1, k_2, ... k_r eine Veränderung Platz greifen werde, muthmasslich in der Theilbarkeit der ganzen Gleichung durch $x - \alpha$ bestehend, in Folge deren die genannten Factorenzahlen gewöhnlich in die um Eine Einheit geringeren, manchmal aber auch um mehr Einheiten kleineren übergehen werden, und diess ist auch wirklich so. denn die Gleichung in z ist für diesen besonderen Werth von u folgende:

$$
\begin{aligned}
&(x-\alpha)^n \,.\, z^{(n)} \,.\, X_n - \\
&- (x-\alpha)^{n-1} . z^{(n-1)} \Big[n \; k \; X_n - X_{n-1} (x-\alpha) \Big] + \\
&+ (x-\alpha)^{n-2} . z^{(n-2)} \Big[\binom{n}{2} k (k+1) X_n - (n-1) k X_{n-1} (x-\alpha) + X_{n-2} (x-\alpha)^2 \Big] - \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+(-1)^{n-2}(x-\alpha)^2 . z'' \Big[\binom{n}{2} k \ldots (k+n-3) X_n - \binom{n-1}{2} k \ldots (k+n-4) X_{n-1} (x-\alpha) + \ldots + (-1)^{n-2} X_2 (x-\alpha)^{n-2} \Big] \\
&+(-1)^{n-1}(x-\alpha) \; z' \Big[n \; k \ldots (k+n-2) X_n - (n-1) k \ldots (k+n-3) X_{n-1} (x-\alpha) + \ldots + (-1)^{n-1} X_1 (x-\alpha)^{n-1} \Big] + \\
&+(-1)^n \; z \Big[k \ldots (k+n-1) X_n - k(k+1) \ldots (k+n-2) X_{n-1} (x-\alpha) + k \ldots (k+n-3) X_{n-2} (x-\alpha)^2 + \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1} k \; X_1 (x-\alpha)^{n-1} + (-1)^n \; X_0 \; (x-\alpha)^n \Big] = 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Ihre Coefficienten weisen, wie man sieht, wirklich die obenerwähnte Anzahl von Factoren $x - \alpha$, nämlich n, $n - 1$, $n - 2$, ... 2, 1, 0 selbst in dem Falle aus, wenn die Coefficienten der vorgelegten Gleichung in y, nämlich X_n, X_{n-1}, ... X_{n-r} derselben bezüglich r, $r - 1$, ... 2, 1, 0 tragen, weil dann eine Theilbarkeit der Gleichung durch $(x - \alpha)^r$ ohne Mühe wahrzunehmen ist, nur wenn einer oder mehrere Anfangscoefficienten aus der Reihe der mit X bezeichneten eine grössere, als die in ihnen hier vorausgesetzte Anzahl von Factoren $x - \alpha$ trügen, was, wie wir wissen, auf besondere Formen der particulären Integrale hindeutet, so wäre dasselbe, wie natürlich, auch bei der transformirten Gleichung (9) der Fall. Diess alles findet Statt für noch unbestimmt gelassene Werthe von k.

Die transformirte Gleichung wird aber alsogleich durch $x - \alpha$ theilbar, so bald es ihr letzter Coefficient wird: der aber kann es werden: Erstens: wenn

$$k\,(k + 1)\,(k + 2) \,\ldots\ldots\, (k + n - 1) = 0$$

angenommen wird, wenn man also k aus der folgenden Reihe negativer Zahlen wählt:

$$0, \quad -1, \quad -2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad -n + 1.$$

Zweitens: wenn X_n mindestens einen Factor $x - \alpha$ hat, d. h. wenn die Gleichung in y mindestens ein particuläres Integral von der Form $\dfrac{Q}{(x - \alpha)^k}$ besitzt; allein die verrichtete Division durch $x - \alpha$ hat

eben erst n, $n-1$, ... 2, 1, 0 solche Factoren in den successiven Coefficienten zur Folge, und eine weitere Division durch $x-\alpha$ und mit ihr verbundene Herabsetzung dieser Factorenzahlen auf $n-1$, $n-2$, ... 1, 0, 0, mit welcher wieder die Befreiung eines einzigen Integrales von jeder Spur von $x-\alpha$ verknüpft ist, findet nur dann Statt, wenn der zweitheilige nach x ganze Ausdruck:

$$k(k+1)\ldots\ldots(k+n-1)\frac{X_n}{x-\alpha}-k(k+1)\ldots\ldots(k+n-2)X_{n-1}$$

identisch Null, oder noch mit wenigstens Einem Factor $x-\alpha$ d. h. mit der Eigenschaft behaftet ist, für $x=\alpha$ zu verschwinden. Diess geschieht nur für besondere Werthe von k, namentlich für:

$$k=0,\quad -1,\quad -2,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots,\quad -n+2 \tag{10}$$

und überdiess noch für:

$$k=\frac{X_{n-1}}{X_n}(x-\alpha)\Big\}_\alpha-n+1=\frac{X_{n-1}}{X'_n}\Big\}_\alpha-n+1,$$

ein Werth, der mit dem (8) übereinstimmt.

Drittens: wenn die zwei ersten Gleichungscoefficienten X_n und X_{n-1} bezüglich zwei und einen Factor $x-\alpha$ tragen. Diess ermöglicht nämlich unmittelbar eine Division durch $(x-\alpha)^2$, nach welcher in den Coefficienten n, $n-1$, $n-2$, ... 2, 1, 0 solche Factoren übrig bleiben, und nur, wenn entweder allgemein, oder wenigstens für $x=\alpha$ der dreitheilige Ausdruck:

$$k(k+1)\ldots(k+n-1)\frac{X_n}{(x-\alpha)^2}-k(k+1)\ldots(k+n-2)\frac{X_{n-1}}{x-\alpha}+k(k+1)\ldots(k+n-3)X_{n-2}=0$$

wird, geht die obere Zahlenreihe über in: $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... 2, 1, 0, 0. Diess geschieht nun, wenn man entweder den Exponenten k der Reihe negativer ganzer Zahlen:

$$0,\quad -1,\quad -2,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots,\quad -n+3$$

entnimmt, oder ihn eine der beiden Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades:

$$\Big\{(k+n-2)(k+n-1)\frac{X_n}{(x-\alpha)^2}-(k+n-2)\frac{X_{n-1}}{x-\alpha}+X_{n-2}\Big\}_\alpha=0 \tag{11}$$

sein lässt.

Endlich allgemein: wenn die Anfangscoefficienten X_n, X_{n-1}, ... X_{n-r}, bezüglich nicht weniger als r, $r-1$, ... 2, 1, 0 Factoren $x-\alpha$ bergen, während wenigstens der erste deren so viele wirklich enthält, was im Allgemeinen auf r particuläre Integrale, wie $\frac{Q}{(x-\alpha)^k}$ hindeutet. Dann erscheint die transformirte Gleichung zunächst durch $(x-\alpha)^r$ theilbar, und biethet nach geschehener Division in den aufeinander folgenden Coefficienten bezüglich n, $n-1$, ... 2, 1, 0 solche Factoren, eine Zahlenreihe, welche abermals nur auf $n-1$, $n-2$, ... 2, 1, 0, 0 herabgebracht werden kann, wenn das Polynom:

$$k(k+1)..(k+n-1)\frac{X_n}{(x-\alpha)^r}-k(k+1)..(k+n-2)\frac{X_{n-1}}{(x-\alpha)^{r-1}}+..+(-1)^r k(k+1)..(k+n-r-1)X_{n-r}=0$$

wird, was entweder für negative ganze Werthe von k stattfindet, entnommen der natürlichen Zahlenreihe:

$$0,\quad -1,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad -n+r+1,$$

oder für solche, die der folgenden algebraischen Gleichung des r^{ten} Grades als Wurzeln angehören:

$$(k+n-r)\ldots(k+n-1)\frac{X_n}{(x-\alpha)^r} - (k+n-r)\ldots(k+n-\ldots \quad (x-\ldots$$

Diess heisst nun in der Sprache der Formenlehre: *a.* Wenn man sämmtliche particulären Integ... Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung mit demselben Factor $(x-\alpha)^k$ multiplicirt und k unbestimmt lässt, so kömmt ihnen gelegentlich, d. h. für gewisse k, allen die Eigenschaft zu, für $x=\alpha$ unendlich zu werden, und daher rühren die n, $n-1$, ... 2, 1, 0 Factoren der auf einander folgenden Coefficienten. *b.* Wenn durch solch eine Multiplication auch nur Eines der particulären Integrale von $x-\alpha$ befreit werden soll, so kann diess unter anderen dann geschehen, wenn die vorgelegte Gleichung mindestens Ein particuläres Integral von der Form $\frac{Q}{(x-\alpha)^k}$ besitzt, und zwar eben durch Multiplication aller mit $(x-\alpha)^k$, in Folge deren alle übrigen, $n-1$ an der Zahl, in den Fall kommen können, für $x=\alpha$ unendlich oder unstetig zu werden, daher die $n-1$, $n-2$, ... 2, 1, 0, 0 Factoren $x-\alpha$ der Coefficienten der transformirten Gleichung. Diese Andeutungen sind für sich klar, und waren nicht anders zu erwarten. Es fragt sich nur noch, was die Analysis mit den in der Formel (10) enthaltenen negativen und ganzen Werthen von k wolle. Was $k=0$ bedeute, liegt am Tage, da es die transformirte mit der gegebenen Gleichung zusammenfallen macht. Was sagen aber die negativen k? Offenbar nur, dass, wenn man sämmtliche particulären Integrale durch irgend eine der folgenden Potenzen von $x-\alpha$

$$x-\alpha, \qquad (x-\alpha)^2, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (x-\alpha)^{n-2}$$

wegdividirt, jedesmal Eines von ihnen von allen $x-\alpha$ befreit wird, die übrigen $n-1$ aber nicht, was wieder nur dann angeht, wenn $n-2$ particuläre Integrale der Gleichung beziehlich die hier angeführten Potenzen von $x-\alpha$ als Factoren besitzen. Das auf den ersten Anblick etwas Räthselhafte dieses analytischen Ergebnisses verliert sich alsogleich, wenn man bedenkt, dass die particulären Integrale einer linearen Differentialgleichung je mit beliebigen Constanten multiplicirt und addirt abermals Genüge leistende Werthe geben; denn nehmen wir an: es sei $y_n = \frac{Q}{(x-\alpha)^k}$ das einzige für $x=\alpha$ dem Unendlichwerden ausgesetzte particuläre Integral, dem der einzelne Factor $x-\alpha$ in X_n entspricht; so sind die übrigen, als diesem Übelstande nicht ausgesetzt, mittelst der Mac-Laurin'schen Formel nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ in Reihen entwickelbar; man hat also:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots\ldots\ldots + C_{n-1} y_{n-1} =$$

$$\begin{aligned}
(12)\qquad = \; & C_1 y_1 + C_1 y'_1 .(x-\alpha) + \ldots + C_1 y_1^{(n-2)}.\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{1\ldots(n-2)} + C_1 y_1^{(n+1)}.\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \\
& + C_2 y_2 + C_2 y'_2 .(x-\alpha) + \ldots + C_2 y_2^{(n-2)}.\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{1\ldots(n-2)} + C_2 y_2^{(n+1)}.\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \\
& + C_3 y_3 + C_3 y'_3 .(x-\alpha) + \ldots + C_3 y_3^{(n-2)}.\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{1\ldots(n-2)} + C_3 y_3^{(n+1)}.\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + C_{n-1} y_{n-1} + C_{n-1} y'_{n-1} (x-\alpha) + \ldots + C_{n-1} y_{n-1}^{(n-2)}.\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{1\ldots(n-2)} + C_{n-1} y_{n-1}^{(n+1)}.\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}
\end{aligned}$$

eine Gleichung, in der sämmtliche Reihencoefficienten des zweiten Theiles endlich sind. Statuirt man hier die Glieder spaltenweise addirend:

$$\begin{aligned}
B_1 &= C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + C_3\, y_3 + \ldots\ldots + C_{n-1}\, y_{n-1}\\
B_2 &= C_1\, y'_1 + C_2\, y'_2 + C_3\, y'_3 + \ldots\ldots + C_{n-1}\, y'_{n-1}\\
2B_3 &= C_1\, y''_1 + C_2\, y''_2 + C_3\, y''_3 + \ldots\ldots + C_{n-1}\, y''_{n-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
1\ldots(n-2)\, B_{n-1} &= C_1\, y_1^{(n-2)} + C_2\, y_2^{(n-2)} + C_3\, y_3^{(n-2)} + \ldots\ldots + C_{n-1}\, y_{n-1}^{(n-2)},
\end{aligned}$$

so sind die $B_1, B_2, B_3, \ldots B_{n-1}$ als Functionen der $n-1$ willkührlichen Constanten $C_1, C_2, C_3, \ldots C_{n-1}$ ebenfalls, in der Regel wenigstens, sämmtlich willkührliche Constanten, und gleichwie die Ersten als lineare Functionen der Anderen erscheinen, so sind auch die Anderen lineare Functionen der Ersteren. somit ist auch der Coefficient einer jeden der auf die $(n-2)^{\text{te}}$ folgenden Potenzen von $x-\alpha$, etwa der $(n+r-1)^{\text{sten}}$, der durch die folgende Gleichung gegeben ist:

$$1\ldots(n+r-1)\, B_{n+r} = C_1\, y_1^{(n+r-1)} + C_2\, y_2^{(n+r-1)} + C_3\, y_3^{(n+r-1)} + \ldots\ldots + C_{n-1}\, y_{n-1}^{(n+r-1)},$$

eine lineare Function der $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$, etwa die folgende:

$$B_{n+r} = (r,1)\, B_1 + (r,2)\, B_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (r,n-1)\, B_{n-1}, \tag{13}$$

allwo im Allgemeinen (r,s) einen bestimmten endlichen Coefficienten andeutet. Wir machen hier von dieser Bezeichnungsweise Gebrauch, um alsogleich durch die erste der eingeklammerten Zahlen, durch r nämlich, anzudeuten, dass derselbe in dem Ausdrucke für B_{n+r} vorkomme, durch die zweite aber, s nämlich, dass er zu B_s gehörig sei. Man wird nun dem Gesagten gemäss den zweiten Theil der Gleichung (12) nach den $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ geordnet hinstellen können, und erhalten:

$$\begin{aligned}
&C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + C_3\, y_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{n-1}\, y_{n-1} =\\
&= B_1 \left[1 + (0,1)\ (x-\alpha)^{n-1} + (1,1)\ (x-\alpha)^{n} + \ldots\ldots\right] +\\
&+ B_2 \left[1 + (0,2)\ (x-\alpha)^{n-2} + (1,2)\ (x-\alpha)^{n-1} + \ldots\ldots\right] (x-\alpha) +\\
&+ B_3 \left[1 + (0,3)\ (x-\alpha)^{n-3} + (1,3)\ (x-\alpha)^{n-2} + \ldots\ldots\right] (x-\alpha)^2 +\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ B_{n-1} \left[1 + (0,n-1)(x-\alpha) + (1,n-1)(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots\right] (x-\alpha)^{n-2} =\\
&= B_1\, \eta_1 + B_2\, \eta_2\, (x-\alpha) + B_3\, \eta_3\, (x-\alpha)^2 + \ldots\ldots + B_{n-1}\, \eta_{n-1}\, (x-\alpha)^{n-2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Diese Form belehrt uns nun, dass die $n-1$ particulären Integrale, die der Entwicklung in Reihen nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ nach der Mac-Laurin'schen Formel nicht widerstreben, durch passende Gruppirung, d. h. Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition jedesmal in $n-1$ andere Theile zerlegt werden können, die beziehlich der 0ten, 1sten, $2^{\text{ten}} \ldots (n-2)^{\text{ten}}$ Potenz von $x-\alpha$ proportional sind, und deren jeder für sich den Zusatz eines willkührlichen constanten Factors verträgt,

somit die Rolle eines particulären Integrales spielt, und hiemit hätte denn das Vorkommen der negativen und ganzen Werthe von k seine Erklärung gefunden, die Analysis aber, wie allenthalben, so auch hier, abermals ihre Eigenschaft beurkundet, die an sie gestellten Fragen in der umfassendsten Weise zu beantworten. Man fragt nämlich: welche Potenzen mit beliebigen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Exponenten von $x - \alpha$ lassen sich aus den particulären Integralen der Differentialgleichung als Factoren absondern, und die Antwort bezieht sich nicht auf irgend eine bestimmte Form des Integrales, z. B. auf die assymptotische, die der Fragende vielleicht gemeint haben mochte, sondern lautet ganz allgemein von jeder Form wie folgt: man kann die Genüge leistenden Werthe durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition so gruppiren, dass neue ebenfalls genügende Werthe hervorgehen, die bezüglich der 0ten, 1sten, 2ten, ... $(n-2)^{\text{ten}}$ Potenz von $x-\alpha$ proportional sind, und man ist gewiss, alles auf einmal erfahren zu haben, und dass keine Gruppe möglich sei, aus der sich eine andere Potenz von $x-\alpha$ als Factor sondern lässt. Hiemit erklären sich aber auch alle übrigen, für verschiedene k in der (9) wahrnehmbaren Erscheinungen: namentlich findet für $k=-1$ eine Theilbarkeit dieser Gleichung durch $(x-\alpha)^{n-1}$ Statt, und es bleiben nach durchgeführter Division in ihren Coefficienten bezüglich 2, 1, 0 Factoren $x-\alpha$ übrig, d. h. in der Sprache der Formenlehre: die Division durch $x-\alpha$ sämmtlicher particulären Integrale der vorgelegten Gleichung in y macht, dass zwei derselben in den Ausnahmszustand gerathen, in welchem sie mit der Mac-Laurin'schen Formel nicht behandelt werden können. Diess ist aber auch ganz richtig, und es sind diese beiden: $B_1 y_1$ und $\frac{Q}{(x-\alpha)^k}$. Für $k=-2$ wird die (9) durch $(x-\alpha)^{n-2}$ theilbar, und es bleiben in ihren Coefficienten 3, 2, 1, 0 Factoren $x-\alpha$ übrig, d. h.: die Division durch $(x-\alpha)^2$ versetzt drei der particulären Integrale in den erwähnten Ausnahmszustand, und es sind diese drei offenbar: $B_1 y_1$, $B_2 y_2 (x-\alpha)$ und $\frac{Q}{(x-\alpha)^k}$ u. s. w. Wir ziehen endlich aus dem Gesagten noch den Schluss, dass man das allgemeine Integral einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung, die im ersten Coefficienten X_n einen Factor $x-\alpha$ hat, vorauszusetzen berechtiget sei in der Form:

$$y = B_1 \eta_1 + B_2 \eta_2 (x-\alpha) + B_3 \eta_3 (x-\alpha)^2 + \dots + B_{n-1} \eta_{n-1} (x-\alpha)^{n-2} + \frac{CQ}{(x-\alpha)^k}, \tag{15}$$

allwo k den durch die (8) gegebenen Werth besitzt.

Hätte der erste Coefficient X_n der Differentialgleichung gar kein $x-\alpha$, so würde anstatt dieser Form die folgende ähnliche treten:

$$y = B_1 \eta_1 + B_2 \eta_2 (x-\alpha) + B_3 \eta_3 (x-\alpha)^2 + \dots + B_n \eta_n (x-\alpha)^{n-1}, \tag{16}$$

was übrigens gar nichts weiter besagt, als dass beliebige Functionen n an der Zahl, die für den speciellen Werth $x=\alpha$ sämmtlich gar keine besondere Erscheinung darbiethen, durch Multiplication mit gewissen Constanten und Addition so gruppirt zu werden vermögen, dass die erhaltenen Gruppen bezüglich die Sonderung der Factoren 1, $x-\alpha$, $(x-\alpha)^2$, ... $(x-\alpha)^{n-1}$ gestatten, was wohl vollkommen richtig ist, aber in Bezug auf die Integration der Gleichung wenig lehrt. Der Beweis hievon lässt sich ebenso führen, wie für das Stattfinden der Form (15) unter den alldort angedeuteten Umständen. Wiewohl man aber dieses Integral schwerlich je in einer solchen Form suchen wird, so schliessen sich doch daran einige

nicht unwichtige, zum genauen Verständnisse der Andeutungen, die die Analysis darbringt, dienende Bemerkungen. In der That man nehme an, es werde in die Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung, die, wie wir bis jetzt vorausgesetzt, gar keinen Factor $x-\alpha$ im ersten Coefficienten X_n besitzt, ein neues $(n+1)^{stes}$ particuläres Integral eingeführt, das ebenfalls von jeder Spur von $x-\alpha$ frei ist, etwa $B_0\eta_0$, so könnte man vielleicht meinen, dass die Analysis nunmehr auf ein allgemeines Integral, das wir mit u bezeichnen wollen, durch ihre Angaben hinweisen werde, und das die folgende Form trägt:

$$u = B_0\eta_0 + B_1\eta_1 + B_2\eta_2(x-\alpha) + B_3\eta_3(x-\alpha)^2 + \ldots + B_n\eta_n(x-\alpha)^{n-1},$$

mit zweien von $x-\alpha$ freien Bestandtheilen: sie thut diess aber nicht, denn, indem sie, wie leicht einzusehen, zur Bestimmung von k die folgende Gleichung liefert:

$$k\ (k+1)\ (k+2)\ \ldots\ldots\ldots\ (k+n) = 0,$$

gibt sie der folgenden Form, deren Richtigkeit auch Niemand bezweifeln wird:

$$u = B_1\eta_1 + B_2\eta_2(x-\alpha) + \ldots\ldots\ldots + B_{n+1}\eta_{n+1}(x-\alpha)^n$$

den Vorzug, gewissermassen die Angabe gleicher Werthe für k aus dem Grunde vermeidend, weil sie dadurch zur Ausserachtlassung des einen, der n^{ten} Potenz von $x-\alpha$ proportionalen, und gleiche Rechte mit den übrigen besitzenden particulären Integrales gezwungen würde. Man kann sich die Sache so vorstellen: die Analysis nimmt, um ihrer Allgemeinheit in den Angaben treu zu bleiben, die beiden particulären Integrale $B_0\eta_0$ und $B_1\eta_1$ in Reihenform vor, und zerlegt ihre Summe in zwei ebenfalls je für sich Genüge leistende Bestandtheile, die bezüglich der 0ten und 1sten Potenz von $x-\alpha$ proportional sind; den letzten von diesen verbindet sie mit dem $B_2\eta_2(x-\alpha)$ zu zwei neuen, der ersten und zweiten Potenz von $x-\alpha$ proportionalen particulären Werthen u. s. w., bis endlich $B_n\eta_n(x-\alpha)^{n-1}$ an die Reihe kommt, welches mit dem früher gewonnenen Integrale dieser Art zu zwei neuen der $(n-1)^{sten}$ und n^{ten} Potenz proportionalen Ausdrücken zusammengefügt wird. Ähnliches würde nun offenbar auch dann geschehen, wenn das neu eingeführte particuläre Integral nicht der 0ten, sondern irgend einer andern r^{ten} Potenz von $x-\alpha$ proportional gewählt worden wäre, unter r einen Werth verstanden, der sich in der Reihe der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots n$ bereits vorfindet.

Einer eigenthümlichen, zum Verständnisse der analytischen Sprache in gleicher Weise dienlichen Erscheinung begegnen wir in der allgemeinen transformirten Gleichung (9), das k durch eine ganze positive Zahl, etwa die Einheit, ersetzend, was einer Multiplikation sämmtlicher particulären Integrale mit dem Factor $x-\alpha$ gleichgeltend ist, also in dem Falle, wo X_n gar kein $x-\alpha$ in sich enthält, wo sohin die Form (16) dem allgemeinen Integrale zukommt, ein:

$$z = B_1\eta_1(x-\alpha) + B_2\eta_2(x-\alpha)^2 + B_3\eta_3(x-\alpha)^3 + \ldots + B_n\eta_n(x-\alpha)^n,$$

ergibt, eigenthümlich insoferne, als wir einerseits aus den Ergebnissen der Formenlehre wissen, dass die Einführung eines neuen particulären Integrales von der Form $B\eta(x-\alpha)^r$, unter r eine ganze positive, den Ordnungsexponenten der Gleichung nicht überschreitende Zahl verstanden, dem ersten Coefficienten in der Regel gar keinen Factor $x-\alpha$ zutheile, dass sohin die Analysis von den in der Formel (17)

enthaltenen particulären Integralen eigentlich nur das letzte mit dem Factor $(x-\alpha)^n$ versehene, durch einen einzigen Factor $(x-\alpha)$ des ersten Coefficienten zu kennzeichnen verpflichtet scheine, andererseits aber die transformirte Gleichung in z für $k=1$ in den successiven Coefficienten der Reihe nach solcher Factoren n, $n-1$, $n-2$, ... 2, 1, 0 ausweise, auch die übrigen particulären Integrale in gleicher Weise, wie das letzte derselben, je durch einen in die ersten Coefficienten geworfenen Factor $x-\alpha$ kundgebend. Ähnliches findet auch für $k=2, 3, \ldots$ Statt, und man gewahrt die Ursache dieser abnormen Erscheinung in dem Umstande, dass die Gleichung (10) in einem solchen Falle die gesammten Werthe von k zu liefern ungeeignet ist: wäre nämlich im ersten Coefficienten der Gleichung in z, dem particulären Integrale $B_n \eta_n (x-\alpha)^n$ entsprechend, nur ein einziger Factor $x-\alpha$ vorhanden, so könnte diesem allerdings ein $k=-n$ angehören, allein die übrigen Werthe von k wären dann nothwendigerweise der Form der Gleichung (10) nach: $0, -1, -2, \ldots\ldots -n+2$ und nicht, wie es im gegenwärtigen Falle sein sollte, $-1, -2, \ldots\ldots -n+1$, und durch die Unbiegsamkeit so zu sagen der in Rede stehenden Formel findet sich die Analysis genöthigt, ausnahmsweise auch Potenzen mit ganzen und positiven, die Ordnungszahl der Gleichung nicht überschreitenden Exponenten als Factoren der particulären Integrale anzudeuten. Es ist nun natürlich, dass, wenn dieser Zwang aus irgend einer Ursache aufhört, auch seine Wirkung verschwinden werde, also ein Herausfallen derjenigen Factoren $x-\alpha$ gelegentlich Statt finden müsse, denen solche negative k angehören, daher sich z. B. folgende Erscheinungen voraus verkünden lassen: Wenn man in die für $k=1$ gedachte Gleichung in z ein neues particuläres Integral einführt, welches für $x=\alpha$ in keinerlei Ausnahmszustand geräth, so muss aus den Gleichungscoefficienten unmittelbar jede Spur des Factors $x-\alpha$ verschwinden, also eine allgemeine Theilbarkeit durch $(x-\alpha)^n$ wahrzunehmen sein; da nun dieses neu eingeführte particuläre Integral ein ganz beliebiges, also auch annoch ganz unbestimmt gelassenes sein kann, so findet diese Theilbarkeit auch allgemein, sohin auch für solche particuläre Integrale Statt, die mit dem Factor oder Divisor $x-\alpha$ versehen sind. Ertheilt man dem neu eingeführten particulären Integrale die Gestalt $B\eta(x-\alpha)^h$, unter h eine von Null verschiedene Zahl verstanden, so kann uns die Analysis, ihrer in Rede stehenden Eigenschaft wegen, keine andern Werthe von k liefern, als die folgenden:

$$k=-1, \quad -2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad -n, \quad -h,$$

was sie wieder nicht anders thun kann, als dadurch, dass sie in die Gleichungscoefficienten der Reihe nach $n+1$, n, ... 2, 1, 0 Factoren $x-\alpha$ wirft. Diese müssen also in dem Augenblicke erscheinen, sobald man das neu eingeführte, anfangs noch unbestimmt gelassene particuläre Integral von der obigen Form voraussetzt.

So sonderbar diess klingt, ist es doch vollkommen richtig, und lässt sich, wenn man die Rechnungsentwicklungen nicht scheut, auch allgemein darthun. Wir begnügen uns aber damit, es für den speciellen Fall einer Gleichung der zweiten Ordnung in z, nämlich der:

$$z''.(x-\alpha)^2 X_2 - z'.(x-\alpha)\left[2X_2 - X_1(x-\alpha)\right] + z\left[2X_2 - X_1(x-\alpha) + X_0(x-\alpha)^2\right] = 0 \tag{18}$$

nachzuweisen, weil diess hinreicht zu zeigen, in welcher Weise die gemachten Voraussagungen zu-

und demgemäss die bereits durch $(x-\alpha)^2$ getheilte Gleichung (19) auf folgende Weise geschrieben werden kann:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{z}''' P_1 X_2 + \mathfrak{z}'' \left[P_1 X'_2 + P_1 X_1 - P'_1 X_2\right] + \\
&+ \mathfrak{z}' \left[\begin{array}{l} P_1 X'_1 + P_1 X_0 - P'_1 X_1 + 2z_3 X_1 X'_2 - 2z_3 X'_1 X_2 + 4z_3 X_0 X_2 - z_3 X'^2_1 + \\ + (x-\alpha) \left[2z'''_3 X^2_2 + 3z''_3 X_1 X_2 - 2z'_3 X_1 X'_2 + z'_3 X_1 + 2z'_3 X'_1 X_2 + 2z'_3 X_0 X_2 - 2z_3 X_0 X'_2 + \right. \\ \qquad\qquad \left. + 2z_3 X'_0 X_2 + z_3 X_0 X_1\right] \end{array}\right] + \\
(20)\quad &+ \mathfrak{z} \left[\begin{array}{l} P_1 X'_0 - P'_1 X_0 - 2z'''_3 X^2 - 3z''_3 X_1 X_2 - 6z'_3 X_0 X_2 + 2z_3 X_0 X'_2 - 2z_3 X'_0 X_2 - z_3 X_0 X_1 + \\ + (x-\alpha)\left[z'''_3 X_1 X_2 + z''_3 X_1 X'_2 - z''_3 X'_1 X_2 + 2z''_3 X_0 X_2 + z''_3 X^2_1 + 3z'_3 X_0 X_1 - z_3 X_0 X'_1 + \right. \\ \qquad\qquad \left. + 2z_3 X_0 + z_3 X'_0 X_1\right] \end{array}\right] = 0.
\end{aligned}
$$

die also offenbar, so wie verkündet worden, gar keinen Factor $x-\alpha$ im ersten Coefficienten birgt, so lange X_2 keinen solchen enthält, nachdem dann auch P_1, wie der Anblick seines Werthes lehrt, keinen solchen enthalten kann. Nun bleibt uns noch übrig zu zeigen, dass im Augenblicke, als wir uns z_3 entweder der ersten, oder irgend einer andern, etwa der h^{ten} Potenz von $x-\alpha$ proportional vorstellen, in die Coefficienten unserer letzten Gleichung der Reihe nach 3, 2, 1, 0 solche Factoren fallen. Zu diesem Behufe statuiren wir zuvörderst:

$$z_3 = (x-\alpha)\, \mathfrak{Z},$$

und gewahren sofort, dass sich P_1 zu einem der dritten Potenz von $x-\alpha$ proportionalen Ausdruck gestalte, nämlich:

$$P_1 = (x-\alpha)^3 \left[\mathfrak{Z}''\, X_2 + \mathfrak{Z}'\, X_1 + \mathfrak{Z}\, X_0\right],$$

es sei denn, dass das eingeklammerte Trinom selbst eine gewisse Anzahl, etwa s Factoren $x-\alpha$ besässe, in welchem Falle P_1 den Factor $(x-\alpha)^{s+3}$ erhalten würde. P'_1 aber wird in der Regel zwei, unter der letztgemachten Voraussetzung aber $s+2$ solche Factoren besitzen. Diess vorausgesetzt führen wir in die (20) anstatt z_3 seinen Werth ein, bezeichnen das oberwähnte Trinom mit R, so dass:

$$P_1 = (x-\alpha)^3\, R, \qquad P'_1 = (x-\alpha)^3\, R' + 3\,(x-\alpha)^2\, R$$

wird, und sehen so die in Rede stehende Gleichung in folgende andere übergehen:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{z}'''.\,(x-\alpha)^3\, RX_2 + \mathfrak{z}''.\,(x-\alpha)^2 \left[(x-\alpha)\,(RX'_2 + RX_1 - R'X_2) - 3RX_2\right] + \\
&+ \mathfrak{z}'.(x-\alpha)\left[(x-\alpha)^2 (RX'_1 + RX_0 - R'X_1) + (x-\alpha)\,(-2RX'_2 - 2RX_1 + 2R'X_2) + 6RX_2\right] + \\
&+ \mathfrak{z}.\left[(x-\alpha)^3 (RX'_0 - R'X_0) + (x-\alpha)^2 (-RX'_1 - RX_0 + R'X_1) + (x-\alpha)\,(2RX'_2 + 2RX_1 - 2R'X_2)\right. \\
&\qquad \left. - 6RX_2\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Hat nun R gar keinen Factor $x-\alpha$, so enthalten, wie man sieht, die Coefficienten bezüglich 3, 2, 1, 0 solche Factoren; wäre hingegen R dem $(x-\alpha)^s$ proportional, so gewahrt man in eben diesem Coeffi-

dass sie die Angabe particulärer Integrale, die derselben Potenz von $x-\alpha$ proportional sind, und die offenbar immer existiren, gleichsam als sich von selbst verstehend unterlassen werde, um nicht zur Ausserachtlassung eines möglichen Werthes von k gezwungen zu werden, z. B. bei einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung, in welcher die zwei vorhandenen, in irgend einer Form gedachten particulären Integrale beide für $x=\alpha$ endlich und stetig bleiben können, wird man nicht zwei gleiche Werthe $k=0$ erwarten, indem hiemit ein ebenfalls vorhandenes und Genüge leistendes particuläres Integral, welches der ersten Potenz von $x-\alpha$ proportional ist, und welches man durch Entwicklung der beiden eben erwähnten in Reihen, Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition immer erhalten zu können vermeinen möchte, gänzlich ausser Acht bliebe. Eben so lässt sich eine Differentialgleichung der dritten Ordnung denken, deren drei Genüge leistende Werthe von jeder Spur von $x-\alpha$ frei sind. In einer solchen wird man, dieser Unabhängigkeit entsprechend, doch nicht auf drei gleiche $k=0$ rechnen, nicht etwa, weil diess unrichtig wäre, — es versteht sich vielmehr meistentheils von selbst, dass, wenn auch nur ein solcher da ist, deren drei ebenfalls vorhanden sein müssen —; sondern, weil hiemit zwei andere, beziehlich der zweiten und ersten Potenz von $x-\alpha$ proportionale particuläre Integrale, die man aus den dreien in Rede stehenden durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition dem Anscheine nach jedesmal erhalten sollte, ausser Acht blieben. Man erwartet also hier die Werthe $k=0,\ -1,\ -2$ aus der Rechnung und überhaupt die Thatsache, dass k keiner gleichen Werthe fähig sei, als Resultat der gegenwärtigen Untersuchung.

Hiemit scheint nun die unter (15) angeführte Form des allgemeinen Integrales für den Fall, dass X_n mit einem einzigen Factor $x-\alpha$ versehen ist, gelegentlich im Widerspruch zu stehen, denn es kann ja doch offenbar geschehen, dass das alldort vorhandene k, so wie es aus der Gleichung (8) gezogen ist, einen der Werthe $0,\ -1,\ -2,\ \ldots\ -n+2$ bekommt, und dann sind ja offenbar zwei derselben Potenz von $x-\alpha$ proportionale particuläre Integrale vorhanden, welche sich durch Entwicklung in Reihen, so wie wir kurz vorher andeuteten, zerlegen lassen sollten in zwei neue Genüge leistende Werthe, die proportional sind der $(-k)^{\text{ten}}$ und $(-k+1)^{\text{sten}}$ Potenz von $x-\alpha$. Letzterer von ihnen würde mit dem nächstfolgenden particulären Integrale wieder zwei neue Genüge leistende Werthe geben, die der $(-k+1)^{\text{sten}}$ und $(-k+2)^{\text{ten}}$ Potenz von $x-\alpha$ proportional wären u. s. w., bis man endlich auf ein particuläres Integral käme mit dem Factor $(x-\alpha)^{n-1}$, von dem die Analysis nicht spricht, das folglich auch sicher nicht vorhanden ist: allein es müsste vorhanden sein, wenn die eben erwähnten, auf Reihenentwicklung beruhenden Zusammensetzungen der particulären Integrale ausführbar wären. Es bleibt also nichts übrig, als anzunehmen, dass unter solchen Umständen irgend eines der solchergestalt in die Rechnung eingehenden, beziehlich der $(-k)^{\text{ten}}$, $(-k+1)^{\text{sten}}$ $\ldots$ $(n-2)^{\text{ten}}$ Potenz von $x-\alpha$ proportionalen particulären Integrale und zwar namentlich eines der beiden in der Form $\frac{CQ}{(x-\alpha)^k}$ erscheinenden, trotzdem, dass k eine negative ganze Zahl ist, vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel, und nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ keine Reihenentwicklung zulasse. Wir sagen: irgend eines, weil sonst auch ein Genüge leistender Werth mit dem Factor $(x-\alpha)^{n-1}$ vorhanden sein müsste, den die Analysis nicht angibt, der folglich auch nicht existirt. Wir sagen: namentlich eines der in der

Form: $\frac{CQ}{(x-\alpha)^k}$ vorkommenden, weil, wenn es ein späteres wäre, etwa das mit dem Multiplicator $(x-\alpha)^{-k+r}$ versehene, dann nicht zwei gleiche Wurzeln $-k$, sondern vielmehr zwei gleiche $-k+r$ erschienen wären. Um vorderhand die Möglichkeit, dass sich ein particuläres Integral in dieser Weise der Herrschaft der Mac-Laurin'schen Formel entziehen könne, anzudeuten, bemerken wir, dass diess z. B. dann der Fall sei, wenn Q die Transcendente $log\,(x-\alpha)$ enthält, was allerdings, wie im §. 22 der Formenlehre gezeigt wurde, sehr gut möglich ist, wenn dieser Logarithmus als das Resultat einer Integration da steht. Wir werden im folgenden Abschnitte bei der Integration in Reihenform über die Art des Vorkommens solcher Transcendenten nähere Aufschlüsse erhalten.

Eine fernere Bemerkung, die sich an diese Betrachtungen anschliesst, ist folgende: Wir sahen eben, dass die Anfangscoefficienten der Differentialgleichung durch blosse Transformation, respective Multiplication der particulären Integrale mit einem oder mit mehreren Factoren $x-\alpha$ ohne Erhöhung der Ordnungszahl, also ohne Einführung neuer Genüge leistenden Werthe, ganze Gruppen solcher Factoren plötzlich gewinnen, und auch ebenso plötzlich durch Erhöhung der Ordnungszahl, somit durch Einführung neuer particulären Integrale wieder ganz verlieren können, so dass von ihnen auch keine Spur mehr übrig bleibt. Es biethet sich daher die Frage dar: welche sind diejenigen Factoren des ersten Coefficienten, die in demselben unauslöschlich sind, und welche die anderen, die allenfalls durch neue Einführungen wieder verschwinden können? Dass zur ersten Klasse alle jene Factoren zu zählen seien, deren entsprechende k positiv, allgemeine Buchstabenwerthe oder gebrochen sind, ist in der Formenlehre nachgewiesen, es bleiben daher nur diejenigen übrig, deren Exponenten k der Reihe der natürlichen ganzen, aber negativen Zahlen angehören, und auch bei diesen wird das Herausfallen, falls es Statt findet, erst dann wirklich Platz greifen, wenn durch Einführung neuer Genüge leistenden Werthe die Differentialgleichung zu einer Ordnungszahl emporgehoben wird, welche das dem numerischen Werthe nach grösste derartige k um die Einheit überschreitet; aber unter keinerlei Umständen, und durch keinerlei neue Einführungen aus dem ersten Coefficienten verschwinden wird ein solcher Factor $x-\alpha$ nur dann, wenn die successiven Differentialquotienten des particulären Integrales, dem er angehört, d. h. welches eben der Potenz $(x-\alpha)^{-k}$ mit ganzen positiven Exponenten proportional ist, dem ungeachtet ob des Vorhandenseins einer Transcendente, wie $log\,(x-\alpha)$, ein ähnliches Verhalten offenbaren, wie für gebrochene k, das darin besteht, dass auf eine Reihe für $x=\alpha$ verschwindender eine andere Reihe von für $x=\alpha$ unendlich werdenden Differentialquotienten folgt. Es ist diess sehr leicht einzusehen, denn, wenn man in eine Gleichung $P=0$ von beliebiger Ordnung, ein solches neue Integral $y=y_1$ einführend, zur $P_1\,P'-P'_1\,P=0$ gelangt, wo P_1 der Werth von P für $y=y_1$ ist, so fällt vorerst in die Augen, dass P_1 immer den Factor $x-\alpha$ haben wird, entweder im Zähler, oder im Nenner, somit P'_1 um einen im Zähler weniger, oder um einen im Nenner mehr und z. B. einen einzigen im Nenner, wenn P_1 bloss dem $log\,(x-\alpha)$ proportional war, woraus folgt, dass in den ersten Gleichungscoefficienten durch die Einführung eines neuen solchen Werthes jedesmal ein Factor $x-\alpha$ geworfen wird; der kann aber auch nie wieder verschwinden durch neue Einführungen, weil man sich alle später eingeführten Werthe auch als die früher eingeführten denken

kann. In diesem Falle sind nun offenbar diejenigen irrationalen Werthe nicht, die unter der Form $e^{\int \varphi dx}$, wo φ die Wurzel einer höheren algebraischen Gleichung ist, in der Formenlehre §. 10, 11, 12, 13, 14, in eine Differentialgleichung vereinigt erscheinen, und auch mitunter negative ganze Zahlen als Werthe für k ergaben. Die ihnen entsprechenden Factoren $x-\alpha$ im ersten Coefficienten, die entweder einer ganzen positiven Anzahl solcher Factoren in φ angehörten, oder wenigstens auf eine Combinationsweise der assymptotischen particulären Integrale hindeuteten, die wirklich der Potenz $(x-\alpha)^{-k}$ proportional war, gehören daher zur Klasse der verwischbaren, indem sich hier durchaus der früher erwähnte Uebergang von einem verschwindenden zu einem unendlichen Differentialquotienten für $x=\alpha$ nicht denken lässt,und man kann überhaupt sagen, dass die Verwischbarkeit, oder Nichtverwischbarkeit eines solchen Factors durch die Anwendbarkeit oder Nichtanwendbarkeit der Mac-Laurin'schen Formel zur Entwicklung der particulären Integrale in Reihen nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ bedingt sei. Welche die transcendenten Functionsformen seien, die gelegentlich diese Formel ausser Wirksamkeit zu setzen im Stande sind, und in welcher Weise sie vorkommen, kann nur durch eine tiefer eindringende Untersuchung entschieden werden, welche im nächsten Abschnitte vorkommen wird. So viel ist indess gewiss, dass, wenn auch nur ein Bestandtheil des in irgend einer Form gedachten allgemeinen Integrales, z. B. in der assymptotischen:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots\dots\dots + C_n y_n,$$

etwa der y_1 eine Transcendente, wie $log(x-\alpha)$ in sich schliesst, und dadurch zu einem Factor $x-\alpha$, dem $k=-h$ angehört, des ersten Coefficienten Veranlassung gibt, und wenn man in Reihenform zu integriren für gut findet, d. h. y in der Gestalt:

$$y = B_1\eta_1 + B_2\eta_2(x-\alpha) + B_3\eta_3(x-\alpha)^2 + \dots + B_{n-1}\eta_{n-1}(x-\alpha)^{n-2} + B_n\eta_n(x-\alpha)^h$$

sucht, die $B_1, B_2, \dots B_n$, einige oder alle, und wenn auch diese nicht, mindestens die in $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ vorkommenden Coefficienten in der Regel unendliche Werthe erhalten werden, wie diess aus der kurz zuvor angeführten Form der Werthe dieser Grössen unmittelbar ersichtlich ist, so dass also das blosse Vorkommen dieser Transcendente im allgemeinen Integral mehrere, oder auch alle Theile desselben der Herrschaft der Mac-Laurin'schen Formel entziehen kann, ohne desshalb in mehr als in einem einzigen particulären Integrale vorhanden zu sein.

Mit den gleichen Werthen von k ist aber der Kreis der auffallenden und räthselhaften Erscheinungen auf diesem Felde keineswegs abgeschlossen, man stösst vielmehr auf eine bedeutendere Mannigfaltigkeit derselben, und es kann, um nur noch eine von ihnen zu berühren, den Rechner z. B. befremden, wenn der erste Coefficient einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung gelegentlich einen einzigen Factor $x-\alpha$ enthält, dem aber ein $k=-n+1$, gezogen aus der Gleichung (8), entspricht, so dass jetzt die Gesammtheit aller Werthe von k in der Reihe:

$$0, \quad -1, \quad -2, \quad \dots\dots \quad -n+2, \quad -n+1$$

enthalten ist, gerade so, wie bei einer Gleichung ohne allem $x-\alpha$ im ersten Coefficienten, gleichsam wie, wenn die Analysis einen Werth von k, der sich ohnehin von selbst versteht, ganz überflüssiger Weise

durch einen Factor im ersten Coefficienten kennzeichnete. Es weist diess nämlich auf eine Transcendente wie $log(x-\alpha)$ im allgemeinen Integrale hin, deren Spur, dem früher Gesagten nach, ebenso unverwischbar ist, wie die einer Potenz mit einem gebrochenen Exponenten. Die im gegenwärtigen Paragraphe gelehrte Transformationsweise biethet keineswegs noch die Mittel dar, alle diese mannigfaltigen Erscheinungen zu deuten bis in das kleinste Detail, bis zu einem gewissen Punkte jedoch und in zur Einleitung fernerer Untersuchungen zureichender Weise, ist diess aus dem Gesagten bereits möglich.

Wenn die Coefficienten X_n, X_{n-1}, X_{n-2} bezüglich mit 2, 1, 0 Factoren $x-\alpha$ verknüpft sind, was auf zwei particuläre Integrale mit Nennern, wie $(x-\alpha)^k$ hindeutet, gewinnt man auf dem hier eingeschlagenen Wege entweder:

$$k = 0, \quad -1, \quad -2, \quad \ldots\ldots, \quad -n+3$$

oder:

$$\left\{(k+n-2)(k+n-1)\frac{X_n}{(x-\alpha)^2} - (k+n-2)\frac{X_{n-1}}{x-\alpha} + X_{n-2}\right\}_\alpha = 0.$$

Wenn die zwei Wurzeln der letzten Gleichung des zweiten Grades mit k_1 und k_2 bezeichnet werden, so tritt uns das allgemeine Integral entgegen in folgender möglichen Form:

$$y = B_1\eta_1 + B_2\eta_2(x-\alpha) + B_3\eta_3(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots + B_{n-2}\eta_{n-2}(x-\alpha)^{n-3} + \frac{C_1 Q_1}{(x-\alpha)^{k_1}} + \frac{C_2 Q_2}{(x-\alpha)^{k_2}},$$

und wäre zufällig $k_1 = k_2$ ausgefallen, so würde diess den Schluss gestatten auf eine, wenigstens in einem der beiden letzten particulären Integrale vorkommende Transcendente, die die Entwicklung in Reihen mittelst der Mac-Laurin'schen Formel unmöglich macht, und so gewissermassen die Analysis hindert, die erwähnten beiden Genüge leistenden Werthe mit gleichen k in zwei andere mit ungleichen solchen zu zerlegen. Ebenso würde sich die Sache verhalten, wenn entweder k_1 oder k_2 irgend einem der übrigen und ganzen Werthe von k gleich ausgefallen wären. Erscheinen sie überdem noch unter sich gleich, so sind zwei der Genüge leistenden Functionen, und diess zwar namentlich die beiden letzten durch die Mac-Laurin'sche Formel nicht zu behandeln, ja sie bergen verschiedene Transcendenten aus dem Grunde, weil sie sonst doch eine Zerlegung zuliessen in zwei andere mit verschiedenen k, welche die Analysis anzudeuten niemals unterlassen hätte.

Hat man endlich allgemein in den Anfangscoefficienten der Differentialgleichung Factoren $x-\alpha$ bezüglich, r, $r-1$, ... 2, 1, 0 an der Zahl, somit zur Bestimmung der Werthe von k die Gleichungen:

$$k = 0, \quad -1, \quad -2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad -n+r+1,$$

und:

$$\left\{(k+n-r)\ldots(k+n-1)\frac{X_n}{(x-\alpha)^r} - (k+n-r)\ldots(k+n-2)\frac{X_{n-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \ldots + (-1)^r X_{n-r}\right\}_\alpha = 0,$$

und sind die Wurzeln der letzteren k_1, k_2, ... k_r, so tritt uns das allgemeine Integral in der Form entgegen:

$$y=B_1\eta_1+B_2\eta_2(x-\alpha)+B_3\eta_3(x-\alpha)^2+\ldots+B_{n-r}\eta_{n-r}(x-\alpha)^{n-r-1}+\frac{C_1Q_1}{(x-\alpha)^{k_1}}+\frac{C_2Q_2}{(x-\alpha)^{k_2}}+\ldots+\frac{C_rQ_r}{(x-\alpha)^{k_r}}.$$

Gewahrt man unter den sämmtlichen Werthen von k gleiche, so schliesst man daraus auf gewisse Transcendenten, wie $\log(x-\alpha)$, $[\log(x-\alpha)]^2$, ... in den betreffenden particulären Integralen, und zwar in einer Weise, dass sie die Verbindung derselben zu neuen Ausdrücken mit verschiedenen k unmöglich machen, Transcendenten, deren gemeinsamer analytischer Character darin besteht, dass sie sich beim Differenziren verhalten, wie eine algebraische Function mit unendlich kleiner Gradzahl, ohne desshalb constant zu sein, und sich überdiess der Behandlung mittelst der Mac-Laurin'schen Formel entziehen. Ob es nicht noch mancherlei Functionen dieser Art geben könne, die nicht Logarithmen sind, und bei denen es vielleicht noch fraglich ist, ob sie sich durch Logarithmen ausdrücken lassen, muss einstweilen noch unentschieden bleiben.

Um das Gesagte mit einem einfachen Beispiele zu belegen, betrachten wir die Gleichung:

$$x^3.y''' - 3(h-1)x^2.y'' + (3h^2-3h+1)xy' - h^3y = 0.$$

Die in ihr vorhandenen Factoren x^3, x^2, x der Gleichungscoefficienten deuten auf drei Werthe von k hin, die alle gezogen werden aus der Gleichung des dritten Grades:

$$k(k+1)(k+2) + 3(h-1)k(k+1) + (3h^2-3h+1)k + h^3 = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$k^3 + 3hk^2 + 3h^2k + h^3 = (k+h)^3 = 0.$$

Diess sind drei gleiche Wurzeln $-h$, somit entziehen sich zwei ihrer particulären Integrale der Entwicklung in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel und jeder Zusammensetzung zu neuen Genüge leistenden Werthen mit verschiedenen k, und in der That bekommt man die Gleichung in der Weise integrirend, wie sie der II. Abschnitt lehrt, einen allgemeinen Ausdruck für y:

$$y = x^h\left[C_1 + C_2\log x + C_3(\log x)^2\right],$$

der diese Aussagen bestätiget, und noch auf folgende Weise geschrieben werden kann:

$$y = Cx^h\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}, \tag{21}$$

die den Ursprung der Transcendente $\log x$ im Integrale einer Gleichung, in deren Coefficienten sie nicht ist, besser hervorhebt. Bildet man vermittelst der sich hier ergebenden Substitution:

$$y = x^h.z$$

die transformirte Gleichung in z, so sieht sie so aus:

$$x^2z''' + 3xz'' + z' = 0,$$

ihr entspricht offenbar das Integral:

$$z = C_1 + C_2\log x + C_3(\log x)^2,$$

§. 2.

Stellen wir uns jegliches der einer Differentialgleichung Genüge leistenden particulären Integrale vor in der assymptotischen Form $e^{\int \varphi dx}$, so geben nach den Regeln der Formenlehre die gehörig repartirten Unterschiede zwischen den Gradzahlen der Coefficienten die Ordnungszahlen sämmtlicher φ zu erkennen. Fassen wir irgend eines der in Rede stehenden Integrale ins Auge, und nennen m die über der negativen Einheit liegende Ordnungszahl des zugehörigen φ; so fängt diese der ersten Klasse angehörige Function mit einem Gliede λx^m an, wenn man sie sich nach absteigenden Potenzen von x in eine Reihe verwandelt denkt, und die Gleichung der exponentiellen Assymptote des geometrisch construirten particulären Integrales ist:

$$y = e^{\int \lambda x^m dx}.$$

Vielleicht ist nun die Differenz zwischen zwei Functionen erster Klasse $\varphi - \lambda . x^m$ auch wieder eine solche Function, somit begabt mit der Eigenschaft, sich einer Potenz, wie μx^r, fortwährend zu nähern, unter r eine Zahl, die kleiner ist als m, verstanden; dann ist offenbar:

$$y = e^{\int (\lambda x^m + \mu x^r) dx}$$

wieder eine Assymptotengleichung des particulären Integrales in zweiter Annäherung. So fortgehend kommt man zu Assymptotengleichungen in dritter, vierter u. s. w. Annäherung. Da aber immer kleinere Exponenten der Glieder des in Reihenform gedachten φ, nämlich m, r ... sich nothwendigerweise ergeben, so gelangt man vielleicht zu einem bereits unter der negativen Einheit liegenden, oder einem ihr gleichen. Der diesem unmittelbar vorangehende heisse s, so ist jetzt die Gradzahl der Function $\varphi - \lambda x^m - \mu x^r - \ldots - \delta x^s$ gleich, oder unter der negativen Einheit, ferner ist:

$$y = e^{\int (\lambda x^m + \mu x^r + \ldots + \delta x^s) dx}$$

eine exponentielle Assymtotengleichung des particulären Integrales, und der Ausdruck:

$$z = e^{\int (\varphi - \lambda x^m - \mu x^r - \ldots - \delta x^s) dx} \tag{22}$$

wird, als particuläres Integral einer Differentialgleichung angesehen, nach den Ergebnissen der Formenlehre auf den Coefficientenbau derselben einen ähnlichen Einfluss nehmen, wie eine algebraische Function, d. h. ein Abfallen um die Einheit in den Gradzahlen der letzten Coefficienten verursachen. Man braucht also nur ein jedes beliebige, der zur zweiten Klasse gehörigen particulären Integrale mit einem Factor, wie $e^{-\int (\lambda x^m + \mu x^r + \ldots + \delta x^s) dx}$ zu multipliciren, um es entweder auf die nächst niedrigere, erste Klasse zurückzuführen, oder wenigstens in Bezug auf die Gradzahlen der Coefficienten ihm dasselbe Verhalten mit den Functionen erster Klasse zu ertheilen. Hieraus schliesst man umgekehrt, dass, wenn durch Multiplication mit einem solchen Factor einer der genügenden Werthe, etwa $e^{\int \varphi dx}$, seinem Verhalten nach zur ersten Klasse herabgebracht ist, was man aus dem Abfall um die Einheit in der Gradzahl

oder mindestens einigen, etwa den äussersten, dieselbe höchste Gradzahl zukömmt, z. B. mit Coefficienten des zweiten Grades. Sie sei:

$$X_n\, y^{(n)} + X_{n-1}\, y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + X_1\, y' + X_0\, y = 0. \tag{23}$$

Die gleichen Dimensionszahlen der Coefficienten deuten, wie wir wissen, auf lauter particuläre Integrale, wie $e^{\int \varphi dx}$, mit solchen Functionen φ hin, deren Ordnungszahl Null ist. Es ist also $m = 0$. Der Factor, mit welchem die particulären Integrale zu multipliciren sind, hat bei allen die Form $e^{-\int \lambda\, dx} = e^{-\lambda x}$ und man erreicht die Multiplication Aller mit diesem Factor dadurch, dass man:

$$y = e^{\lambda x}\, z$$

setzt. Das Resultat dieser Substitution ist in der Gleichung (6) des vorigen Paragraphes enthalten, in der man $u = e^{\lambda x}$ zu setzen haben wird, und sieht so aus:

$$\begin{aligned}
X_n . z^{(n)} &+ z^{(n-1)} \Big[n\lambda X_n + X_{n-1} \Big] + \\
&+ z^{(n-2)} \Big[\binom{n}{2} \lambda^2 X_n + \binom{n-1}{1} \lambda X_{n-1} + X_{n-2} \Big] + \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ z'' \Big[\binom{n}{2} \lambda^{n-2} X_n + \binom{n-1}{2} \lambda^{n-3} X_{n-1} + \dots + X_2 \Big] + \\
&+ z' \Big[n\, \lambda^{n-1} X_n + (n-1)\, \lambda^{n-2} X_{n-1} + \dots + 2\lambda X_2 + X_1 \Big] + \\
&+ z \Big[\lambda^n\, X_n + \lambda^{n-1} X_{n-1} + \dots + \lambda^2 X_2 + \lambda X_1 + X_0 \Big] = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Der erste Coefficient X_n ist auf sie ungeändert aus der Gegebenen übergegangen. Da derselbe aus allen Factoren $(x - \alpha)$ zusammengefügt ist, bei deren Verschwinden irgend einer der Genüge leistenden Werthe eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet; so heisst diess in der Sprache der Formenlehre: die Multiplication mit der Exponentiellen $e^{-\lambda x}$ behindert das etwaige Null-, Unendlich-, oder Unstetigwerden der particulären Integrale nicht, und erzeugt auch keine neue Veränderung dieser Art. Würden die Endcoefficienten der Gleichung (23) nicht im Niveau stehen, sondern Abfälle biethen, mit ganzer oder gebrochener Repartitionszahl auf das Coefficientenpaar; so erscheinen dieselben in ein Fortschreiten im Niveau verwandelt, d. h. alle unter Null liegenden Gradzahlen der Functionen φ in den particulären Integralen werden durch Multiplication derselben mit $e^{-\lambda x}$ in die Nulle selbst verwandelt. Wäre in den Anfangscoefficienten der (23) ein Steigen vorhanden, ebenfalls mit ganzer oder gebrochener Repartitionszahl; so bleibt es unverändert, d. h. Gradzahlen von φ in den particulären Integralen, die die Nulle überschreiten, lässt die Multiplication derselben mit $e^{-\lambda x}$ unangetastet. Gehören endlich, wie vorausgesetzt wurde, sämmtliche Coefficienten der (23) wirklich demselben Grade an, so biethen die Coefficienten der (24) ebenfalls gleiche Gradzahlen, d. h. durch Multiplication mit diesem Factor wird die Gradzahl Null von keiner der Functionen φ in eine andere verwandelt. Eine Ausnahme findet Statt für specielle Werthe von λ. Sind nämlich der Reihe nach:

$$a_n x^m, \quad a_{n-1} x^m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a_1 x^m, \quad a_0 x^m,$$

die mit der höchsten Potenz von x versehenen Glieder in den Coefficienten:

$$X_n, \quad X_{n-1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad X_1, \quad X_0,$$

und zieht man den Werth von λ aus folgender algebraischen Gleichung:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0; \tag{25}$$

so verschwindet im letzten Coefficienten der transformirten Gleichung das höchste, mit x^m verbundene Glied, und man gewahrt einen Abfall vom vorletzten auf diesen letzten Coefficienten von Einer Einheit in der Gradzahl. Die beabsichtigte Herabsetzung ist daher für Eines der particulären Integrale gelungen, und gelingt in der Regel auf n verschiedene Weisen, weil die vorliegende algebraische Gleichung n verschiedene Wurzeln hat. Werden diese mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n$ bezeichnet, so lassen sich in dem Falle, wo wirklich keine gleichen unter ihnen vorkommen, und auch a_n von Null verschieden ist, die n particulären Integrale der vorgelegten Gleichung so schreiben:

$$y = e^{\lambda_1 x} Q_1, \quad e^{\lambda_2 x} Q_2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^{\lambda_n x} Q_n,$$

wo $Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_n$ ihrem Verhalten nach, was die Ordnungszahlen der Coefficienten betrifft, den Character von Functionen erster Klasse haben. Diess erleidet eine Ausnahme, wenn unter den obgenannten Wurzeln g l e i c h e vorhanden sein sollten. Bedenkt man nämlich, dass die höchsten mit x^m verbundenen Glieder in den Coefficienten von $z', z'', \ldots$ der Reihe nach:

$$\left[n a_n \lambda^{n-1} + (n-1) a_{n-1} \lambda^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_1 \right] x^m,$$

$$\frac{1}{2} \left[n(n-1) a_n \lambda^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} \lambda^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + 2a_2 \right] x^m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

also den Differentialquotienten des Gleichungspolynomes (25) proportional sind, die im Falle gleicher Wurzeln verschwinden, so sieht man, dass so viele Endcoefficienten, als es eben gleiche Wurzeln gibt, ihre höchsten Glieder verlieren, und in der Regel die Gradzahl $m - 1$ annehmen werden. Man hat also bei r gleichen Wurzeln einen auf r Coefficientenpaare sich erstreckenden Abfall von Einer Einheit, also auf jedes derselben einen repartirten Abfall von $\frac{1}{r}$ Einheiten, der, wie wir wissen, auf r^{te} Wurzeln in x hindeutet, ein Fall, den wir später der Betrachtung unterwerfen wollen.

Durch das Verschwinden von mehreren der Anfangsglieder der letzten Coefficienten, das in speciellen Fällen vorzukommen vermag, kann aber auch ein anderes Verhalten durch andere gleiche oder ungleiche, ganze oder gebrochene negative Repartitionszahlen sich kund geben. Von ihnen sind die unter der negativen Einheit liegenden oder ihr gleichen kein Gegenstand dieser unserer Betrachtungen mehr, da sie bereits auf Integrale der ersten Klasse hinweisen, die der Herabsetzung nicht mehr bedürftig sind. Die gebrochenen, zwischen 0 und — 1 liegenden jedoch müssen in der Folge noch zur Sprache kommen.

Von den gleichen Coefficienten der Differentialgleichung gehen wir über zu den Ansteigenden, betrachten aber der Klarheit wegen zuerst solche Ansteigungen, die, nach den bekannten Vorschriften auf die einzelnen Coefficientenpaare repartirt, ganze Zahlen geben, und diess zwar zuvörderst in dem einfachsten Falle der vorhandenen repartirten Ansteigung: Eins, bei der folgenden Differentialgleichung, die sich nur zur zweiten Ordnung erhebt:

$$(x+b_2)\,y'' + (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)\,y' + (a_0 x^3 + b_0 x^2 + c_0 x + d_0)\,y = 0, \tag{26}$$

und zwei Genüge leistende Werthe besitzt, die in der Form $e^{\int \varphi dx}$ gedacht, beide in der Regel φ besitzen mit der Gradzahl Eins. Ausnahmen hievon bilden die Fälle: $a_0 = 0$, wo die Gradzahlen der Coefficienten nicht mehr 1, 2, 3, sondern 1, 2, 2 heissen, somit ein φ von der Ordnung Eins, das andere von der Ordnung Null auftritt; ferner $a_0 = b_0 = 0$, wo diese Zahlen in 1, 2, 1 übergehen, und daher ein Genüge leistender Werth auftaucht, der zur ersten Klasse gehörig ist; dann der Fall: $a_1 = a_0 = b_0 = 0$, wo die Gradzahlen 1, 1, 1 sind, oder gar in 1, 1, 0 übergehen, wenn auch $c_0 = 0$ sein sollte, und folglich entweder beide φ des 0ten Grades erscheinen, oder nur eines von ihnen. Hieran schliessen sich noch einige andere Fälle von gebrochenen Repartitionszahlen mit dem Nenner 2, die wir vorderhand unbeachtet lassen wollen.

Im Allgemeinen nun, und ohne Rücksicht auf die erwähnten Ausnahmen, werden die Anfangsglieder der nach absteigenden Potenzen von x in Reihen entwickelten Functionen φ gleich $\lambda x + \mu$ der Form nach anzunehmen sein. Wir setzen daher:

$$y = e^{\int (\lambda x + \mu)\,dx}\, z\,,$$

und gelangen dadurch zu einer Gleichung in z, die so aussieht:

$$\begin{aligned}(x+b_2).z'' &+ \left[A' x^2 + (2\mu + B')\,x + 2b_2\,\mu + C'\right] z' + \\ &+ \left[Ax^3 + (A'\mu + B)\,x^2 + (\mu^2 + \lambda + B'\mu + C)\,x + b_2\,(\mu^2 + \lambda) + C\mu + d_0\right] z = 0,\end{aligned} \tag{27}$$

und in welcher:

$$\begin{aligned}\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 &= A\\ b_2\,\lambda^2 + b_1\,\lambda + b_0 &= B\\ c_1\,\lambda + c_0 &= C\end{aligned}$$

sind, A', B', C' aber die nach den Variablen λ genommenen ersten Differentialquotienten von A, B, C bedeuten. Diese transformirte Gleichung unterscheidet sich im ersten Coefficienten nicht von der Gegebenen. Gleichwie also die eine nur einen Genüge leistenden Werth besitzt, der für $x = -b_2$ unendlich oder unstetig zu werden vermag, ebenso gilt diess auch von der anderen, und es hat die Multiplication der beiden Genüge leistenden Werthe mit der Exponentialgrösse $e^{-\int (\lambda x + \mu)\,dx}$, die wir durch diese Transformation ausübten, auf das Verhalten derselben für $x = -b_2$ keinen Einfluss genommen, wie diess sich auch von selbst versteht, was auch λ und μ bedeuten mögen. Eben so wenig ist im Allgemeinen die Form der Gleichung verändert, und es sind die Gradzahlen der Coefficienten 1, 2, 3 geblieben, ja sie

sind sogar in diese übergegangen, wenn sie in der (26) ausnahmsweise andere Werthe gehabt haben sollten. Hiemit nun sagt offenbar die Analysis wieder etwas, was sich von selbst versteht, nämlich: Die Multiplication mit der eben erwähnten Exponentialgrösse hat unter den obwaltenden Umständen, nämlich für solche φ, deren Gradzahlen die Einheit nicht überschreiten, nur die Wirkung, die beiden Integralen zugehörigen φ zum ersten Grade zu erheben oder dabei zu belassen, was aber nur so lange richtig ist, als man λ und μ nicht näher bestimmt. Für specielle Werthe dieser Coefficienten aber tritt ein anderes Verhalten auf, das wir alsogleich beleuchten wollen.

Wählt man λ so, dass:

$$A = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{28}$$

wird, was in der Regel auf zwei verschiedene Arten geschehen kann, nämlich für $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$, wenn λ_1 und λ_2 die Wurzeln dieser Gleichung sind, so geht der letzte der Coefficienten der (27) von dem dritten auf den zweiten Grad herab; und wird noch überdiess μ so bestimmt, dass

$$A' \mu + B = (2\lambda + a_1) \mu + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0 \tag{29}$$

ausfällt; so gewahrt man gar die Gradzahlen 1, 2, 1 in der transformirten Gleichung, zum Abzeichen, dass einer, und auch in der Regel nur einer der Genüge leistenden Werthe in eine Function erster Klasse übergegangen sei; jedoch lässt sich dieser Uebergang auf zwei verschiedene Arten bewerkstelligen, weil das aus (28) gezogene λ zweiwerthig ist, und weil den beiden Werthen λ_1 und λ_2 auch zwei Werthe von μ aus der (29) entsprechen, die wir mit μ_1 und μ_2 bezeichnen wollen. Diess heisst nun in der Sprache der Formenlehre: Die gegebene Gleichung (26) hat zwei verschiedene particuläre Integrale, sie können beide zur ersten Klasse heruntergebracht werden, und namentlich geschieht diess dem ersten durch Multiplication des allgemeinen Integrales mit $e^{-\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}$ und dem zweiten nicht, hingegen dem zweiten durch Multiplication mit $e^{-\int(\lambda_2 x + \mu_2)\,dx}$ und dem ersten nicht, und wir schliessen hieraus auf die folgende Form des allgemeinen Werthes von y:

$$y = C_1 \, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx} \, z_1 + C_2 \, e^{\int(\lambda_2 x + \mu_2)\,dx} \, z_2 \,. \tag{30}$$

in der die exponentiellen Factoren vollständig ermittelt, von z_1 und z_2 aber nur so viel bekannt ist, dass sie Functionen erster Klasse seien. Hätte man $a_0 = 0$ oder gar $a_0 = b_0 = a_1 = 0$ gehabt, also entweder einen oder gar zwei verschwindende Werthe für λ bekommen, so würde diess offenbar geheissen haben: wenn die Function φ nicht dem ersten Grade angehört, so ist das betreffende particuläre Integral auch nicht mit $e^{-\int(\lambda x + \mu)\,dx}$ zu multipliciren, um zur ersten Klasse herabgebracht zu werden. Auch diess versteht sich im Grunde von selbst.

Es kann aber ausnahmsweise die Gleichung (28) auch gleiche Wurzeln $\lambda_1 = \lambda_2$ besitzen, für solche ist $A = A' = 0$ und somit die (29), welche μ zu liefern hätte, entweder widersprechend oder für beliebige μ identisch erfüllt, je nachdem für dasselbe λ das Trinom B entweder von der Nulle verschieden bleibt, oder ebenfalls verschwindet. Ersteres ist der allgemeinere, sohin gewöhnlichere Fall. Er deutet darauf hin, dass es gar keinen Werth von μ gibt, für welchen die Herabsetzung irgend eines

der Integrale zur ersten Klasse vermittelst der Multiplication mit $e^{-\int(\lambda_1 x+\mu)dx}$ zu bewerkstelligen wäre. wir multipliciren daher nur mit $e^{-\int\lambda_1 x\,dx}$, indem wir:

$$y = e^{\int\lambda_1 x\,dx}\, z$$

annehmen. Die hiedurch erhaltene transformirte Gleichung geht nun offenbar aus der (27) hervor, wenn man $\lambda = \lambda_1$ und $\mu = 0$ setzt. Sie ist:

$$(x + b_2)\, z'' + \left[B'x + C'\right] z' + \left[Bx^2 + (C + \lambda_1)\, x + b_2\, \lambda_1 + d_0\right] z = 0, \tag{31}$$

und zeigt uns deutlich die Ursache des nichtvorhandenen μ in den Gradzahlen ihrer Coefficienten 1, 1, 2, die auf zwei particuläre Integrale hindeuten, deren φ vom Grade $\frac{1}{2}$ ist. Es konnte also die obenangeführte Form (30) darum nicht entsprechen, weil unter dem obwaltenden Umstande $\lambda_1 = \lambda_2$ eine andere:

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1\sqrt{x})\,dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_2\sqrt{x})\,dx}\, z_2$$

die giltige ist, wo z_1 und z_2 Functionen sind, von denen man nicht weiss, zu welcher Klasse sie gehören. Man kann in diesem Falle sich die (31) aus der (26) abgeleitet denken durch Multiplication des allgemeinen Integrales mit der Exponentielle $e^{-\int\lambda_1 x\,dx}$, allwo λ_1 rational ist, und unsere Transformation hat jenen Factor bloss weggeschafft, und dadurch die Gleichung vereinfacht.

Ist für $\lambda = \lambda_1$ nicht nur $A = A' = 0$, sondern auch $B = 0$, also die (29) für jedes μ identisch erfüllt, so gehen auch für jedes μ die Dimensionszahlen der Coefficienten in der (27) über in 1, 1, 1 und man erzielt einen Abfall um die Einheit in den beiden letzten, wenn man μ so wählt, wie es die folgende Gleichung des zweiten Grades liefert:

$$G = \mu^2 + B'_1\, \mu + \lambda_1 + C_1 = 0. \tag{32}$$

Ihre zwei Wurzeln seien μ_1 und μ_2: so tritt uns das allgemeine Integral abermals entgegen in der früheren Form (30), nur dass in derselben λ_2 durch λ_1 zu ersetzen kommt, z_1 und z_2 aber hören nicht auf der ersten Klasse anzugehören. Die beiden einfachen Differentialgleichungen, deren der ersten Klasse angehörige particulären Integrale z_1 und z_2 sind, gehen aber jetzt aus der einzigen:

$$(x + b_2)\, z'' + \left[(2\mu + B')\, x + 2b_2\, \mu + C'\right] z' + \left[b_2\, (\mu^2 + \lambda) + C\mu + d_0\right] z = 0.$$

oder, was dasselbe ist:

$$(x + b_2)\, z'' + \left[(2\mu + b_1 - a_1\, b_2)\, x + 2b_2\, \mu + c_1\right] z' + \left[\frac{1}{2}\, b_2\, (2\mu^2 - a_1) + c_1\, \mu + d_0\right] z = 0, \tag{33}$$

dadurch hervor, dass man anstatt μ die beiden Werthe μ_1 und μ_2 aus der (32), oder, was wieder dasselbe ist, aus der:

$$\mu^2 + (b_1 - a_1\, b_2)\, \mu + \frac{1}{2}\, (2c_0 - a_1\, c_1 - a_1) = 0$$

substituirt. Man kann nun nach Belieben zur Bestimmung von z_1 und z_2 die eine allein, oder die andere allein, oder ihren gemeinsamen Repräsentanten (33) verwenden.

Ein einziger letzter und sehr specieller Ausnahmsfall ergibt sich noch, dem wir unsere Aufmerksamkeit schenken müssen, der nämlich, wo $A = A' = B = G = G' = 2\mu + B' = 0$ ausfällt. Die (32) in μ hat dann gleiche Wurzeln und die Ordnungszahlen der transformirten Gleichung gehen über in 1, 0, 0, deuten also wieder auf irrationale Formen der Genüge leistenden Werthe und namentlich auf folgende neue Gestalt des allgemeinen Integrales:

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right) dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_2}{\sqrt{x}}\right) dx}\, z_2, \tag{34}$$

und wir gewahren zum zweiten Male, dass mit dem Erscheinen gleicher Wurzeln eine Formänderung der transformirten Gleichung insoferne eintritt, als die ganzen Repartitionszahlen in gebrochene übergehen, und in Folge dessen das rationale allgemeine Integral dem irrationalen Platz machen muss.

Die (33) ist, wie man sieht, eine nach denjenigen Vorschriften, die der II. Abschnitt gebracht hat, durch bestimmte Integrale, oder Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl stets mit Leichtigkeit integrirbare Gleichung, den einzigen Fall gleicher Wurzeln für μ ausgenommen, dessen zuletzt Erwähnung geschah, und für welchen sie in:

$$(x+b_2)z'' + (a_1 b_2^2 - b_1 b_2 + c_1)z' + \frac{1}{4}(b_1^2 b_2 - 2a_1 b_1 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 + 2a_1 b_2 c_1 - 2b_1 c_1 + 4d_0)\, z = 0 \tag{35}$$

übergeht, die einzige Gestalt derart, die dem oberwähnten Integrationsverfahren widersteht, eben weil ihr allgemeines Integral der Form nach das:

$$z = C_1\, e^{\int \frac{\nu_1}{\sqrt{x}} dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int \frac{\nu_2}{\sqrt{x}} dx}\, z_2$$

ist, wo ν_1 und ν_2 die bestimmten Werthe:

$$\nu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{-b_1^2 b_2 + 2a_1 b_1 b_2^2 - a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 - 2a_1 b_2 c_1 + 2b_1 c_1 - 4d_0}$$

$$\nu_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{-b_1^2 b_2 + 2a_1 b_1 b_2^2 - a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 - 2a_1 b_2 c_1 + 2b_1 c_1 - 4d_0}$$

besitzen, z_1 und z_2 aber dieselben Functionen sind, die auch in der (34) erscheinen, und die zu keiner anderen, als zur ersten Klasse gehören können. Der §. 15 der Formenlehre bemerkt hiezu, dass man sich die Behandlung ähnlicher Gleichungen mit negativen zwischen 0 und — 1 liegenden Repartitionszahlen durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen erleichtern könne.

Entbehrlich wird diese Einführung in dem einzigen und letzten Ausnahmsfalle, wo gleiche Wurzeln $\nu_1 = \nu_2 = 0$ vorhanden sind, der abermals eine Formänderung der Gleichung sowohl, wie des Integrales zur Folge hat, jedoch im entgegengesetzten Sinne, weil die Repartitionszahl von gebrochenen in ganze und dem entsprechend die irrationale Form des allgemeinen Integrales in eine rationale übergeht. Da unter solchen Umständen eine Constante der (35) Genüge leistet, so sieht man, dass das all-

gemeine Integral der vorgelegten (26) für $\nu_1 = \nu_2 = 0$ und unter Fortbestehen der Bedingungen: $A = A' = B = G = G' = 0$ durch die Formel (30) gegeben sei, wenn man in derselben λ_2 durch λ_1, μ_2 durch μ_1, und z_1 durch eine Constante ersetzt, und so sehen wir denn in diesem einfachen Beispiele, wie die in Rede stehende Transformationsweise die vorgelegte Gleichung in eine unmittelbar integrable verwandeln, oder die Integration durch Herabbringen jedes der Genüge leistenden Werthe zur ersten Klasse vorbereiten, oder endlich zum mindesten einer anderen hiezu dienlichen Transformation die Hand reichen könne.

Um eine klarere Uebersicht zu gewinnen über die verschiedenen Gestalten des allgemeinen Integrales, die der besprochenen Gleichung (26) in den aufgezählten Fällen zukommen können, bringen wir sie nochmals, aber gesammelt, vor das Auge des Lesers, indem wir zuerst die gegebene Differentialgleichung, dann die daraus abgeleitete Transformirte mit den die Bedeutung der in Letzterer vorkommenden Buchstabengrössen erläuternden Annahmen hinstellen, und hierauf die verschiedenen möglichen Formen des allgemeinen Integrales je in unmittelbarer Begleitung derjenigen algebraischen Gleichungen folgen lassen, denen die mit λ, μ, ν bezeichneten Coefficienten, die in der betreffenden Form vorkommen, Genüge leisten müssen. Zur Vervollständigung der Einsicht lassen wir noch überdiess den Buchstaben z jedesmal eine Function erster Klasse, $\mathfrak{z}$ hingegen eine solche bedeuten, die vermuthlich noch zu dieser ersten Klasse nicht herabgebracht ist.

$$(x + b_2)\, y'' + (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)\, y' + (a_0 x^3 + b_0 x^2 + c_0 x + d_0)\, y = 0.$$

$$(x + b_2)\, z'' + \left[A' x^2 + G' x + H'\right] z' + \left[A x^3 + (A' \mu + B)\, x^2 + G x + H\right] z = 0,$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 &= A, & 2\lambda + a_1 &= A' \\ b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 &= B, & 2b_2 \lambda + b_1 &= B' \\ c_1 \lambda + c_0 &= C, & c_1 &= C' \\ \mu^2 + B'\mu + C + \lambda &= G, & 2\mu + B' &= G' \\ b_2 (\mu^2 + \lambda) + C\mu + d_0 &= H. & 2b_2 \mu + C' &= H' \end{aligned}$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_2 x + \mu_2)\,dx}\, z_2,$$
$$A = 0, \qquad A' \mu + B = 0,$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_2)\,dx}\, z_2,$$
$$A = A' = B = C = 0,$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx} + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_2,$$
$$A = A' = B = G = G' = H = 0,$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1 \sqrt{x})\,dx}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_2 \sqrt{x})\,dx}\, \mathfrak{z}_2,$$
$$A = A' = 0, \qquad \mu^2 + B = 0,$$

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right) dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_2}{\sqrt{x}}\right) dx}\, z_2 .$$

$$A = A' = B = G = G' = \nu^2 + H = 0.$$

Als zweites Beispiel derselben Art möge die folgende Gleichung der dritten Ordnung mit ansteigenden Coefficienten dienen:

$$\begin{aligned}(a_3 x^m + b_3 x^{m-1} + c_3 x^{m-2} + \ldots)\, y''' + (a_2 x^{m+1} + b_2 x^m + c_2 x^{m-1} + \ldots)\, y'' +\\ (a_1 x^{m+2} + b_1 x^{m+1} + c_1 x^m + \ldots)\, y' + (a_0 x^{m+3} + b_0 x^{m+2} + c_0 x^{m+1} + \ldots)\, y = 0.\end{aligned}$$

Die durchaus gleichen Ansteigungen der Gradzahlen um die Einheit von einem Coefficienten zu dem anderen belehren uns von dem Vorhandensein dreier particulärer Integrale in der Form $e^{\int \varphi dx}$, in welchen das φ dem ersten Grade angehört. Wir wollen daher untersuchen, ob sie nicht durch Multiplication mit einem Factor $e^{-\int(\lambda x + \mu)\, dx}$ zur nächst niedrigeren Klasse heruntergebracht werden können, und nehmen desshalb wieder:

$$y = e^{\int(\lambda x + \mu)\, dx} . z$$

an, und, um die auf dem Wege der Substitution gewonnene transformirte Gleichung bequemer analysiren zu können, statuiren wir noch überdiess:

$$\begin{aligned} a_3\, \lambda^3 + a_2\, \lambda^2 + a_1\, \lambda + a_0 &= A\\ b_3\, \lambda^3 + b_2\, \lambda^2 + b_1\, \lambda + b_0 &= B\\ c_3\, \lambda^3 + c_2\, \lambda^2 + c_1\, \lambda + c_0 &= C\\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Annahmen gewinnt dann unsere Gleichung in z folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} & z''' \left[\, a_3 x^m + b_3 x^{m-1} + c_3 x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right] + \\ + & z'' \left[\frac{1}{2} A'' x^{m+1} + \left(\frac{1}{2} B'' + 3a_3\mu\right) x^m + \left(\frac{1}{2} C'' + 3b_3\mu\right) x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots \right] + \\ + & z' \left[\, A' x^{m+2} + (B' + A''\mu)\, x^{m+1} + \left(C' + B''\mu + 3a_3 (\mu^2 + \lambda)\right) x^m + \ldots \right] + \\ + & z \left[\, A\, x^{m+3} + (B + A'\mu)\, x^{m+2} + \left(C + B'\mu + \frac{1}{2} A'' (\mu^2 + \lambda)\right) x^{m+1} + \right. \\ & \left. + \left(D + C'\mu + \frac{1}{2} B'' (\mu^2 + \lambda) + a_3 (\mu^3 + 3\lambda\mu)\right) x^m + \ldots\ldots\ldots\ldots \right] = 0, \end{aligned} \tag{36}$$

und es bedeuten in derselben A', A'' die successiven Differentialquotienten des Polynomes A nach λ genommen; eben so sind B', B'', die Differentialquotienten von B u. s. w.

Aus ihr ist Folgendes unmittelbar ersichtlich: Erstens, der erste Coefficient ist ungeändert geblieben, die Transformation hat daher auf die Null- und unstetigmachenden Werthe keinen Einfluss genommen. Zweitens, durch Verschwinden der Anfangsglieder etwa veranlasste Abfälle der letzten Coef-

ficientenpaare sind aufgehoben, und durch Steigungen um Eine Einheit in der Gradzahl ersetzt. Es sind somit alle unter der Einheit liegenden Gradzahlen von φ in die Einheit selbst übergegangen. Drittens, jede stärkere Steigung, als um die Einheit in den Anfangscoefficienten findet sich gänzlich ungetrübt auch in der transformirten Gleichung, diejenigen φ also, welche höhere Gradzahlen als Eins besitzen, behalten dieselben unverändert, ungeachtet der Multiplication mit dem exponentiellen Factor. Viertens, finden in der vorgelegten Gleichung die vorausgesetzten Ansteigungen in der Gradzahl wirklich Statt, so biethet sie im Allgemeinen auch die transformirte, mit Ausnahme jedoch gewisser Werthe von λ und μ, derjenigen nämlich, die die beiden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
A &= a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \\
B + A' \mu &= \mu (3a_3 \lambda^2 + 2a_2 \lambda + a_1) + b_3 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0
\end{aligned}
\tag{37}
$$

erfüllen, was einen Abfall um die Einheit in der Gradzahl von dem vorletzten auf den letzten Coefficienten, und folglich ein Herabgehen eines einzigen particulären Integrales von der zweiten zur ersten Functionsklasse zur Folge hat. Die erste dieser beiden Gleichungen gehört in der Regel dem dritten Grade an, es sei denn, dass $a_3 = 0$ wäre, wodurch sie sich in eine des zweiten Grades verwandeln würde, zum Zeichen, dass nur zwei particuläre Integrale geeignet seien, durch Multiplication mit dem verwendeten exponentiellen Factor, zur ersten Klasse herabgebracht zu werden, das dritte aber nicht, und zwar darum, weil die Gradzahl seines φ die Einheit überschreitet; für $a_3 = a_2 = 0$ liegt aber vollends nur eine Gleichung des ersten Grades in λ vor, und man hat dann natürlich nur ein einziges, der Herabsetzung fähiges particuläres Integral. Nennen wir die drei allgemein vorhandenen Wurzeln der ersten der Gleichungen (37): λ_1, λ_2, λ_3, und setzen wir dieselben von einander verschieden voraus; so liefert die zweite zu jeder von ihnen einen Werth von μ, wir gewinnen also drei solche Werthe: μ_1, μ_2, μ_3, und schliessen hieraus, dass das allgemeine Integral unserer Differentialgleichung der dritten Ordnung in der Regel erscheine in folgender Gestalt:

$$
y = C_1 \, e^{\int (\lambda_1 x + \mu_1) dx} \,.\, z_1 + C_2 \, e^{\int (\lambda_2 x + \mu_2) dx} \,.\, z_2 + C_3 \, e^{\int (\lambda_3 x + \mu_3) dx} \,.\, z_3 , \tag{38}
$$

allwo z_1, z_2 und z_3 Functionen sind, die, in eine Differentialgleichung als particuläre Integrale vereinigt, ein stetes Abfallen von mindestens Einer Einheit auf das Coefficientenpaar zur Folge haben werden, oder mit anderen Worten Functionen erster Klasse, die in ihrem Benehmen mit den Algebraischen übereinstimmen.

Anders verhält sich jedoch die Sache, wenn die erste der Gleichungen (37) gleiche Wurzeln hätte, etwa $\lambda_1 = \lambda_2$. Die zweite von ihnen bestimmt dann das μ nicht mehr, weil sein Coefficient gleich Null wird; sondern wird entweder identisch, wenn zufällig:

$$
B = b_3 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0
$$

für $\lambda = \lambda_1$ ausfällt, oder enthält im entgegengesetzten Falle einen Widerspruch. Wird sie identisch, so verschwindet im Coefficienten von z' das Glied mit x^{m+2}, in jenem von z aber das mit x^{m+3} und

x^{m+2}, die Gradzahlen der Coefficienten heissen also: m, $m+1$, $m+1$, $m+1$, und man vermag noch überdiess über das annoch unbestimmte μ dermassen zu disponiren, dass das Glied mit x^{m+1} im letzten derselben der Nulle gleich wird, also vom Vorletzten auf den Letzten der gewünschte Abfall in der Gradzahl um Eine Einheit herbeigeführt wird. Man hat hiezu:

$$H = C + B'\mu + \frac{1}{2} A'' (\mu^2 + \lambda) = 0 \tag{39}$$

zu setzen, und gewinnt in der Regel zwei Werthe von μ, die wir mit μ_1 und μ_2 bezeichnen wollen, und die beide zu λ_1 gehören. Die angegebene Form des allgemeinen Integrales (38) besteht daher immer noch zurecht, nur dass λ_2 durch λ_1 ersetzt werden muss. Die Differentialgleichung selbst vereinfacht sich unter solchen Umständen immer, und zwar oft bis zur Integrabilität in geschlossener Form. Diess geschieht namentlich für $m=0$, wo sie sich in:

$$y''' + (a_2 x + b_2)\, y'' + (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)\, y' + (a_0 x^3 + b_0 x^2 + c_0 x + d_0)\, y = 0 \tag{40}$$

verwandelt, und unter den vorausgesetzten Umständen: $A = A' = B = 0$ die folgende Transformirte in z liefert:

$$\begin{aligned} &z''' + \left[\frac{1}{2} A'' x + b_2 + 3\mu\right] z'' + \left[(B' + A''\mu)\, x + c_1 + 2b_2\mu + 3\,(\mu^2 + \lambda)\right] z' + \\ &+ \left[\left(C + B'\mu + \frac{1}{2} A''(\mu^2 + \lambda)\right) x + d_0 + c_1\mu + b_2\,(\mu^2 + \lambda) + \mu^3 + 3\lambda\mu\right] z \quad = 0, \end{aligned} \tag{41}$$

von der man nun allgemein, d. h. für noch unbestimmt gelassene Werthe von λ und μ, das eine der ersten Klasse angehörige particuläre Integral nach den bekannten Vorschriften, etwa als Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl zu suchen, sodann aber in demselben einmal $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$ und dann auch $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_2$ zu setzen haben wird, um als Substitutionsresultate dieselben z_1 und z_2 zu bekommen, die sich in der Formel (38) für $\lambda_2 = \lambda_1$ vorfinden.

Der specielle Fall gleicher Wurzeln $\mu = \mu_1 = \mu_2$, für welchen man $B' + A''\mu = 0$ hat, während nebst dem $A = A' = B = 0$ fortbesteht, begründet hier abermals eine Änderung des Coefficientenbaues durch das Auftreten negativer und gebrochener Repartitionszahlen $-\frac{1}{2}$, da demselben zufolge die Gradzahlen der Coefficienten in der (36) m, $m+1$, m, m, in der einfacheren (41) aber 0, 1, 0, 0 werden. Hiemit ist nun wieder eine Formänderung des allgemeinen Integrales verknüpft, welches jetzt in der Gestalt:

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right) dx} z_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 - \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right) dx} z_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_2 x + \mu_2)\, dx} z_3$$

erscheinen wird, gerade so, wie in der Gleichung (26) unter ähnlichen Umständen, und es sind ν_1 und $-\nu_1$ die zwei Wurzeln der binomischen Gleichung des zweiten Grades:

$$\frac{1}{2} A''\, \nu^2 + D + C'\mu + \frac{1}{2} B''\, (\mu^2 + \lambda) + a_2\, (\mu^3 + 3\lambda\mu) = 0,$$

die gelegentlich auch der Nulle gleich ausfallen können.

Hat man hingegen zwar gleiche Wurzeln, folglich $A = A' = 0$ und doch kein, für einen solchen gleichen Wurzelwerth $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ verschwindendes B, was unstreitig ein häufiger vorkommender Fall sein wird; so birgt die sonst zur Bestimmung des μ dienende zweite der Gleichungen (37) einen Widerspruch, und es folgt hieraus einfach, dass das Glied mit x^{m+2} im letzten Coefficienten durch gar keine Wahl von μ sich wegheben lasse. Wir nehmen also $\mu = 0$ an, und lassen es bei der Multiplication sämmtlicher particulären Integrale mit $e^{-\int \lambda x dx}$ bewenden. Die Gradzahlen der Coefficienten in der transformirten Gleichung sind dann der Reihe nach: m, $m+1$, $m+1$, $m+2$, also vom zweiten auf den vierten eine Steigung vorhanden um die Einheit in der Gradzahl auf zwei Paare, also um eine halbe Einheit auf das Paar, daher denn das allgemeine Integral irrational wird und die folgende, von der früheren verschiedene Gestalt annimmt:

$$y = C_1\, e^{\int (\lambda_1 x + \mu_1 \sqrt{x})\, dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int (\lambda_1 x - \mu_1 \sqrt{x})\, dx}\, z_2 + C_3\, e^{\int (\lambda_3 x + \mu_3)\, dx}\, z_3. \tag{42}$$

μ_1 und $-\mu_1$ sind die Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$\frac{1}{2} A'' \mu^2 + B = 0,$$

und μ_3 der für $\lambda = \lambda_3$ aus der $A'\mu + B = 0$ gezogene Werth. Von z_3 wissen wir, dass es die Geltung einer Function erster Klasse besitze, von z_1 und z_2 bleibt diess einstweilen dahingestellt, weil der zur Einreihung in diese erste Klasse nothwendige Abfall für diese Functionen nicht nachgewiesen ist, es sogar sehr möglich wäre, dass hiezu die Sonderung des exponentiellen Factors $e^{\int (\lambda_1 x \pm \mu_1 \sqrt{x})\, dx}$ nicht hinreiche, vielmehr die eines minder einfachen $e^{\int \left(\lambda_1 x \pm \mu_1 \sqrt{x} + \nu + \frac{\sigma}{\sqrt{x}}\right) dx}$ Platz zu greifen habe.

Jetzt wollen wir den Fall betrachten, wo die erste der Gleichungen (37) nicht zwei, sondern drei gleiche Wurzeln hat. Die zweite von ihnen hört dann wieder auf μ zu bestimmen, und wird entweder identisch, wenn $B = 0$ ist, oder widersprechend, wenn B nicht verschwindet. Im ersteren Falle biethen die Coefficienten der transformirten Gleichung die Gradzahlen: m, m, $m+1$, $m+1$, und man kann noch überdiess den bisher unbestimmt gelassenen Coefficienten μ dermassen wählen, dass das Glied mit der $(m+1)^{\text{sten}}$ Potenz von x im letzten Coefficienten der Nulle gleich wird, man also zu dem erwünschten Abfall um die Einheit in der Ordnungszahl gelangt. Dieses μ ist nur eindeutig, weil in der Gleichung (39), durch die es bestimmt wird, der Coefficient von μ^2, der $\frac{1}{2}A''$ ist, der Nulle gleicht. Bezeichnen wir das hieraus gezogene μ mit μ_3, und erwägen zudem, dass die jetzt vorhandenen Gradzahlen der Coefficienten m, m, $m+1$, m auf zwei irrationale particuläre Integrale hindeuten, deren φ die Gradzahl $\frac{1}{2}$ besitzt, das dritte aber die Eigenschaften der algebraischen Functionen kund gibt, so sehen wir, dass die Formel (42) auch für diesen Fall passe, wenn man in derselben auch λ_3 durch λ_1 ersetzt, μ_1 und $-\mu_1$ aber die zwei Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$a_3 \mu^2 + B' = 0$$

sein lässt.

Hiemit ist uns aber wieder ein die Form der Gleichung sowohl, wie die des Integrales verändernder Ausnahmsfall näher gerückt, der nämlich, wo $B' = 0$ wird, während $A = A' = A'' = 0$ fort-

besteht. Die Gradzahlen der Coefficienten, nämlich m, m, m, $m+1$, liefern hier die gemeinsame Repartitionszahl $\frac{1}{3}$, die auf eine neue Form des allgemeinen Integrales den Schluss gestattet, nämlich auf die:

$$y = C_1 e^{\int(\lambda_1 x+\mu_1 \sqrt[3]{x})dx} z_1 + C_2 e^{\int(\lambda_1 x+\mu_2 \sqrt[3]{x})dx} z_2 + C_3 e^{\int(\lambda_1 x+\mu_3 \sqrt[3]{x})dx} z_3,$$

μ_1, μ_2, μ_3 sind die drei Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$a_3 \mu^3 + C = 0,$$

und z_1, z_2, z_3 muthmasslich annoch der zweiten Klasse angehörige Functionen. Hätte man gar für dasselbe $\lambda = \lambda_1$, $A = A' = A'' = B = B' = C = 0$, so ginge die Differentialgleichung in eine transformirte mit gleich hohen Coefficienten m, m, m, m über, bei der man noch überdiess den gewünschten Abfall um die Einheit in der Gradzahl von dem vorletzten auf den letzten Coefficienten durch schickliche Wahl von μ erzielen kann, indem man es gleich einer der drei Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3 der folgenden Gleichung des dritten Grades wählt:

$$D + C\mu + \frac{1}{2} B'' (\mu^2 + \lambda) + a_3 (\mu^3 + 3\lambda\mu) = 0,$$

was offenbar zur Form (38) des allgemeinen Integrales zurückgeführt, in der man bloss λ_2 und λ_3 durch λ_1 zu ersetzen haben wird. Bemerkenswerth bleibt hier noch, dass unter den vorausgesetzten Umständen die Integration der (40) von der einer anderen mit constanten Coefficienten abhängig gemacht wird, dessgleichen würde man unter denselben Umständen von einer Differentialgleichung mit Coefficienten, die bezüglich die Gradzahlen 1, 2, 3, 4 biethen, zu einer transformirten mit Coefficienten des ersten Grades gelangen, deren Integral sich in geschlossener Form ohne Schwierigkeit ermitteln lässt.

Allgemein aber sieht die transformirte, in der Regel mit den Gradzahlen m, m, m, $m-1$ der Coefficienten versehene Gleichung so aus:

$$(a_3 x^m + b_3 x^{m-1} + c_3 x^{m-2} + \ldots) z''' + \left(\left(\frac{1}{2} B'' + 3a_3\mu\right) x^m + \left(\frac{1}{2} C' + 3b_3\mu\right) x^{m-1} + \ldots\right) z'' +$$

$$+\left(\left(C + B''\mu + 3a_3(\mu^2+\lambda_1)\right)x^m + \ldots\right) z' + \left(\left(E + D'\mu + \frac{1}{2} C''(\mu^2+\lambda_1) + b_3(\mu^3+3\lambda_1\mu)\right)x^{m-1} + \ldots\right) z = 0,$$

und erleidet abermals eine auch auf das Integral sich fortpflanzende Formänderung, wenn die Gleichung (44) in μ zwei oder gar drei gleiche Wurzeln besitzt. Eine Doppelwurzel $\mu = \mu_1 = \mu_2$ wird nämlich nebst der (44) auch die folgende, durch Differentiation nach μ erhaltene, erfüllen:

$$C + B''\mu + 3a_3 (\mu^2 + \lambda_1) = 0,$$

wodurch augenscheinlich die Gradzahlen der Coefficienten für eben diesen anstatt μ gesetzten doppelten Wurzelwerth übergehen in m, m, $m-1$, $m-1$, während das Verhalten für $\mu = \mu_3$ das alte bleibt. Dem zufolge gewinnen wir eine neue Form des allgemeinen Integrales, nämlich:

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right) dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 - \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right) dx}\, z_2 + C_3{}^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_3\right) dx}\, z_3,$$

allwo ν_1 und $-\nu_1$ die beiden Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$\left(\frac{1}{2} B'' + 3a_3\, \mu_1\right) \nu^2 + E + D'\mu_1 + \frac{1}{2} C'' (\mu_1^2 + \lambda_1) + b_3\, (\mu_1^3 + 3\lambda_1 \mu_1) = 0,$$

μ_3 die Einfache der (44), z_1, z_2 und z_3 aber Functionen der ersten Klasse sind.

Drei gleiche Wurzeln $\mu = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ leisten noch überdem der Gleichung:

$$B'' + 6a_3\, \mu = 0$$

Genüge, und bewirken eine Verwandlung der Gradzahlen in m, $m-1$, $m-1$, $m-1$ mit der Repartitionszahl $-\frac{1}{3}$, womit dann wieder die folgende Form des allgemeinen Integrales zusammenhängt:

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx}\, z_2 + C_3\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_3}{\sqrt[3]{x}}\right) dx}\, z_3.$$

ν_1, ν_2 und ν_3 sind hier die drei Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$a_3\, \nu^3 + E + D'\mu_1 + \frac{1}{2} C'' (\mu_1^2 + \lambda_1) + b_3\, (\mu_1^3 + 3\lambda_1\, \mu_1) = 0,$$

z_1, z_2, z_3 aber sind nicht nothwendig der ersten Klasse angehörige Functionen, weil hiezu vielleicht noch ein Glied, wie $\frac{\delta}{x^{\frac{2}{3}}}$ im Exponenten fehlen kann.

Auch die binomische Gleichung in ν kann gleiche Wurzeln haben, verschwindende nämlich drei an der Zahl, und es ist mit ihrem Auftreten wieder, wie gewöhnlich mit gleichen Wurzeln, ein Erscheinen anderer Repartitionszahlen in der Differentialgleichung und eine andere Irrationalform des Integrales verknüpft. Man hat nämlich für:

$$E + D'\mu_1 + \frac{1}{2} C'' (\mu_1^2 + \lambda_1) + b_3\, (\mu_1^3 + 3\lambda_1\, \mu_1) = 0$$

die Gradzahlen m, $m-1$, $m-1$, $m-2$ der Gleichungscoefficienten, und mit ihnen die Repartitionszahlen $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, -1, die auf zwei irrationale, mit Quadratwurzeln behaftete particuläre Integrale der zweiten Klasse, und auf ein drittes der ersten Klasse hindeuten. Wir gewinnen demgemäss die folgende neue Form von y:

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right) dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 - \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right) dx}\, z_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1) dx}\, z_3,$$

in welcher ν_1 und $-\nu_1$ die beiden Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$a_3\, \nu^2 + D' + C'' \mu + 3b_3\, (\mu^2 + \lambda) = 0,$$

z_1, z_2 und z_3 aber entschieden schon Functionen der ersten Klasse sind. Von z_3 steht diess ausser Zweifel, weil ihm der Abfall um die Einheit im letzten Coefficientenpaare angehört, von z_1 und

z_3 aber desshalb, weil auf das Glied $\frac{\nu}{\sqrt{x}}$ keine dritte Wurzel mehr folgen kann, nachdem eine solche in drei particulären Integralen vorhanden sein müsste, was hier, der nachgewiesenen Beschaffenheit von z_3 zufolge, nicht der Fall ist.

Allein auch die letzte erwähnte binomische Gleichung in ν kann gleiche verschwindende Wurzeln haben, wenn:

$$D' + C'' \mu + 3b_3 (\mu^2 + \lambda) = 0$$

ist, mit welchen abermals ein Uebergang der Gradzahlen in m, $m-1$, $m-2$, $m-2$ und der Repartitionszahlen in $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, sohin der Form des Integrales in:

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx} z_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx} z_2 + C_3\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx} z_3$$

verknüpft ist. Hier sind ν_1, ν_2, ν_3 die drei Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$a_3 \nu^3 + F + E' \mu + \frac{1}{2} D'' (\mu^2 + \lambda) + b_3 (\mu^3 + 3\lambda\mu) = 0,$$

z_1, z_2, z_3 Functionen erster Klasse.

Wären endlich zufällig auch diese drei Werthe von ν der Nulle gleich, wegen:

$$F + E' \mu + \frac{1}{2} D'' (\mu^2 + \lambda) + b_3 (\mu^3 + 3\lambda\mu) = 0;$$

so hätte man Coefficienten vom Grade m, $m-1$, $m-2$, $m-3$ mit der gemeinsamen Repartitionszahl -1, somit drei Genüge leistende Werthe der ersten Klasse, also y bestimmt durch folgende Formel:

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)dx} z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)dx} z_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)dx} z_3.$$

In dem ungleich häufiger vorkommenden Falle, wo B **nicht verschwindet**, zu welchem wir jetzt noch zurückzukehren haben, statuiren wir, so wie früher, $\mu = 0$ und beschränken uns darauf, sämmtliche particuläre Integrale mit $e^{-\int \lambda x dx}$ zu multipliciren. Die transformirte Gleichung biethet dann die folgenden Gradzahlen ihrer Coefficienten m, m, $m+1$, $m+2$. Vom Ersten auf den Letzten derselben besteht die Steigung von zwei Einheiten, die, auf drei Coefficientenpaare vertheilt, die Repartitionszahl $\frac{2}{3}$ liefert. Wir stossen daher hier auf die folgende neue Form des allgemeinen Integrales der vorgelegten Differentialgleichung:

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1 x^{\frac{2}{3}})dx} z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_2 x^{\frac{2}{3}})dx} z_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_3 x^{\frac{2}{3}})dx} z_3,$$

in der uns die Beschaffenheit der Functionen z_1, z_2, z_3 noch ganz unbekannt ist, μ_1, μ_2, μ_3 aber die drei Wurzeln sind der binomischen Gleichung:

$$a_3 \mu^3 + B = 0.$$

Hiemit wäre die Discussion dieses zweiten Beispieles beendigt, bis auf die Fälle von gebrochenen Repartitionszahlen, die wir später untersuchen wollen; und da wir gesehen haben, wie eine

der niedereren Ordnungszahl angehörige Differentialgleichung zu einer nicht unbeträchtlichen Anzahl von Formen des Integrales führt; so erwarten wir natürlich von Differentialgleichungen höherer Ordnungen mit beträchtlicheren Ansteigungen selbst bei durchwegs ganzen Repartitionszahlen eine noch viel reichere Mannigfaltigkeit. Doch biethen, wenn man mit den Grundregeln der Formenlehre versehen ist, weder die bei einer solchen Untersuchung vorkommenden Rechnungen, noch die damit verknüpften Betrachtungen eine besondere Schwierigkeit, und es stehen namentlich die folgenden zwei leitenden analytischen Wahrnehmungen fest:

Erstens: Eine Formänderung der Gleichung und ihres Integrales findet in der Regel nur Statt, wenn man bei der Untersuchung auf gleiche Wurzeln stösst. Gewöhnlich führen die von Null verschiedenen unter ihnen von rationalen zu irrationalen Formen, dagegen die Verschwindenden der binomischen Gleichungen, entweder den Uebergang von einer irrationalen Form zur anderen, oder auch zur rationalen zurück begleiten.

Zweitens: Verwandeln sich die ganzen in gebrochene Repartitionszahlen, so können die Nenner derselben die Ordnungszahl der Gleichung nicht überschreiten, vermögen aber alle unter derselben liegenden Werthe anzunehmen. Hieraus fliesst von selbst die Beschaffenheit der Irrationalgrössen, die in den exponentiellen Assymptotengleichungen der particulären Integrale erscheinen können.

Wir fügen hier der klareren Uebersicht wegen eine ähnliche Zusammenstellung der verschiedenen Formen bei, welche der allgemeine Werth von y in der untersuchten Differentialgleichung anzunehmen vermag, mit gleichzeitiger Angabe der Gleichungen, denen die darin enthaltenen, mit λ, μ, ν bezeichneten Coefficienten Genüge leisten müssen, und der im Verlaufe der Rechnungen erspriesslichen Bezeichnungen. In all diesen Formeln bedeutet der Buchstabe z eine bereits zur ersten Klasse herabgekommene Function, während $\mathfrak{z}$ eine solche vorstellt, von der diess mindestens noch nicht erwiesen ist.

$$\left[a_3 x^m + b_3 x^{m-1} + c_3 x^{m-2} + \ldots\right] y''' + \left[a_2 x^{m+1} + b_2 x^m + c_2 x^{m-1} + \ldots\right] y'' +$$
$$+ \left[a_1 x^{m+2} + b_1 x^{m+1} + c_1 x^m + \ldots\right] y' + \left[a_0 x^{m+3} + b_0 x^{m+2} + c_0 x^{m+1} + \ldots\right] y = 0.$$

$$\left[a_3 x^m + b_3 x^{m-1} + c_3 x^{m-2} + \ldots\right] z''' + \frac{1}{2}\left[A'' x^{m+1} + K'' x^m + L'' x^{m-1} + \ldots\right] z'' +$$
$$+ \left[A' x^{m+2} + (B' + A''\mu) x^{m+1} + K' x^m + L' x^{m-1} + M' x^{m-2} + \ldots\ldots\right] z' +$$
$$+ \left[A x^{m+3} + (B + A'\mu) x^{m+2} + H x^{m+1} + K x^m + L x^{m-1} + M x^{m-2} + N x^{m-3} + \ldots\right] z = 0.$$

$$A = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \qquad A' = 3a_3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1, \qquad A'' = 6a_3\lambda + 2a_2$$
$$B = b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0. \qquad B' = 3b_3\lambda^2 + 2b_2\lambda + b_1, \qquad B'' = 6b_3\lambda + 2b_2$$
$$C = c_3\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0, \qquad C' = 3c_3\lambda^2 + 2c_2\lambda + c_1, \qquad C'' = 6c_3\lambda + 2c_2$$

....

$$H = C + B'\mu + \frac{1}{2} A'' (\mu^2 + \lambda)$$

$$K = D + C'\mu + \frac{1}{2} B'' (\mu^2 + \lambda) + a_3 (\mu^3 + 3\mu\lambda)$$

$$L = E + D'\mu + \frac{1}{2} C'' (\mu^2 + \lambda) + b_3 (\mu^3 + 3\mu\lambda)$$

$$M = F + E'\mu + \frac{1}{2} D'' (\mu^2 + \lambda) + c_3 (\mu^3 + 3\mu\lambda)$$

$$N = G + F'\mu + \frac{1}{2} E'' (\mu^2 + \lambda) + d_3 (\mu^3 + 3\mu\lambda).$$

$$H' = B' + A''\mu$$

$$K' = C' + B''\mu + 3a_3 (\mu^2 + \lambda) \qquad K'' = B'' + 6a_3\mu$$

$$L' = D' + C''\mu + 3b_3 (\mu^2 + \lambda) \qquad L'' = C'' + 6b_3\mu$$

$$M' = E' + D''\mu + 3c_3 (\mu^2 + \lambda) \qquad M'' = D'' + 6c_3\mu.$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_2 x + \mu_2)\,dx}\, z_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_3 x + \mu_3)\,dx}\, z_3.$$

$$A = 0, \qquad B + A'\mu = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_2)\,dx}\, z_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_3 x + \mu_3)\,dx}\, z_3.$$

$A = A' = B = H = 0$ zur Bestimmung von λ_1, μ_1, μ_2.

$A = 0, \qquad B + A'\mu = 0$ zur Bestimmung von λ_3, μ_3

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_3 x + \mu_3)\,dx}\, z_3.$$

$A = A' = B = H = H' = K = 0$ zur Bestimmung von λ_1 und μ_1

$A = 0, \qquad B + A'\mu = 0$ zur Bestimmung von λ_3 und μ_3.

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_2)\,dx}\, z_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_3)\,dx}\, z_3.$$

$$A = A' = A'' = B = B' = C = 0, \qquad K = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_2)\,dx}\, z_3$$

$$A = A' = A'' = B = B' = C = 0, \qquad K = K' = L = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, z_3.$$

$$A = A' = A'' = B = B' = C = 0, \qquad K = K' = K'' = L = L' = M$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1 \sqrt{x})\,dx}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x - \mu_1 \sqrt{x})\,dx}\, \mathfrak{z}_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_3 x + \mu_3)\,dx}\, z_3.$$

$A = A' = 0, \qquad \frac{1}{2} A''\mu^2 + B = 0$ zur Bestimmung von λ_1 und μ_1.

$A = 0, \qquad B + A'\mu = 0$ zur Bestimmung von λ_3 und μ_3.

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right)dx}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 - \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right)dx}\, \mathfrak{z}_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_2 x + \mu_2)\,dx}\, \mathfrak{z}_3.$$

$A = A' = B = 0,\quad H = H' = 0,\ \frac{1}{2} A'' \nu^2 + K = 0$ zur Bestimmung von λ_1, μ_1 und ν_1.

$A = 0,\quad B + A' \mu = 0$ zur Bestimmung von λ_2 und μ_2.

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1 \sqrt{x})\,dx}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x - \mu_1 \sqrt{x})\,dx}\, \mathfrak{z}_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_2)\,dx}\, \mathfrak{z}_3.$$

$A = A' = A'' = B = 0,\quad a_3 \mu^2 + B' = 0$ zur Bestimmung von λ_1 und μ_1.

$A = A' = A'' = B = 0,\quad B' \mu + C = 0$ zur Bestimmung von λ_1 und μ_2.

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right)dx}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 - \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right)dx}\, \mathfrak{z}_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_2)\,dx}\, \mathfrak{z}_3,$$

$A = A' = A'' = B = B' = C = 0,\quad K = 0$ zur Bestimmung von λ_1, μ_1 und μ_2.

Hiezu noch $K' = 0,\quad \frac{1}{2} K'' \nu^2 + L = 0$ zur Bestimmung von ν_1.

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right)dx}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 - \frac{\nu_1}{\sqrt{x}}\right)dx}\, \mathfrak{z}_2 + C\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1)\,dx}\, \mathfrak{z}_3.$$

$$A = A' = A'' = B = B' = C = 0,\quad K = K' = K'' = L = 0,\quad a_3 \nu^2 + L' = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1 x^{\frac{2}{3}})\,dx}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_2 x^{\frac{2}{3}})\,dx}\, \mathfrak{z}_2 + C_3\, e^{\int(\lambda x_1 + \mu_3 x^{\frac{2}{3}})\,dx}\, \mathfrak{z}_3.$$

$$A = A' = A'' = 0,\quad a_3 \mu^3 + B = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_1 x^{\frac{1}{3}})\,dx}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_2 x^{\frac{1}{3}})\,dx}\, \mathfrak{z}_2 + C_3\, e^{\int(\lambda_1 x + \mu_3 x^{\frac{1}{3}})\,dx}\, \mathfrak{z}_3.$$

$$A = A' = A'' = B = B' = 0,\quad a_3 \mu^3 + C = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_2}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx}\, \mathfrak{z}_2 + C_3\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_3}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx}\, \mathfrak{z}_3.$$

$$A = A' = A'' = B = B' = C = 0,\quad K = K' = K'' = 0,\quad a_3 \nu^3 + L = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_2}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx}\, \mathfrak{z}_2 + C_3\, e^{\int\left(\lambda_1 x + \mu_1 + \frac{\nu_3}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx}\, \mathfrak{z}_3.$$

$$A = A' = A'' = B = B' = C = 0,\quad K = K' = K'' = L = L' = 0,\quad a_3 \nu^3 + M = 0.$$

Um eine klare Anschauung der in Rede stehenden Transformationsweise zu gewinnen, legen wir uns noch ein drittes und letztes Beispiel einer Differentialgleichung mit repartirten ganzen Ansteigungen der Coefficienten vor, nämlich das folgende mit der Ordnungs- und Ansteigungszahl zwei:

$$(45)\quad (a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + \ldots)\, y'' + (a_1 x^{m+2} + b_1 x^{m+1} + c_1 x^m + \ldots)\, y' + (a_0 x^{m+4} + b_0 x^{m+3} + c_0 x^{m+2} \ldots)\, y = 0.$$

Dieser Gleichung entsprechen, wenn keine der Constanten a_2 und a_0 verschwindet, zwei particuläre Integrale in der Form $e^{\int \varphi dx}$ mit Functionen φ vom zweiten Grade. Wir transformiren daher vermittelst der Substitution:

$$y = e^{\int(\lambda x^2 + \mu x + \nu)\,dx}\, z, \tag{46}$$

und setzen in bisher üblicher Weise:

$$\begin{aligned} a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 &= A \\ b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 &= B \\ c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 &= C \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

mit A', B', C', ... die ersten nach λ genommenen Differentialquotienten von A, B, C, ... noch überdem bezeichnend. Die hiedurch erhaltene Gleichung in z ist die folgende:

$$\begin{aligned} &(a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + \ldots)\, z'' + \left[A' x^{m+2} + (B' + 2a_2\mu)\, x^{m+1} + (C' + 2b_2\mu + 2a_2\nu)\, x^m + \ldots\right] z' + \\ &+\left[A x^{m+4} + (B + A'\mu) x^{m+3} + (C + B'\mu + A'\nu + a_2\mu^2)\, x^{m+2} + (D + C'\mu + B'\nu + b_2\mu^2 + 2a_2\mu\nu + 2a_2\lambda)\, x^{m+1} + \right. \\ &\left. + (E + D'\mu + C'\nu + c_2\mu^2 + 2b_2\mu\nu + 2b_2\lambda + a_2\nu^2 + a_2\mu)\, x^m + \ldots\ldots\right] z = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Sie wird einen Genüge leistenden Werth der ersten Klasse besitzen, wenn die Coefficienten λ, μ und ν so gewählt werden, dass:

$$A = 0\,, \qquad B + A'\mu = 0\,, \qquad C + B'\mu + A'\nu + a_2\mu^2 = 0 \tag{48}$$

wird, was in der Regel auf zwei verschiedene Arten geschehen kann, nachdem die erste, bloss λ enthaltende dieser Gleichungen nach eben dieser Grösse dem zweiten Grade angehört, somit zwei in den meisten Fällen ungleiche Wurzeln λ_1 und λ_2 zulässt, während die zweite zu jedem λ ein μ, die dritte zu jedem λ und μ ein einziges ν liefert, so dass man zwei Systeme von Werthen dieser Coefficienten λ_1, μ_1, ν_1 und λ_2, μ_2, ν_2 erhält, die in die folgende Form des allgemeinen Integrales eingehen:

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1)\,dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_2 x^2 + \mu_2 x + \nu_2)\,dx}\, z_2. \tag{49}$$

Diess erleidet eine Ausnahme, wenn die $A = 0$ gleiche Wurzeln $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ besitzt, für welche $A' = 0$ wird, B aber entweder von der Nulle verschieden bleiben, oder auch verschwinden kann. In dem ersteren und gewöhnlicheren dieser beiden Fälle enthält die zweite der Gleichungen (48), die μ bestimmen sollte, einen Widerspruch. Es gibt also kein zu dem angestrebten Zwecke taugliches μ. Wir sind daher genöthigt, anstatt der Substitution (46) bloss die einfachere:

$$y = e^{\int \lambda_1 x^2\,dx}\, z$$

gelten zu lassen. Ihr Resultat geht aus der (47) hervor, wenn man $\mu = \nu = 0$ setzt. Die Gradzahlen der sonach erhaltenen Gleichungscoefficienten m, $m+1$, $m+3$, mit der repartirten Ansteigung $\frac{3}{2}$, weisen auf die neue Form von y hin:

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x^{\frac{1}{2}})\,dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_2 x^{\frac{1}{2}})\,dx}\, z_2,$$

allwo μ_1 und μ_2 die Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$a_2 \mu^2 + B = 0$$

sind, z_1 und z_2 aber Functionen, die vermuthlich annoch der zweiten Klasse angehören, und zu deren fernerer Bestimmung jedesmal eine neue, später noch zu besprechende Transformation vorgenommen werden muss.

Hätte man hingegen $A = A' = B = 0$ für dasselbe λ, so würde die zweite der Gleichungen (48) identisch, was auch μ bedeuten mag, die dritte verwandelte sich in:

(50) $$C + B'\mu + a_2 \mu^2 = 0,$$

und kann nicht mehr ν, wohl aber μ bestimmen, wofür sie zwei Werthe: μ_1 und μ_2 liefert. Man kann nun durch schickliche Wahl des ν den weiteren Coefficienten von x^{m+1} zum Verschwinden bringen, d. h.:

(51) $$D + C'\mu + B'\nu + b_2 \mu^2 + 2a_2 \mu\nu + 2a_2 \lambda_1 = 0$$

machen, was, da μ in der Regel, wie wir eben gesehen haben, zwei Werthe hat, auf zwei verschiedene Arten angeht, etwa für $\nu = \nu_1$ und $\nu = \nu_2$. Die Coefficienten der transformirten Gleichung biethen jetzt Gradzahlen: m, $m+1$, m, und die Form des Integrales ist die alte (49), mit dem einzigen Unterschiede, dass λ_2 in λ_1 zu verwandeln kommt.

Wenn $A = A' = B = 0$ ist, man aber noch überdiess:

$$B' + 2a_2 \mu = 0$$

zu gleicher Zeit mit (50) hat; so wird $\mu_1 = \mu_2$, und diese Gleichheit zweier Wurzeln bewirkt abermals eine Formveränderung, da die Gradzahlen der Coefficienten: m, m, $m+1$ mit der repartirten Ansteigung $\frac{1}{2}$ unter solchen Umständen auf Quadratwurzeln hinweisen, das ν in der (51) den Coefficienten Null bekommt und desshalb durch dieselbe nicht bestimmt, im Gegentheil durch den in der Regel in ihr liegenden Widerspruch für unmöglich erklärt wird. Man beschränkt sich also auf die Substitution:

$$y = e^{\int (\lambda_1 x^2 + \mu_1 x) dx} z,$$

und erschliesst aus dem Resultate derselben, das für $\nu = 0$ aus (47) hervorgeht, die folgende neue Form des Integrales:

$$y = C_1 e^{\int (\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1 \sqrt{x}) dx} z_1 + C_2 e^{\int (\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_2 \sqrt{x}) dx} z_2.$$

Hier sind ν_1 und ν_2 die beiden Wurzeln der binomischen Gleichung:

(52) $$a_2 \nu^2 + D + C\mu_1 + b_2 \mu_1^2 + 2a_2 \lambda_1 = 0$$

und z_1, z_2 der Klasse nach noch unbestimmte Functionen.

Im Falle, dass gleichzeitig:

$$A = A' = B = B' + 2a_2\mu_1 = C + B'\mu_1 + a_2\mu_1^2 = D + C\mu_1 + b_2\mu_1^2 + 2a_2\lambda_1 = 0$$

besteht, fällt der letzterwähnte Widerspruch fort; die letzte der (48) wird identisch für jedes ν und man kann diesen, nun möglich gewordenen Coefficienten zur Aufhebung des Gliedes mit x^m in der transformirten Gleichung benützen, wenn man:

$$E + D'\mu_1 + C\nu + c_2\mu_1^2 + 2b_2\mu_1\nu + 2b_2\lambda_1 + a_2\nu^2 + a_2\mu_1 = 0$$

annimmt, was in der Regel für zwei Werthe von ν, die wir ν_1 und ν_2 heissen wollen, angeht, deren jeder der transformirten Gleichung die wesentlich einfachere Gestalt:

$$(a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + \ldots\ldots) z'' + \left[(C + 2b_2\mu + 2a_2\nu)x^m + \ldots\ldots\right] z' +$$
$$+ \left[(F + E'\mu + D'\nu + d_2\mu^2 + 2c_2\mu\nu + 2c_2\lambda + b_2\nu^2 + b_2\mu) x^{m-1} + \ldots\ldots\right] z = 0$$

verleiht, mit den Gradzahlen: m, m, $m-1$ der Coefficienten, in Folge deren wir uns zur alten Form (49) zurückgeführt sehen, mit dem Unterschiede, dass in derselben λ_2 durch λ_1, und μ_2 durch μ_1 ersetzt werden muss.

Der Fall gleicher Wurzeln $\nu = \nu_1 = \nu_2$ bildet hievon wieder eine und zwar die letzte Ausnahme, man hat in demselben gleichzeitig:

$$A = A' = B = B' + 2a_2\mu_1 = C + B'\mu_1 + a_2\mu_1^2 = D + C'\mu_1 + b_2\mu_1^2 + 2a_2\lambda_1 =$$
$$= C + 2b_2\mu_1 + 2a_2\nu_1 = E + D'\mu_1 + C\nu_1 + c_2\mu_1^2 + 2b_2\mu_1\nu_1 + 2b_2\lambda_1 + a_2\nu_1^2 + a_2\mu_1 = 0.$$

Die Gradzahlen der Differentialgleichungscoefficienten m, $m-1$, $m-1$, mit der Repartitionszahl $-\frac{1}{2}$ deuten hier auf die folgende irrationale Form des allgemeinen Integrales:

$$y = C_1 e^{\int\left(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1 + \frac{\sigma_1}{\sqrt{x}}\right)dx} z_1 + C_2 e^{\int\left(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1 + \frac{\sigma_2}{\sqrt{x}}\right)dx} z_2,$$

allwo σ_1 und σ_2 die Wurzeln sind der binomischen Gleichung:

$$a_2\sigma^2 + F + E'\mu_1 + D'\nu_1 + d_2\mu_1^2 + 2c_2\mu_1\nu_1 + 2c_2\lambda_1 + b_2\nu_1^2 + b_2\mu_1 = 0,$$

z_1 und z_2 aber Functionen der ersten Klasse. Diese Form macht nur mehr unter der einzigen Bedingung:

$$F + E'\mu_1 + D'\nu_1 + d_2\mu_1^2 + 2c_2\mu_1\nu_1 + 2c_2\lambda_1 + b_2\nu_1^2 + b_2\mu_1 = 0,$$

der ersterhaltenen Normalform Platz, in welcher unter den angedeuteten Umständen, bei verschwindendem σ, das λ_2 durch λ_1, μ_2 durch μ_1, ν_2 durch ν_1 zu ersetzen kommt.

Zur Erzielung einer summarischen Uebersicht dient das nachstehende Verzeichniss von Formeln, bestehend aus der vorgelegten Differentialgleichung, der reducirten, dann den angenommenen Bezeichnungen und den verschiedenen Formen, die das Integral anzunehmen vermag, je in unmittelbarer Begleitung der algebraischen Gleichungen, denen die darin enthaltenen λ, μ, ν, σ Genüge leisten müssen. Mit dem Buchstaben z bezeichnen wir auch hier, so wie in den früheren Beispielen eine Function von x, die bezüglich ihres Einflusses auf die Gradzahlen der Coefficienten zur ersten Klasse herabgesunken ist, während $\mathfrak{z}$ eine Function bedeutet, bei der diess wenigstens noch in Frage steht.

$$\left[a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + \ldots\right] y'' + \left[a_1 x^{m+2} + b_1 x^{m+1} + c_1 x^m + \ldots\right] y' +$$
$$+ \left[a_0 x^{m+4} + b_0 x^{m+3} + c_0 x^{m+2} + \ldots\ldots\right] y = 0.$$

$$\left[a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + \ldots\ldots\right] z'' + \left[A' x^{m+2} + P' x^{m+1} + Q' x^m + R' x^{m-1} + \ldots\ldots\right] z' +$$
$$+ \left[A x^{m+4} + (B + A'\mu)\, x^{m+3} + P x^{m+2} + Q x^{m+1} + R x^m + S x^{m-1} + T x^{m-2} + \ldots\ldots\right] z = 0$$

$$A = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0\,, \qquad A' = 2a_2 \lambda + a_1$$
$$B = b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0\,, \qquad B' = 2b_2 \lambda + b_1$$
$$C = c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0\,, \qquad C' = 2c_2 \lambda + c_1.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P = C + B'\mu + A'\nu + a_2 \mu^2$$
$$Q = D + C'\mu + B'\nu + b_2 \mu^2 + 2a_2 \mu\nu + 2a_2 \lambda$$
$$R = E + D'\mu + C'\nu + c_2 \mu^2 + 2b_2 \mu\nu + 2b_2 \lambda + a_2 \nu^2 + a_2 \mu$$
$$S = F + E'\mu + D'\nu + d_2 \mu^2 + 2c_2 \mu\nu + 2c_2 \lambda + b_2 \nu^2 + b_2 \mu$$
$$T = G + F'\mu + E'\nu + e_2 \mu^2 + 2d_2 \mu\nu + 2d_2 \lambda + c_2 \nu^2 + c_2 \mu.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P' = B' + 2a_2 \mu$$
$$Q' = C' + 2b_2 \mu + 2a_2 \nu$$
$$R' = D' + 2c_2 \mu + 2b_2 \nu.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1)\,dx}\, z_1 \quad + \quad C_2\, e^{\int(\lambda_2 x^2 + \mu_2 x + \nu_2)\,dx}\, z_2\,,$$
$$A = 0\,, \qquad B + A'\mu = 0\,, \qquad P = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1)\,dx}\, z_1 \quad + \quad C_2\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_2 x + \nu_2)\,dx}\, z_2$$
$$A = A' = B = 0\,, \qquad P = 0\,, \qquad Q = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1)\,dx}\, z_1 \quad + \quad C_2\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_2)\,dx}\, z_2$$
$$A = A' = B = 0\,, \qquad P = P' = Q = 0\,, \qquad R = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1)\,dx}\, z_1 \quad + \quad C_2\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1)\,dx}\, z_2$$
$$A = A' = B = 0\,, \qquad P = P' = Q = 0\,, \qquad R = Q' = S = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x^{\frac{3}{2}})\,dx}\, \mathfrak{z}_1 \quad + \quad C_2\, e^{\int(\lambda_1 x^2 - \mu_1 x^{\frac{3}{2}})\,dx}\, \mathfrak{z}_2$$
$$A = A' = 0\,, \qquad a_2 \mu^2 + B = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1 \sqrt{x})\,dx}\, \mathfrak{z}_1 \quad + \quad C_2\, e^{\int(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x - \nu_1 \sqrt{x})\,dx}\, \mathfrak{z}_2$$
$$A = A' = B = 0\,, \qquad P = P' = 0\,, \qquad a_2 \nu^2 + Q = 0.$$

$$y = C_1\, e^{\int\left(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1 + \frac{\sigma_1}{\sqrt{x}}\right)dx}\, z_1 + C_2\, e^{\int\left(\lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1 - \frac{\sigma_1}{\sqrt{x}}\right)dx}\, z_2$$
$$A = A' = B = 0\,, \qquad P = P' = Q = 0\,, \qquad R = Q' = 0\,, \qquad a_2 \sigma^2 + S = 0.$$

Diese Beispiele gleicher und ganzer Ansteigungszahlen, die gelegentlich auch in ungleiche und gebrochene übergehen können, reichen zur Beleuchtung der in Rede stehenden Transformationsweise hin, und rufen offenbar die Ueberzeugung hervor, dass dieselbe, wegen der in ihr liegenden Enthüllung des analytisch vorherrschenden exponentiellen Factors bei jedem particulären Integrale, in den meisten Fällen als ein wichtiger Theil des Integrationsgeschäftes anzusehen sei, während andererseits das Zerfahren der Untersuchung in die zahlreichen verschiedenen Ausnahmsfälle, die andere stets und andere Formen des Integrales bringen, bereits darauf hinzuweisen anfängt, dass das Integriren einer Differentialgleichung eigentlich nur ein Discutiren derselben sein könne, ähnlich der Aufzählung aller derjenigen krummen Linien oder Flächen, welche aus der geometrischen Construction einer algebraischen Gleichung zwischen zwei oder drei Coordinaten entstehen.

Wir haben die so eben zu Ende geführte Untersuchung jedesmal da abgebrochen, wo sich gebrochene Repartitionszahlen zeigten, weitere Aufschlüsse über die Klasse, der dann die Functionen z_1, z_2 angehören, von einer anderen Transformation erwartend, den einzigen Fall ausgenommen, wo wir bereits zu einem irrationalen Bestandtheil der Function φ gelangt waren, der dem Gliede von der Form $\frac{\tau}{x}$ in derselben, der Beschaffenheit der Differentialgleichung nach, unmittelbar voranging, und wo wir eben diesem $z_1, z_2, \ldots$ die erste Functionsklasse entschieden zusprachen. Da man indess auf Differentialgleichungen mit gebrochenen Repartitionszahlen bei analytischen Untersuchungen entweder direkt stossen kann, oder beim Transformationsgeschäft, wie wir vielfältig gesehen haben, dahin zu gelangen vermag, so frägt sich: Was ist mit der Gleichung anzufangen, wenn sie gebrochene Repartitionszahlen biethet? Hierauf dient zur Antwort: Man kann entweder unmittelbar die eben auseinandergesetzte Transformationsweise in Anwendung bringen, oder zuvörderst eine Aenderung der unabhängigen Veränderlichen in's Werk setzen, und dann erst, wenn es noch nothwendig sein sollte, diese hierortige Transformation folgen lassen. Von der Aenderung der unabhängigen Variablen handelt der §. 5, die directe Transformation aber wollen wir hier bei der folgenden sehr einfachen Differentialgleichung von der Ordnungszahl zwei und Repartitionszahl $\frac{1}{2}$ durchführen. Diess wird genügen zu zeigen, welchen Unzukömmlichkeiten sie unterliege, die uns beinahe jedesmal nöthigen, zu einer anderen Art der Umwandlung überzugehen. Die Gleichung sei:

$$y'' + ay' + (-c^2 x + b)\, y = 0.$$

Man sieht es ihr an, dass sie zwei particuläre Integrale besitze von der Gestalt:

$$y = e^{\int \lambda \sqrt{x}\, dx}\, z. \tag{53}$$

Wir machen also diese Substitution und gelangen zur Transformirten:

$$z'' + \left[2\lambda\sqrt{x} + a\right] z' + \left[(\lambda^2 - c^2)\, x + a\lambda\sqrt{x} + b + \frac{\lambda}{2\sqrt{x}}\right] z = 0,$$

die, wenn man $\lambda = \pm c$ wählt, die Ordnungszahlen der Coefficienten $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ausweist mit den Ansteigungen $\frac{1}{2}$ und 0, somit auf die folgende Form des allgemeinen Werthes von z den Schluss gestattet:

$$z = C_1 e^{\mp\int 2c\sqrt{x}dx} z_1 + C_2 e^{\int \mu dx} z_2,$$

allwo sich für μ nach der bekannten Regel der Werth $-\frac{a}{2}$ ergibt, so dass jetzt y gegeben ist durch die Formel:

$$y = C_1 e^{\int\left(c\sqrt{x}-\frac{a}{2}\right)dx} z_1 + C_2 e^{\int\left(-c\sqrt{x}-\frac{a}{2}\right)dx} z_2,$$

in der jedoch weder z_1, noch z_2 annoch Functionen erster Klasse sind, weil der dazu benöthigte Abfall um eine Einheit in der Gradzahl vom vorletzten zum letzten Coefficienten noch nicht erzielt ist. Wir gehen also von der Substitution (53) über zur folgenden anderen, der wirklichen Beschaffenheit der gesuchten particulären Integrale näher liegenden:

$$y = e^{\int\left(\pm c\sqrt{x}-\frac{a}{2}\right)dx} u. \tag{54}$$

Die transformirte Gleichung in u:

$$u'' \pm 2c\sqrt{x}\,.\,u' + \left[b - \frac{a^2}{4} \pm \frac{c}{2\sqrt{x}}\right] u = 0$$

zeigt die Gradzahlen $0, \frac{1}{2}, 0$ der Coefficienten, folglich einen Abfall von einer halben Einheit von dem vorletzten auf den letzten derselben. Ein in der Form $e^{\int\varphi dx}$ gedachtes u, besitzt daher ein φ vom Grade $-\frac{1}{2}$, dieses fängt somit mit dem Gliede $\frac{v}{\sqrt{x}}$ an, allwo $v = \pm\frac{a^2-4b}{8c}$ ausfällt. Hiemit ist nun ein allgemeiner Werth von y gegeben, der die folgende Gestalt hat:

$$y = C_1 e^{\int\left(c\sqrt{x}-\frac{a}{2}+\frac{a^2-4b}{8c\sqrt{x}}\right)dx} v_1 + C_2 e^{\int\left(-c\sqrt{x}-\frac{a}{2}-\frac{a^2-4b}{8c\sqrt{x}}\right)dx} v_2,$$

in welchem v_1 und v_2 bereits der ersten Klasse angehörige Functionen sind. Diess bestätiget auch die neue transformirte Gleichung in v, die man durch die Substitution:

$$y = e^{\int\left(\pm c\sqrt{x}-\frac{a}{2}\pm\frac{a^2-4b}{8c\sqrt{x}}\right)dx} v \tag{55}$$

erhält, und die wirklich den erwünschten Abfall gleich Eins im letzten Coefficientenpaare darbiethet:

$$v'' \pm \left[2c\sqrt{x} + \frac{a^2-4b}{4c\sqrt{x}}\right] v' + \left[\pm\frac{c}{2\sqrt{x}} + \frac{(a^2-4b)^2}{64c^2x} \mp \frac{a^2-4b}{16cx\sqrt{x}}\right] v = 0.$$

Ihr particulärer, der ersten Klasse angehöriger, Genüge leistender Werth ist entweder v_1 oder v_2, je nachdem das Doppelzeichen $\pm$ in seiner oberen oder unteren Bedeutung genommen wird.

Schon bei diesem sehr einfachen Beispiele fallen gewisse, die Untersuchung begleitende Umstände etwas unangenehm auf, nämlich:

Erstens: Die vielen Substitutionen (53), (54), (55), zur Bestimmung eines jeden Coefficienten eine eigene, die in complicirteren Fällen sehr leicht zu den unangenehmsten Verwirrungen die Veranlassung geben können. Dieser Uebelstand lässt sich vermeiden, denn ebenso, wie wir in den vorangegangenen Beispielen bei vorhandenen ganzen Repartitionszahlen die Function φ so lange nach absteigenden ganzen Potenzen von x geordnet voraussetzten, als die Rechnung dagegen keine Einsprache

erhob, könnten wir auch hier dieselbe nach absteigenden Potenzen der Irrationalgrösse $\sqrt{x}$ entwickelt denken und auf einmal:

$$y = e^{\int\left(\lambda\sqrt{x}+\mu+\frac{\nu}{\sqrt{x}}\right)dx} z$$

annehmen, und auf eben diese Weise ist es uns erlaubt in complicirteren Fällen von Repartitionszahlen mit dem Nenner n die Function φ so lange in der Form:

$$\varphi = \lambda x^{\frac{m}{n}} + \mu x^{\frac{m-1}{n}} + \ldots\ldots + \tau x^{\frac{-n+1}{n}}$$

vorauszusetzen, bis die Rechnung durch gleiche Wurzeln die Irrationalgrösse $x^{\frac{1}{n}}$ zu verlassen, und nach einer anderen zu ordnen nöthigt. Hiebei ist jedoch nicht zu übersehen, dass dieses Verfahren, wenn es auch in der Regel das ordentlichere und übersichtlichere ist, in speciellen Fällen zu überflüssigen Rechnungsentwicklungen verleite, denn wollte man z. B. die Gleichung:

$$y^{IV} - xy = 0$$

in dieser Weise behandeln, vermittelst der Substitution:

$$y = e^{\int\left(\lambda x^{\frac{1}{4}}+\mu+\nu x^{-\frac{1}{4}}+\sigma x^{-\frac{2}{4}}+\rho x^{-\frac{3}{4}}\right)dx} z;$$

so würde man finden, dass man die Coefficienten μ, ν, σ, ρ, die sich alle aus der Rechnung der Nulle gleich ergeben, zu wiederholten Malen ganz überflüssiger Weise aufgeschrieben habe, und dass die viel einfachere Substitution:

$$y = e^{\int \lambda x^{\frac{1}{4}} dx} z$$

bereits zur transformirten Gleichung in z:

$$z^{IV} + 4\lambda x^{\frac{1}{4}}.\, z''' + \left(6\lambda^2 x^{\frac{2}{4}} + \frac{3}{2}\lambda x^{-\frac{3}{4}}\right) z'' + \left[4\lambda^3 x^{\frac{3}{4}} + 3\lambda^2 x^{-\frac{2}{4}} - \frac{8}{4}\lambda x^{-\frac{7}{4}}\right] z' +$$

$$+ \left[(\lambda^4 - 1)\, x + \frac{3}{2}\lambda^3 x^{-\frac{1}{4}} - \frac{9}{16}\lambda^2 x^{-\frac{6}{4}} + \frac{21}{64}\lambda x^{-\frac{11}{4}}\right] z = 0$$

mit dem erwünschten Abfalle im letzten Coefficientenpaare führe, wenn man λ gleich einer der vier Wurzeln der binomischen Gleichung $\lambda^4 = 1$ annimmt. Man wird also gelegentlich den kürzesten Weg der Rechnung verfehlen können, immer wird es aber möglich sein, die particulären Integrale sämmtlich zur ersten Klasse herabzusetzen.

Zweitens: Die letzte transformirte Differentialgleichung, deren Integration diese zur ersten Klasse herabgesetzten genügenden Werthe liefern soll, besitzt in der Regel irrationale Coefficienten, ein Umstand, der das Integriren erschwert, und zur Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen nöthigt, die man auch alsogleich bei dem ersten Erscheinen gebrochener Repartitionszahlen hätte unternehmen können. Es bleibt nun dem Urtheile des Rechners überlassen, ob er den hier im letzten Beispiele eingeschlagenen Weg gehen will, eher bis zur ersten Klasse herabbringend, und dann eine neue

Veränderliche einführend, oder es vorzieht umgekehrt zu verfahren, d. h. erst eine neue Veränderliche einführen, und dann, wo nöthig, auf die erste Klasse zu reduciren. Sehr oft wird er weder das eine noch das andere zu thun gut finden, und lieber die irrationalen Formen durch Annahme einer anderen Gestalt des allgemeinen Genüge leistenden Werthes gänzlich umgehen, der nämlich eines Aggregates von bestimmten Integralen zwischen Grenzen 0 und ∞ mit einer oder mehreren Beziehungsgleichungen zwischen den Integrationsconstanten, die wenigstens in dem Falle gebrochener Ansteigungen den Vorzug bedeutender Einfachheit zu besitzen scheint.

Wenn wir im Verlaufe dieses Paragraphes von dem Herabbringen einer Function zur ersten Klasse sprechen, so geschah diess sehr oft mit dem Beisatze: in Bezug auf die Gradzahlen der Coefficienten. Dieser Beisatz ist wichtig und verdient einige, seine Bedeutung erläuternde Worte. Zufolge der gegebenen Definition §. 1 oder §. 15 der Formenlehre nennt man eine Function erster Klasse diejenige, die folgende Eigenschaften mit den algebraischen gemeinschaftlich besitzt: Erstens, bei dem unendlichen Wachsen der unabhängigen Veränderlichen x sich im Verhalten einer Potenz x^p fortwährend zu nähern, sohin Differentialquotienten zu biethen, die für sehr grosse x je um eine Einheit niedriger sind in der Ordnungszahl. Zweitens, für endliche Werthe von x, welche die Function unendlich oder unstetig machen, Differentialquotienten aufzuweisen, die je um die Einheit höher sind in der Ordnungszahl. Diese zwei Eigenschaften müssen als geschiedene Functionsattribute betrachtet werden, von welchen die zweite nicht immer im Gefolge der ersten erscheint, weil es nicht immer endliche Werthe von x geben muss, die die Function unendlich machen. Auch die den Differentialgleichungscoefficienten von ihnen aufgedrückten Merkmale sind wesentlich verschiedene, denn das Verhalten für unendliche x ist in den Gradzahlen der Coefficienten abgebildet und es entspricht ihm namentlich der hier durchgängig gesuchte Abfall bei dem letzten Coefficientenpaare. Das Benehmen hingegen für endliche x, die die Function unendlich machen, ist aus der Zusammensetzung der Coefficienten aus einfachen Factoren wie $x-\alpha$ ersichtlich. Wenn wir daher bei irgend einem particulären Integrale durch Multiplication desselben mit einem exponentiellen Factor Nichts weiter erzielt haben, als den obgedachten Abfall, so folgt daraus auch Nichts weiter, als, dass die auf solche Weise behandelte Function die erste Eigenschaft der Functionen erster Klasse, sich einer Potenz x^p für sehr grosse x zu nähern, besitze, die zweite aber, wenn sie ihr nicht ohnehin schon zukam, in keinem Falle durch die hier besprochene Transformationsweise erworben haben könne. Es wären also z. B. die beiden Functionen:

$$(x-\alpha)^h \qquad \text{und} \qquad (x-\alpha)^h\, e^{\frac{1}{x-\alpha}} = (x-\alpha)^h\, e^{\int -\frac{dx}{(x-\alpha)^2}},$$

im Sinne dieser Transformationsweise beide bezüglich ihres Einflusses auf die Gradzahlen der Endcoefficienten zur ersten Klasse herabgebracht, und es gehört ihnen eine gemeinschaftliche algebraische Assymptotengleichung:

$$y = x^h$$

zu. Gleichwohl wirft die erste, als particuläres Integral eingeführt, in den ersten Coefficienten höchstens Einen Factor $x-\alpha$, die andere aber jedesmal deren zwei. Sie benimmt sich daher in dieser Beziehung

wie eine Function zweiter Klasse, und ist der Herabsetzung zur Ersten durch Multiplication mit einer Exponentialgrösse $e^{\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2}}$ annoch bedürftig. Der nächstfolgende Paragraph lehrt die Herabsetzung der particulären Integrale zur ersten Klasse auch bezüglich des Factorenbaues der Differentialgleichungs-coefficienten, wo sie nöthig ist, zu bewerkstelligen, womit dann die beabsichtigte Klassenreform in aller Strenge erzielt ist.

§. 3.

Befreiung von einem exponentiellen Factor $e^{\int\varphi dx}$ mit gebrochenem φ.

Wir wissen aus den Ergebnissen der Formenlehre, dass jeder Divisor, wie $(x-\alpha)^m$, der Function φ, so lange m nicht kleiner ist als die positive Einheit, in dem unter der Form $e^{\int\varphi dx}$ gedachten particulären Integrale in den Anfangscoefficienten der Differentialgleichung einmal oder wiederholt als Factor enthalten sei, je nachdem es nur eines, oder mehrere particuläre Integrale gibt, in denen er vorkommt; andererseits ist uns aber auch bekannt, dass sich in der Regel von jeder gebrochenen Function $\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^m}$ eine Summe von algebraischen Brüchen subtrahiren lasse, so dass der Rest für $x=\alpha$ wohl Null, oder auch am Uebergang von reell in imaginär, aber nicht mehr unendlich zu werden vermag. Diese Summe von algebraischen Brüchen ist aber:

$$\frac{\varphi(\alpha)}{(x-\alpha)^m}+\frac{\varphi'(\alpha)}{(x-\alpha)^{m-1}}+\dots\dots\dots+\frac{1}{1.2\dots h}\,\frac{\varphi^{(h)}(\alpha)}{(x-\alpha)^{m-h}},$$

wenn man sich unter h diejenige ganze positive Zahl denkt, welche zunächst unter dem ganz oder gebrochen gedachten m liegt. Hieraus folgt, dass in der Regel bei dem Vorkommen solcher Factoren in den Anfangscoefficienten der Gleichung und dem Entfallen einer Anzahl m derselben auf das Coefficientenpaar nach dem bekannten Repartitionsverfahren, die die positive Einheit überschreitet, es jedesmal ein einzelnes, oder eine Gruppe geben wird von particulären Integralen, aus deren jedem ein exponentieller Factor, wie:

$$u=e^{\int\left[\frac{\varphi(\alpha)}{(x-\alpha)^m}+\frac{\varphi'(\alpha)}{(x-\alpha)^{m-1}}+\dots\dots+\frac{1}{1.2\dots h}\frac{\varphi^{(h)}(\alpha)}{(x-\alpha)^{m-h}}\right]dx}$$

gesondert werden kann, dessen Exponent für $x=\alpha$ einen positiven, negativen oder auch imaginären unendlichen Werth bekommt, während der andere Factor nicht mehr unendlich zu werden vermag. Die Kenntniss nun dieses exponentiellen Factors, und mit ihr der Gleichung (56), die offenbar eine assymptotische Gleichung ist, insoferne als u für $x=\alpha$ einen angenäherten Werth von y darstellt, kann als ein erster Schritt zur Ermittlung des Integrales selbst betrachtet werden, und es liegt der Transformationslehre ob, denselben anzugeben, damit man das particuläre Integral, wo nöthig, davon befreien könne.

Wir wollen daher an diesem Orte den genannten exponentiellen Factor zum Gegenstand unserer Untersuchungen machen, hiebei den allereinfachsten Fällen den Vorzug gebend, um nicht all-

sogleich in gar zu weitläufige Rechnungsentwicklungen, die die Klarheit beeinträchtigen könnten, hineingezogen zu werden. Wir werden überdem nur den Fall zu diskutiren haben, wo m die positive Einheit überschreitet, nachdem derjenige, wo $m=1$ ist, schon im ersten Paragraphe umständlich erörtert wurde, und die Fälle, wo sich m unter der Einheit befindet, den der Differentialgleichung aufgedrückten Merkmalen nach, zunächst mit $m=1$ übereinstimmen. Wir nehmen demnach an, es sei eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung gegeben, mit den rationalen und ganzen Coefficienten X_2, X_1, X_0:

$$X_2\, y'' + X_1\, y' + X_0\, y = 0, \tag{57}$$

ihre Zerlegung in Factoren habe unter anderen $x-\alpha$ als solchen nachgewiesen, und namentlich sei er in ihnen bezüglich $(p+q)$-, p-, 0-Mal vorhanden, woraus man nach den Regeln der Formenlehre im Allgemeinen auf zwei particuläre Integrale den Schluss macht, bei deren einem $m=p$ und bei dem anderen $m=q$ wird, wenn $p \gtreqless q$ ist; für $p<q$ hingegen bei beiden $m=\dfrac{p+q}{2}$ ausfällt; und nur für $q=0$ schliesst man auf ein einziges particuläres Integral dieser Art, bei dem man $m=p$ hat.

Ist sonach der Werth oder die Werthe von m bestimmt, so wird man, einen von ihnen ins Auge fassend, vermittelst der Substitution:

$$y = z\,.\,e^{\int\left[\frac{\lambda}{(x-\alpha)^m}+\frac{\mu}{(x-\alpha)^{m-1}}+\frac{\nu}{(x-\alpha)^{m-2}}+\cdots\right]dx}, \tag{58}$$

aus der Gleichung in y eine andere in z ableiten können, deren Genüge leistende Werthe aus jenen der in y hervorgehen, durch Multiplication mit der Exponentielle:

$$e^{-\int\left[\frac{\lambda}{(x-\alpha)^m}+\frac{\mu}{(x-\alpha)^{m-1}}+\frac{\nu}{(x-\alpha)^{m-2}}+\cdots\right]dx}, \tag{59}$$

und wird endlich die noch unbestimmt gelassenen Coefficienten λ, μ, ν, ... wo möglich so wählen, dass das eine der ins Auge gefassten particulären Integrale von seinem assymptotischen Factor (56) befreit wird, was sich in dem gegenwärtigen einfachen Falle einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung dadurch kund gibt, dass nur der erste Coefficient der neu erhaltenen Gleichung in z für $x=\alpha$ verschwindet, und bei einer jeden Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung sich dadurch kennzeichnen wird, dass ihre sämmtlichen Coefficienten bis auf die zwei letzten eine gewisse Anzahl von Factoren $x-\alpha$ erhalten werden, und das aus der einfachen Ursache, weil die exponentiellen Factoren von der Form (56) bei verschiedenen particulären Integralen andere stets sind und andere, also die Multiplication mit einer Exponentialgrösse wie (59) auch in der Regel nur Eines davon zu befreien vermag, während die anderen, und namentlich auch die, welche keinen solchen Factor hatten, jetzt mit einem solchen versehen werden. Die auf dem Wege der Substitution (58) erhaltene transformirte Gleichung in z ist folgende:

$$X_2(x-\alpha)^{2m}z''+\left[2X_2P+X_1(x-\alpha)^m\right](x-\alpha)^m z'+\left[X_2\left(P^2+Q(x-\alpha)^{m-1}\right)+X_1P(x-\alpha)^m+X_0(x-\alpha)^{2m}\right]z=0, \tag{60}$$

mit den Werthen:

und es lassen sich an ihre Form gewisse einfache Bemerkungen knüpfen, die als Bestätigung der Angaben der Formenlehre dienen können, namentlich:

Erstens, wenn die Coefficienten X_2, X_1 und X_0 auch mit gar keinem Factor $x-\alpha$ versehen sind, so erhalten die der transformirten Gleichung dennoch deren $2m$, m, 0 an der Zahl, d. h. die Multiplication mit dem Factor (59) macht dann beide particuläre Integrale für $x=\alpha$ unstetig.

Zweitens, sind in X_2, X_1, X_0 bezüglich $p+q$, q, 0 Factoren $x-\alpha$ enthalten, und ist zudem $p>q$; so hat man in den drei unter diesen Umständen denkbaren Fällen:

a) Wo $m>p>q$ ist, in den Coefficienten der transformirten Gleichung, und bei allgemein gehaltenen Werthen von λ, μ, ν, ... bezüglich $2m$, m, 0, Factoren $x-\alpha$ an der Zahl, d. h. die bei den zwei particulären Integralen in den Exponenten der Exponentiellen vorhandenen Divisoren $(x-\alpha)^p$ und $(x-\alpha)^q$ verwandelt die Multiplication mit dem Factor (59) beide in $(x-\alpha)^m$, was ganz klar ist.

b) Wo $p>m \gtreqless q$ ist. Hier bekommen die Coefficienten der transformirten Gleichung bezüglich $p+m$, m, 0 Factoren $x-\alpha$, d. h. von den beiden in Rede stehenden particulären Integralen hat nur das eine den Divisor $(x-\alpha)^q$ mit dem anderen $(x-\alpha)^m$ verwechselt.

c) Wo $p>q>m$ wird. Hier erscheinen in den Coefficienten der transformirten Gleichung, so wie in jenen der vorgelegten, $p+q$, q solche Factoren, die Multiplication mit dem Exponentialausdruck (59) hat daher den Charakter der particulären Integrale nicht geändert.

Drittens, ist $p \gtreqless q$, so ergeben sich wieder zwei untergeordnete Fälle, nämlich:

a) Wo $m \gtreqless \frac{p+q}{2}$ ist. Die Coefficienten der transformirten Gleichung weisen $2m$, m, 0 Factoren $x-\alpha$ aus, was darauf hindeutet, dass beide particuläre Integrale den in diesem Falle ihnen gemeinschaftlichen Divisor $(x-\alpha)^{\frac{p+q}{2}}$ im Exponenten der Exponentielle mit $(x-\alpha)^m$ vertauschen, was auch so sein muss.

b) Wo $\frac{p+q}{2}>m$ ist. Hier biethen die Coefficienten der transformirten Gleichung bezüglich $p+q$, q, 0 solche Factoren, gerade so, wie die der vorgelegten Gleichung, so dass also in dem Verhalten der particulären Integrale für $x=\alpha$ sich Nichts geändert hat.

Viertens. Hat man $q=0$, also nur ein einziges particuläres Integral mit dem assymptotischen Factor (56); so bekommen die Coefficienten der transformirten Gleichung entweder $2m$, m, 0 Factoren $x-\alpha$, wenn $m>p$ ist, oder $p+m$, m, 0 solche Factoren, wenn $m<p$ ist. Diess versteht sich alles für noch ganz unbestimmt gelassene λ, μ, ν, den Angaben der Formenlehre zufolge von selbst. Anders verhält sich die Sache, wenn man über die Werthe dieser Constanten in passender Weise verfügt, so nämlich, dass der letzte Coefficient der transformirten Gleichung eine möglichst grosse Anzahl von Factoren $x-\alpha$ bekommt, wodurch eine neue Division der Gleichung durch die-

selben ermöglicht wird. Wir wollen die Constantenbestimmung in dem einfachsten Falle, $q=0$ nämlich, zuerst vornehmen; stellen uns hiebei die Coefficienten X_2, X_1 und X_0 nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ geordnet vor, also etwa:

$$\begin{aligned} X_2 &= a_2 (x-\alpha)^m + b_2 (x-\alpha)^{m+1} + c_2 (x-\alpha)^{m+2} + \dots\dots\dots\\ X_1 &= a_1 + b_1 (x-\alpha) + c_1 (x-\alpha)^2 + \dots\dots\dots \\ X_0 &= a_0 + b_0 (x-\alpha) + c_0 (x-\alpha)^2 + \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{62}$$

was $p=m$, $q=0$ gibt. Zur Befreiung des einen, in der Form:

$$y = e^{\int \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^m} dx}$$

erscheinenden particulären Integrales von seinem für $x=\alpha$ in den Ausnahmszustand gerathenden Factor dient, also gerade die Substitution (58), deren Resultat die (60) ist, die bei der angenommenen Beschaffenheit von X_2 unmittelbar durch $(x-\alpha)^m$ theilbar erscheint, und nach vollbrachter Division in den Coefficienten der Reihe nach $2m$, m, 0 an der Zahl übrig bleibende Factoren $x-\alpha$ biethet. Eine fernere Division durch $(x-\alpha)^m$ und hiemit verbundene Herabsetzung dieser Zahlen auf m, 0, 0, mit welcher die bezweckte Umwandlung des in Rede stehenden particulären Integrales verknüpft ist, wird also nur bei einer solchen Wahl von λ, μ, ν Platz greifen können, dass die Anfangsglieder des nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ geordneten letzten Coefficienten:

$$\begin{aligned} & X_2 \left(P^2 + Q (x-\alpha)^{m-1}\right) + X_1 P (x-\alpha)^m + X_0 (x-\alpha)^{2m} = \\ & = (x-\alpha)^m \left[a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda\right] + \\ & + (x-\alpha)^{m+1} \left[b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + (2a_2 \lambda + a_1) \mu\right] + \\ & + (x-\alpha)^{m+2} \left[c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + (2b_2 \lambda + b_1) \mu + a_2 \mu^2 + (2a_2 \lambda + a_1) \nu\right] + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

verschwinden m an der Zahl.

Man hat sie also der Nulle gleich zu setzen, und aus den so gewonnenen Gleichungen die Werthe von λ, μ, ν ... abzuleiten, um zu dem exponentiellen Factor der Form (58) zu gelangen, welcher aus einem der particulären Integrale gesondert werden muss, um dasselbe in Bezug auf das Verhalten für $x=\alpha$ zur ersten Klasse herabzubringen. Wir wollen jetzt, der leichteren Uebersicht wegen, dieses Verfahren in einigen noch specielleren Beispielen durchführen, und wählen als erstes derselben die folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung, mit durchaus quadratischen Coefficienten, die bereits nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ geordnet erscheinen:

$$(x-a)^2 . y'' + \left[a_1 + b_1 (x-a) + c_1 (x-a)^2\right] y' + \left[a_0 + b_0 (x-a) + c_0 (x-a)^2\right] y = 0. \tag{63}$$

Hier haben wir:

$$m = 2, \quad a_2 = 1, \quad b_2 = c_2 = 0, \quad \alpha = a,$$

und die hier angezeigte Substitution, die an die Stelle der (58) tritt, ist:

$$P=\lambda+\mu(x-a),\qquad Q=-2\lambda-\mu(x-a),\qquad P^2=\lambda^2+2\lambda\mu(x-a)+\mu^2(x-a)^2.$$

Es wird daher der letzte Coefficient der transformirten Gleichung (60) auf eben dieselbe Weise geordnet, d. h.:

$$X_2\big(P^2+Q\,(x-a)\big)+X_1P\,(x-a)^2+X_0\,(x-a)^4=$$
$$=(\lambda^2+a_1\lambda)\,(x-a)^2+\big((2\lambda+a_1)\,\mu+(b_1-2)\,\lambda\big)\,(x-a)^3+$$
$$+\big(\mu^2+(b_1-1)\,\mu+c_1\lambda+a_0\big)\,(x-a)^4+(c_1\mu+b_0)\,(x-a)^5+c_0\,(x-a)^6$$

ausfallen, während der zweite den Werth:

$$\big(2X_2P+X_1\,(x-a)^2\big)\,(x-a)^2=(2\lambda+a_1)\,(x-a)^4+(2\mu+b_1)\,(x-a)^5+c_1\,(x-a)^6$$

erhält. Die Gleichung wird also theilbar durch $(x-\alpha)^4$, wenn wir λ und μ so wählen, dass:

$$\lambda^2+a_1\lambda=0\qquad\text{und}\qquad(2\lambda+a_1)\,\mu+(b_1-2)\,\lambda=0$$

wird. Nach durchgeführter Division erscheinen in den Coefficienten 2, 0, 0 Factoren $x-\alpha$, geradeso, wie in der gegebenen Gleichung, zum Zeichen, dass auch diese nur einen der Form (64) angehörigen Genüge leistenden Werth zulasse. Diese Theilbarkeit der transformirten Gleichung wird aber offenbar erzielt auf zwei verschiedene Arten, einmal nämlich für $\lambda=0$ und $\mu=0$, welche Werthe die vorliegenden (65) erfüllen, aber die Transformirte mit der Gegebenen zusammenfallen machen, wodurch eben nur angedeutet wird, dass eines der particulären Integrale der Herabsetzung zur ersten Klasse nicht bedürftig sei; ein andermal aber durch die von Null verschiedenen Werthe:

$$\lambda=-a_1,\qquad\mu=2-b_1,$$

die der Transformirten die Gestalt:

$$(x-a)^2.\,z''+\big[A_1+B_1(x-a)+c_1(x-a)^2\big]\,z'+\big[A_0+B_0(x-a)+c_0(x-a)^2\big]\,z=0,\ ($$

mit den Bedeutungen der Coefficienten A_1, B_1, A_0, B_0:

$$A_1=-a_1,\qquad B_1=4-b_1,\qquad A_0=2-b_1-a_1c_1+a_0,\qquad B_0=2c_1-b_1c_1+b_0$$

verleihen. Das zweite particuläre Integral der Gegebenen (63) besitzt also den exponentiellen Factor:

$$e^{\int\left[-\frac{a_1}{(x-a)^2}+\frac{2-b_1}{x-a}\right]dx},$$

und wird durch Absonderung desselben in eine Function z verwandelt, die hinsichtlich ihres Verhaltens für $x=\alpha$ der ersten Klasse zugezählt werden kann, während im Gegentheile dieselbe Absonderung das z des ersten unter ihnen in der angemerkten Beziehung in eine Function zweiter Klasse umwandelt. Wollte man das Herabbringen zur ersten Klasse bei den beiden particulären Integralen in aller Strenge durchführen, so ginge diess nicht anders, als durch Verbindung der beiden Transformationsweisen, nämlich der in diesem, und im unmittelbar vorhergehenden Paragraphe gelehrten, weil, wie man sieht,

der hiezu erforderliche Abfall von einer Einheit im letzten Coefficientenpaare sich weder in der (63) noch in der (66) vorfindet, vielmehr überall gleich hohe quadratische Coefficienten ersichtlich sind, woraus sich einerlei Form der allgemeinen Werthe von y und z erschliessen lässt, nämlich:

$$y = C_1 e^{\int\theta_1 dx} u_1 + C_2 e^{\int\theta_2 dx} u_2$$

$$z = C_1 e^{\int\theta_1 dx} v_1 + C_2 e^{\int\theta_2 dx} v_2$$

mit denselben θ_1 und θ_2, die bei der (63) sowohl, wie bei der (66) aus den Coefficienten der höchsten, hier zweiten Potenz von x, die beiden gemeinschaftlich sind, hervorgehen, als Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades:

$$\theta^2 + c_1\theta + c_0 = 0.$$

Die hier besprochene Transformationsweise steht also neben derjenigen, von welcher der vorhergehende Paragraph handelt, und es ist ganz gleichgiltig, welche von beiden man zuerst die Differentialgleichung erfahren lässt. Es ist diess aber auch ganz natürlich, denn ist bei irgend einem oder bei mehreren particulären Integralen ein exponentieller Factor $e^{\int\varphi dx}$ vorhanden; so gibt die des vorhergehenden Paragraphes sämmtliche Bestandtheile von φ, die für unendliche x einen von der Nulle verschiedenen Werth bekommen, die andere, gegenwärtige hingegen liefert jene Bestandtheile desselben φ, falls sie vorhanden sind, die für einen endlichen Werth von x unendlich werden. Nachdem nun diese beiden Bestandtheile keine gemeinschaftlichen Glieder besitzen, so wird die Auffindung eines jeden von ihnen auch eine gesonderte Rechnung sein. Erscheint nun diess von der einen Seite als Vortheil, so erweist es sich von der anderen als Nachtheil, insofern als der Rechner durchaus nicht weiss, ob der exponentielle Factor (67) der Exponentielle $e^{\int\theta_1 dx}$, oder der $e^{\int\theta_2 dx}$ im Werthe von y oder auch in dem von z zugesellt werden müsse, d. h., ob er als Multiplicator von u_1 oder von u_2 erscheint. Eines nämlich und das andere hat dieselbe Gestalt der Differentialgleichung zur Folge und es hängt der Ort des Vorkommens der Exponentialgrösse (67) von den Relationen ab, die zwischen den constanten Parametern der Differentialgleichung obwalten, Relationen, die weder die Formen- noch die Transformationslehre bringen kann, die aber die wirkliche Integration zu enthüllen hat. Diess lässt sich jedoch sagen, dass, wenn u_1 in aller Strenge zur ersten Klasse gehört, u_2 zur zweiten zähle, und umgekehrt v_1 dann eine Function der zweiten, und v_2 eine der ersten Klasse sei. Besitzt man daher eine Integrationsmethode, die vorzugsweise zur Auffindung der Functionen erster Klasse, wo möglich in geschlossener Form dienlich ist, wie diejenige, die der folgende Abschnitt bringen wird; so wird sich mittelst derselben am zweckmässigsten aus der gegebenen Gleichung u_1, und aus der transformirten v_2 berechnen lassen, worauf sich das allgemeine Integral, wie folgt, zusammensetzt:

$$y = C_1 e^{\int\theta_1 dx} u_1 + C_2 e^{\int\left[\frac{\lambda}{(x-a)^2} + \frac{\mu}{x-a} + \theta_2\right] dx} v_2.$$

Wäre hingegen u_1 der zweiten und u_2 der ersten Klasse angehörig, so würde sich zweckmässiger y wiedergeben lassen in der Gestalt:

Wir machen somit hier in einem speciellen Beispiele die Bemerkung, die, wie leicht einzusehen, eine allgemeine ist, dass nämlich die besprochenen zwei Transformationsweisen alle diejenigen exponentiellen Factoren liefern, die, in den particulären Integralen erscheinend, dieselben in irgend einem Sinne zur zweiten Klasse erheben, ohne dass wir desshalb wüssten, welchem der particulären Integrale, die durch ihre Sonderung zur ersten Klasse heruntergebracht sind, sie zuzuschlagen seien.

Als zweites Beispiel erkiesen wir eine Differentialgleichung mit um die Einheit in der Gradzahl steigenden Coefficienten und drei gleichen Factoren im ersten derselben. Welche nun diese immer sind, etwa $x-\alpha$, so wird man, vorerst $x+\alpha$ anstatt x einführend, sie in x^3 verwandeln und zugleich sämmtliche Coefficienten nach aufsteigenden Potenzen von x ordnen können. Diess sei geschehen und das Ergebniss davon trage die Form:

$$x^3 y'' + (a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 + e_1 x^4) y' + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3 + e_0 x^4 + f_0 x^5) y = 0. \tag{68}$$

Die Transformation hat Statt zu finden auf dem Wege der Substitution:

$$y = e^{\int \left[\frac{\lambda}{x^3} + \frac{\mu}{x^2} + \frac{\nu}{x}\right] dx} . z, \tag{69}$$

und man hat durch Vergleichung der Formeln (60), (61) und (62) mit den vorliegenden:

$$m = 3, \qquad a_2 = 1, \qquad b_2 = c_2 = 0, \qquad \alpha = 0,$$

$$P = \lambda + \mu x + \nu x^2, \quad Q = -3\lambda - 2\mu x - \nu x^2, \quad P^2 = \lambda^2 + 2\lambda\mu x + (\mu^2 + 2\lambda\nu) x^2 + 2\mu\nu x^3 + \nu^2 x^4.$$

Der hiernach berechnete, nach aufsteigenden Potenzen von x geordnete dritte Gleichungscoefficient der Transformirten (60) wird:

$$X_2 P^2 + X_2 Q x^2 + X_1 P x^3 + X_0 x^6 =$$
$$= (\lambda^2 + a_1 \lambda) x^3 + \big((2\lambda + a_1)\mu + b_1 \lambda\big) x^4 + \big((2\lambda + a_1)\nu + \mu^2 + b_1 \mu + (c_1 - 3)\lambda\big) x^5 +$$
$$+ \big((2\mu + b_1)\nu + (c_1 - 2)\mu + d_1 \lambda + a_0\big) x^6 + \big(\nu^2 + (c_1 - 1)\nu + d_1 \mu + e_1 \lambda + b_0\big) x^7 +$$
$$+ (d_1 \nu + e_1 \mu + c_0) x^8 + (e_1 \nu + d_0) x^9 + e_0 x^{10} + f_0 x^{11};$$

ebenso der zweite und der erste:

$$(2X_2 P + X_1 x^3) x^3 = (2\lambda + a_1) x^6 + (2\mu + b_1) x^7 + (2\nu + c_1) x^8 + d_1 x^9 + e_1 x^{10},$$
$$X_2 x^6 = x^9,$$

und verwendet man λ, μ und ν so, dass:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda = 0, \qquad (2\lambda + a_1)\mu + b_1 \lambda = 0, \qquad (2\lambda + a_1)\nu + \mu^2 + b_1 \mu + (c_1 - 3)\lambda = 0$$

wird; so werden sie alle durch x^6 theilbar, was also einmal geschieht durch die Werthe:

$$\lambda = \mu = \nu = 0,$$

die diese Gleichungen erfüllen, ein andermal aber durch die von der Nulle verschiedenen:

$$\lambda = -a_1, \qquad \mu = -b_1, \qquad \nu = -c_1 + 3.$$

Im ersteren dieser beiden Fälle ist die Transformirte von der Gegebenen nicht verschieden, im zweiten wird sie die folgende:

$$(70) \quad x^3 . z'' + \left[-a_1 - b_1 x - (6-c_1)x^2 + d_1 x^3 + e_1 x^4\right] z' + \left[A_0 + B_0 x + C_0 x^2 + D_0 x^3 + e_0 x^4 + f_0 x^5\right] z = 0,$$

mit den Werthen:

$$A_0 = -b_1 - a_1 d_1 + a_0, \qquad B_0 = 6 - 2c_1 + b_1 d_1 - a_1 e_1 + b_0,$$
$$C_0 = 3d_1 - d_1 c_1 - e_1 b_1 + c_0, \qquad D_0 = 3e_1 - c_1 e_1 + d_0,$$

und trägt mit der Gegebenen die doppelte Aehnlichkeit, dass erstens in beiden die Anzahlen der Factoren x in den aufeinanderfolgenden Coefficienten 3, 0, 0 sind, was auf ein einziges particuläres Integral von der Form (69) in jeder derselben hindeutet; zweitens, die Coefficienten der höchsten und nächst niedrigeren Potenz von x sind dieselben in allen Coefficienten der Gegebenen und Transformirten. Dem entspricht nun eine ähnliche Bedeutung, wie im vorhergehenden Beispiele: gemäss den Ansteigungen nämlich um die Einheit in der Gradzahl, tragen y sowohl, wie auch z die allgemeine Form:

$$y = C_1 e^{\int [\theta_1 x + \omega_1] dx} u_1 + C_2 e^{\int [\theta_2 x + \omega_2] dx} u_2,$$
$$z = C_1 e^{\int [\theta_1 x + \omega_1] dx} v_1 + C_2 e^{\int [\theta_2 x + \omega_2] dx} v_2,$$

allwo θ_1, ω_1, θ_2, ω_2 nur von den eben erwähnten Coefficienten der höchsten Potenzen von x abhängig sind, nachdem sie die folgenden zwei algebraischen Gleichungen identisch machen:

$$\theta^2 + e_1 \theta + f_0 = 0, \qquad (2\theta + e_1)\,\omega + d_1 \theta + e_0 = 0.$$

Es nimmt also die Befreiung von einem exponentiellen Factor, wie der in der Formel (69) enthaltene, gar keinen Einfluss auf einen vorhandenen anderen, wie $e^{\int (\theta x + \omega) dx}$, und es ist gleichgiltig, welche der beiden Transformationsarten man zuerst anwendet. Hievon liegt nun wieder der Grund auf der Hand: die Bestandtheile nämlich derjenigen Function, die sich im Exponenten der Exponentielle vorfindet, der für grosse Werthe von x vorwiegende, und der für gewisse endliche x, hier für $x = 0$, einen unendlichen Werth annehmende, stehen in keinem Zusammenhange und besitzen kein gemeinschaftliches Glied, daher sie auch je durch eine eigene Rechnung gefunden werden, und es vorderhand unentschieden bleiben muss, welche der geradlinigen, zur Axe der y parallelen Assymptoten, die den Factoren des ersten Coefficienten entsprechen, in Gemeinschaft mit welcher anderen, aus den Gradzahlen der Coefficienten abgeleiteten einem und demselben particulären Integrale zuzuerkennen sei. In der Regel aber wird man zur Ermittlung des allgemeinen Integrales sowohl von der Gegebenen (68), als auch von der Transformirten (70) Gebrauch machen, die beide vorerst der Transformation des vorhergehenden Paragraphes zu unterwerfen sind, worauf man aus einer jeden von ihnen den einen, wirklich der ersten Klasse angehörigen, Genüge leistenden Werth zu suchen haben wird.

Nachdem wir diese sehr einfachen Beispiele erledigt, und vorzüglich mit Hilfe derselben die ganz allgemeine Thatsache festgestellt haben, dass die beiden Transformationsweisen dieses und des

vorhergehenden Paragraphes in keiner gegenseitigen Berührung stehen, kehren wir zu unserer allgemeineren Gleichung der zweiten Ordnung (57) zurück, und nehmen an, in ihren Coefficienten X_2, X_1, X_0 seien beziehlich $2m$, m, 0 einfache Factoren derselben Art, denen wir der Einfachheit wegen den Namen x beilegen wollen, nachdem sie sich durch schickliche Substitution stets darauf zurückführen lassen, wenn sie etwa $x-\alpha$ heissen sollten. Es sei also der Form nach:

$$\begin{aligned} X_2 &= x^{2m}\,(a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots) = x^{2m}\,\mathfrak{X}_2 \\ X_1 &= x^{m}\,\,(a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + \ldots\ldots\ldots) = x^{m}\,\mathfrak{X}_1 \\ X_0 &= \qquad a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + \ldots\ldots\ldots \;\;= \mathfrak{X}_0. \end{aligned}$$

Dem vorausgesetzten Factorenbaue entnehmen wir das Vorhandensein von zwei particulären Integralen, die auch in der Form (58) enthalten sind, wenn man sich in derselben α durch Null ersetzt denkt. Wir transformiren also vermittelst dieser Substitution, und gelangen zu einer der (60) ähnlichen transformirten Gleichung, die sich in Folge der Werthe:

$$\begin{aligned} P &= \lambda + \mu x + \nu x^2 + \rho x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q &= -m\lambda - (m-1)\,\mu x - (m-2)\,\nu x^2 - (m-3)\,\rho x^3 - \ldots\ldots \\ P^2 &= \lambda^2 + 2\lambda\mu x + (2\lambda\nu + \mu^2)\,x^2 + (2\lambda\rho + 2\mu\nu)\,x^3 + \ldots\ldots \end{aligned}$$

und der eben vorausgesetzten (71) auf die folgende Weise hinstellen lässt:

$$\mathfrak{X}_2 x^{2m}.\, z'' + \left[2\mathfrak{X}_2 P + \mathfrak{X}_1\right] x^m.\, z' + \left[\mathfrak{X}_2\,(P^2 + Qx^{m-1}) + \mathfrak{X}_1 P + \mathfrak{X}_0\right] z = 0,$$

und in ihren Coefficienten im Allgemeinen auch $2m$, m, 0 unmittelbar ersichtliche Factoren x biethet. Wir sagen im Allgemeinen, denn der vorausgesetzte Fall, wie wohl dem Anscheine nach ein specieller, ist doch sehr umfassend, nachdem durch das Verschwinden einiger der mit a, b, c, ... bezeichneten Anfangscoefficienten von $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_0$ die mannigfaltigste Zusammensetzung der X_2, X_1, X_0 aus einfachen Factoren x zu Tage gebracht werden kann, und schliessen aus diesem ersichtlichen Factorenbaue der (72), dass ihre particulären Integrale für noch unbestimmt gelassene λ, μ, ν, ... im Allgemeinen eben dieselbe Form (58) tragen, wie die der vorgelegten (57); für besondere Werthe dieser Coefficienten jedoch kann eine Theilbarkeit der Gleichung durch x^m und hiemit ein wesentlich anderer Coefficientenbau eintreten.

In der That, wählt man diese m an der Zahl vorhandenen λ, μ, ν, ... dergestalt, dass die Anfangsglieder des letzten Coefficienten der Transformirten (72) ebenfalls m an der Zahl der Nulle gleich werden; so hat man diese Theilbarkeit durch x^m erzielt, und gewahrt der Factoren x in eben derselben bezüglich: m, 0, 0, die auf ein einziges particuläres Integral, wie (58) hinweisen, so dass also das andere durch diese Transformation von dem ihm anhängenden exponentiellen Factor befreit erscheint. Diese Befreiung wird aber auf zwei verschiedene Arten möglich sein, weil zwei particuläre Integrale von dieser Gestalt vorhanden sind. Hievon überzeugen wir uns durch wirkliche Entwicklung des in Rede stehenden letzten Coefficienten nach aufsteigenden Potenzen von x und Verschwindenlassen

8 *

seiner m Anfangsglieder. Der Uebersichtlichkeit wegen ist es gut bei dieser Rechnung von den folgenden Bezeichnungen Gebrauch zu machen:

$$
\begin{array}{ll}
\underset{\lambda}{A} = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\,, & \underset{\lambda}{A'} = 2a_2\lambda + a_1 \\
\underset{\lambda}{B} = b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0\,, & \underset{\lambda}{B'} = 2b_2\lambda + b_1 \\
\underset{\lambda}{C} = c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0\,. & \underset{\lambda}{C'} = 2c_2\lambda + c_1 \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
\underset{\mu}{B} = \underset{\lambda}{B} + \underset{\lambda}{A'}\mu\,, & \underset{\mu}{B'} = \underset{\lambda}{A'} \\
\underset{\mu}{C} = \underset{\lambda}{C} + \underset{\lambda}{B'}\mu + a_2\mu^2\,, & \underset{\mu}{C'} = \underset{\lambda}{B'} + 2a_2\mu \\
\underset{\mu}{D} = \underset{\lambda}{D} + \underset{\lambda}{C'}\mu + b_2\mu^2\,, & \underset{\mu}{D'} = \underset{\lambda}{C'} + 2b_2\mu \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
\underset{\nu}{C} = \underset{\mu}{C} + \underset{\mu}{B'}\nu\,, & \underset{\nu}{C'} = \underset{\mu}{B'} \\
\underset{\nu}{D} = \underset{\mu}{D} + \underset{\mu}{C'}\nu\,, & \underset{\nu}{D'} = \underset{\mu}{C'} \\
\underset{\nu}{E} = \underset{\mu}{E} + \underset{\mu}{D'}\nu + a_2\nu^2\,, & \underset{\nu}{E'} = \underset{\mu}{D'} + 2a_2\nu \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
\underset{\rho}{D} = \underset{\nu}{D} + \underset{\nu}{C'}\rho\,, & \underset{\rho}{D'} = \underset{\nu}{C'} \\
\underset{\rho}{E} = \underset{\nu}{E} + \underset{\nu}{D'}\rho\,, & \underset{\rho}{E'} = \underset{\nu}{D'} \\
\underset{\rho}{F} = \underset{\nu}{F} + \underset{\nu}{E'}\rho\,, & \underset{\rho}{F'} = \underset{\nu}{E'} \\
\underset{\rho}{G} = \underset{\nu}{G} + \underset{\nu}{F'}\rho + a_2\rho^2\,, & \underset{\rho}{G'} = \underset{\nu}{F'} + 2a_2\rho \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
\underset{\theta}{L} = \underset{\eta}{L} + \underset{\eta}{K'}\theta\,, & \underset{\theta}{L'} = \underset{\eta}{K'} \\
\underset{\theta}{M} = \underset{\eta}{M} + \underset{\eta}{L'}\theta\,, & \underset{\theta}{M'} = \underset{\eta}{L'} \\
\underset{\theta}{N} = \underset{\eta}{N} + \underset{\eta}{M'}\theta\,, & \underset{\theta}{N'} = \underset{\eta}{M'} \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\underset{\omega}{M} = \underset{\theta}{M} + \underset{\theta}{L'}\omega\,, & \underset{\omega}{M'} = \underset{\theta}{L'} \\
\underset{\omega}{N} = \underset{\theta}{N} + \underset{\theta}{M'}\omega\,, & \underset{\omega}{N'} = \underset{\theta}{M'} \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\underset{\pi}{N} = \underset{\omega}{N} + \underset{\omega}{M'}\pi\,, & \underset{\pi}{N'} = \underset{\omega}{M'} \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots
\end{array}
\qquad (73)
$$

Mit ihrer Hilfe gewinnt der nach aufsteigenden Potenzen von x entwickelte letzte Differentialgleichungscoefficient folgende Gestalt:

$$\mathfrak{X}_2\,(P^2+Qx^{m-1})+\mathfrak{X}_1 P+\mathfrak{X}_0=\underset{\lambda}{A}+\underset{\mu}{B}x+\underset{\nu}{C}x^2+\underset{\rho}{D}x^3+\dots\dots\dots\dots + \underset{\theta}{L}x^{m-2}+(\underset{\omega}{M}-ma_2\lambda)\,x^{m-1}+\left(\underset{\pi}{N}-mb_2\lambda-(m-1)\,a_2\mu\right)x^m+\dots\dots, \tag{74}$$

während der Vorletzte bis auf den Factor x^m in der folgenden ähnlichen Gestalt erscheint:

$$2\mathfrak{X}_2\,P+\mathfrak{X}_1=\underset{\lambda}{A'}+\underset{\mu}{C}x+\underset{\nu}{E'}x^2+\underset{\rho}{G'}x^3+\dots\dots\dots\dots,$$

und man erreicht das erwünschte Nullwerden seiner m Anfangsglieder, wenn man die m Grössen:

$$\lambda,\quad \mu,\quad \nu,\quad \rho,\quad \dots\dots\dots\quad \theta,\quad \omega \tag{75}$$

zieht aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\underset{\lambda}{A}&=a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0\\
\underset{\mu}{B}&=\underset{\lambda}{B}+\underset{\lambda}{A'}\mu=0\\
\underset{\nu}{C}&=\underset{\mu}{C}+\underset{\mu}{B'}\nu=\underset{\mu}{C}+\underset{\lambda}{A'}\nu=0\\
\underset{\rho}{D}&=\underset{\nu}{D}+\underset{\nu}{C'}\rho=\underset{\nu}{D}+\underset{\lambda}{A'}\rho=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\underset{\theta}{L}&=\underset{\eta}{L}+\underset{\eta}{K'}\theta=\underset{\eta}{L}+\underset{\lambda}{A'}\theta=0
\end{aligned} \tag{76}$$

$$\underset{\omega}{M}-ma_2\lambda=\underset{\theta}{M}-ma_2\lambda+\underset{\theta}{L'}\omega=\underset{\theta}{M}-ma_2\lambda+\underset{\lambda}{A'}\omega=0,$$

in welchen die Regelmässigkeit in der Bildung der auf einander folgenden Gleichungspolynome in die Augen fällt, eine Regelmässigkeit, die nur bei der letzten derselben eine Unterbrechung insoferne erleidet, als zu dem auf dieselbe Weise, wie seine Vorgänger $\underset{\lambda}{A}$, $\underset{\mu}{B}$, $\underset{\nu}{C}$, $\underset{\rho}{D}$ ... $\underset{\theta}{L}$, gebildeten $\underset{\omega}{M}$ noch das Glied $-ma_2\lambda$ hinzugefügt werden muss. Von diesen Gleichungen dient die erste zur Bestimmung von λ und gibt dafür in der Regel der Werthe zwei, die wir mit λ_1 und λ_2 bezeichnen wollen. Zu jedem von ihnen liefert die zweite augenscheinlich ein μ, die dritte, vierte u. s. w. bestimmen dann: ν, ρ, ... θ, ω in den sehr einfachen Bruchformen:

$$\mu=-\frac{\underset{\lambda}{B}}{\underset{\lambda}{A'}},\quad \nu=-\frac{\underset{\mu}{C}}{\underset{\lambda}{A'}},\quad \rho=-\frac{\underset{\nu}{D}}{\underset{\lambda}{A'}},\quad \dots\dots\quad \theta=-\frac{\underset{\eta}{L}}{\underset{\lambda}{A'}},\quad \omega=-\frac{\underset{\theta}{M}-ma_2\lambda}{\underset{\lambda}{A'}}, \tag{77}$$

in denen ebenfalls eine durchgehende Regelmässigkeit bemerkbar ist, von welcher bloss der letzte, der von ω nämlich, ob des Zusatzes $-ma_2\lambda$ in seinem Zähler eine Ausnahme macht, welche offenbar in dem Umstande begründet ist, dass das Glied $\frac{\omega}{x}$, das letzte der im Exponenten der Exponentielle in der Formel (58) enthaltenen, im Grunde dem Factor zweiter Klasse des particulären Integrales nicht mehr angehört, sondern vielmehr einen zur ersten Klasse zu zählenden Factor x^ω repräsentirt, so dass also die Auffindung dieses ω eigentlich der Transformationsweise des ersten Paragraphes zugefallen wäre, welche letztere demnach einen Bestandtheil der gegenwärtig Besprochenen bildet. Da nun Functionen verschiedener Klassen auf verschiedene Weisen im Coefficientenbaue abgebildet erscheinen,

so darf es auch nicht Wunder nehmen, dass ihre Elemente λ, μ, ν, ρ, ... θ und ω, gemäss der Klasse aus verschieden aussehenden Gleichungen hervorgehen. Wir erhalten also, so lange a_2 nicht Null und auch λ_2 von λ_1 verschieden ist, zwei Systeme von Werthen von λ, μ, ν, ρ ... θ, ω, die zu den zwei der Form nach durch den Coefficientenbau angedeuteten particulären Integralen gehörig sind, und die wir durch:

$$\lambda_1, \quad \mu_1, \quad \nu_1, \quad \rho_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \theta_1, \quad \omega_1$$

und

$$\lambda_2, \quad \mu_2, \quad \nu_2, \quad \rho_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \theta_2, \quad \omega_2$$

andeuten wollen, woraus dann die folgende Form des allgemeinen Integrales erschlossen wird:

$$(78) \quad \begin{aligned} y = \quad & C_1\, e^{\int\left(\frac{\lambda_1}{x^m}+\frac{\mu_1}{x^{m-1}}+\frac{\nu_1}{x^{m-2}}+\frac{\rho_1}{x^{m-3}}+\cdots\cdots+\frac{\theta_1}{x^2}+\frac{\omega_1}{x}\right)dx}\, z_1 + \\ & + C_2\, e^{\int\left(\frac{\lambda_2}{x^m}+\frac{\mu_2}{x^{m-1}}+\frac{\nu_2}{x^{m-2}}+\frac{\rho_2}{x^{m-3}}+\cdots\cdots+\frac{\theta_2}{x^2}+\frac{\omega_2}{x}\right)dx}\, z_2, \end{aligned}$$

die auch mit gänzlicher Ausserachtlassung der letzten Glieder $\frac{\omega_1}{x}$ und $\frac{\omega_2}{x}$ hingestellt zu werden vermag, ohne dass daraus eine Änderung hervorgeht in der Klasse, zu welcher z_1 und z_2 zu zählen sind, und die die erste sein kann, oder die zweite, je nach den in der Differentialgleichung entweder vorhandenen oder fehlenden Abfällen um die Einheit in den Gradzahlen der Endcoefficienten. Nur ist zu bemerken, dass, wenn man diese letzten Bestandtheile im Exponenten wirklich ausgelassen hat, im Verfolge der Rechnung die Nothwendigkeit eintreten kann, die beiden particulären Integrale beziehlich von den Divisoren $x^{-\omega_1}$ und $x^{-\omega_2}$ nach den Angaben von §. 1 zu befreien. Um nun diese neue Rechnung zu vermeiden, thut man gut, die erwähnten letzten Glieder, wiewohl sie zu dem Zwecke der Reduction auf die erste Klasse gerade nicht unumgänglich nothwendig wären, dazu zu nehmen.

Wir haben im vorigen Paragraphe die Bemerkung gemacht, dass allemal eine Formänderung des Integrales durch veränderte Repartitionszahlen, d. h. ein Übergang von rationalen Gebilden zu irrationalen und umgekehrt sich kund gebe, so oft irgend einer, der alldort mit λ, μ, ν, ... bezeichneten Coefficienten aus der Auflösung einer höheren Gleichung gezogene, gleiche Werthe bekommt. Diess ist hier auch der Fall und es besteht die (78) als allgemeine Form des Integrales nur unter der Bedingung, dass die beiden Wurzeln der Gleichung $\underset{\lambda}{A}=0$ wirklich von einander verschieden sind. Läge der specielle Fall $\lambda_1=\lambda_2$ vor, für welchen auch $\underset{\lambda}{A'}=0$ wird; so hören offenbar die Gleichungen (77) auf, brauchbare Werthe für μ, ν, ... zu liefern, und man ist genöthigt, zu den (76) zurückkehrend und namentlich die zweite derselben $\underset{\lambda}{B}+\underset{\lambda}{A'}\mu=0$ ins Auge fassend, zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder ist nämlich für den doppelten Wurzelwerth λ_1 das Trinom $\underset{\lambda}{B}$ von Null verschieden, oder gleich der Nulle. In dem ersten und gewöhnlichen dieser beiden Fälle existirt gar kein endlicher Werth von μ, und folglich auch kein exponentieller Factor der beiden particulären Integrale, wie in (78). Man wird also von demselben auch nicht befreien können. Dagegen liegt aber der Befreiung von dem einfacheren exponentiellen Multiplicator $e^{\int\frac{\lambda_1}{x^m}dx}$, der beiden Genüge leistenden Werthen gemeinschaftlich ist, kein Hinderniss im Wege. Diese kann man also vermittelst der Substitution:

bewirken, und wird zu einer transformirten Gleichung gelangen, die aus der (72) abgeleitet werden kann dadurch, dass man $\mu = \nu = \ldots = 0$ setzt. Sie ist wegen $P = \lambda$, $Q = -m\lambda$:

$$\mathfrak{X}_2 x^{2m} \cdot \mathfrak{z}'' + \left[2\mathfrak{X}_2 \lambda + \mathfrak{X}_1\right] x^m \cdot \mathfrak{z}' + \left[\mathfrak{X}_2 (\lambda^2 - m\lambda x^{m-1}) + \mathfrak{X}_1 \lambda + \mathfrak{X}_0\right] \mathfrak{z} = 0.$$

Das erste Glied des nach aufsteigenden Potenzen von x geordnet gedachten letzten Coefficienten ist:

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = \underset{\lambda}{A} = 0.$$

Dieser gestattet also eine Division durch x, und geht mit gehöriger Berücksichtigung der Gleichungen (74) und (73) über in:

$$\underset{\lambda}{B} x + \underset{\lambda}{C} x^2 + \underset{\lambda}{D} x^3 + \ldots\ldots + \underset{\lambda}{L} x^{m-2} + (\underset{\lambda}{M} - m a_2 \lambda)\, x^{m-1} + (\underset{\lambda}{N} - m b_2 \lambda)\, x^m + \ldots\ldots$$

In ähnlicher Weise verliert auch der vorletzte der Gleichungscoefficienten sein erstes Glied und verwandelt sich bis auf einen aus ihm ausgelassenen Factor x^m in:

$$\underset{\lambda}{B'} x + \underset{\lambda}{C'} x^2 + \underset{\lambda}{D'} x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

daher sich die bereits durch x getheilte Transformirte schreiben lässt in der Form:

$$\left[a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + \ldots\right] x^{2m-1} \cdot \mathfrak{z}'' + \left[\underset{\lambda}{B'} + \underset{\lambda}{C'} x + \underset{\lambda}{D'} x^2 + \ldots\right] x^m \mathfrak{z}' +$$

$$+ \left[\underset{\lambda}{B} + \underset{\lambda}{C} x + \underset{\lambda}{D} x^2 + \ldots + \underset{\lambda}{L} x^{m-3} + (\underset{\lambda}{M} - m a_2 \lambda)\, x^{m-2} + (\underset{\lambda}{N} - m b_2 \lambda)\, x^{m-1} + \ldots\right] \mathfrak{z} = 0.$$

Hier sind in den Coefficienten beziehlich $2m - 1$, m, 0 Factoren x ersichtlich. Der stärkste Abfall in der Anzahl derselben, bezogen auf das Coefficientenpaar, findet Statt vom ersten auf den dritten, und beträgt $2m - 1$ Einheiten auf zwei Paare, somit $m - \frac{1}{2}$ Einheiten auf das Paar. Fasst man also die beiden Werthe von $\mathfrak{z}$ unter der Form $e^{\int \varphi dx}$ auf; so gehört einem jeden φ der Divisor $x^{m-\frac{1}{2}}$ an und ein Anfangsglied, wie $\frac{\mu}{x^{m-\frac{1}{2}}}$, entspricht einem jeden derselben. Die beiden ihnen zugehörigen Werthe von μ, die μ_1 und $-\mu_1$ heissen mögen, liefert die binomische Gleichung:

$$a_2 \mu^2 + \underset{\lambda}{B} = 0,$$

und es erscheint somit das allgemeine Integral der (57) nicht mehr in seiner normalen Gestalt (78), kann aber in der folgenden, von ihr abweichenden vorausgesetzt werden:

$$y = C_1 e^{\int \left(\frac{\lambda_1}{x^m} + \frac{\mu_1}{x^{m-\frac{1}{2}}}\right) dx} \mathfrak{z}_1 + C_2 e^{\int \left(\frac{\lambda_1}{x^m} - \frac{\mu_1}{x^{m-\frac{1}{2}}}\right) dx} \mathfrak{z}_2,$$

allwo $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ Functionen sind, die in Bezug auf das Verhalten für $x = 0$ annoch der zweiten Klasse angehören, und zudem irrational, namentlich aber mit $\sqrt{x}$ versehen sind.

Es kann bezüglich derselben bemerkt werden, dass man sich wohl auf dem betretenen Wege auch die ferneren, auf $\frac{\mu}{x^{m-\frac{1}{2}}}$ folgenden Bestandtheile des Exponenten allerdings verschaffen

können, dass es aber aus denselben Gründen, welche bereits im vorigen Paragraphe auseinandergesetzt wurden, rathsamer sei, diese Irrationalformen durch Einführung einer neuen Veränderlichen vermittelst einer passenden Substitution erst in rationale umzuwandeln.

Im zweiten Falle, wo für den doppelten Wurzelwerth λ_1 zugleich $\underset{\lambda}{A} = \underset{\lambda}{A'} = \underset{\lambda}{B} = 0$ wird, ist die zweite der Gleichungen (76), die sonst zur Bestimmung von μ diente, identisch erfüllt, was auch immer dieses μ sein mag. Diess veranlasst ein Verschwinden der zwei ersten Glieder des letzten Gleichungscoefficienten, herbeigeführt durch die einzige Annahme $\lambda = \lambda_1$, und man wird das annoch unbestimmt gelassene μ immer so wählen können, dass das dritte dieser Anfangsglieder den Coefficienten Null bekommt, d. h. dass:

$$\underset{\nu}{C} = \underset{\mu}{C} + \underset{\mu}{B'}\nu = \underset{\mu}{C} + \underset{\lambda}{A'}\nu = \underset{\mu}{C} = C_\lambda + B'_\lambda\mu + a_2\mu^2 = 0 \tag{81}$$

ausfällt. Diess geschieht in der Regel für zwei verschiedene Wurzelwerthe μ_1 und μ_2. So lange diese von einander verschieden sind, wird man aus den folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\underset{\rho}{D} = \underset{\nu}{D} + \underset{\nu}{C}\rho = \underset{\nu}{D} + \underset{\lambda}{A'}\rho = \underset{\nu}{D} = \underset{\mu}{D} + \underset{\mu}{C}\nu = 0\\
&\underset{\sigma}{E} = \underset{\rho}{E} + \underset{\rho}{D'}\sigma = \underset{\rho}{E} + \underset{\lambda}{A'}\sigma = \underset{\rho}{E} = \underset{\nu}{E} + \underset{\mu}{C}\rho = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\underset{\theta}{L} = \underset{\eta}{L} + \underset{\eta}{K'}\theta = \underset{\eta}{L} + \underset{\lambda}{A'}\theta = \underset{\eta}{L} = \underset{\iota}{L} + \underset{\mu}{C}\eta = 0.\\
&\underset{\omega}{M} - ma_2\lambda = \underset{\theta}{M} + \underset{\theta}{L'}\omega - ma_2\lambda = \underset{\theta}{M} - \underset{\lambda}{A'}\omega - ma_2\lambda = \underset{\theta}{M} - ma_2\lambda = \underset{\eta}{M} + \underset{\mu}{C}\theta - ma_2\lambda = 0.\\
&\underset{\pi}{N} - mb_2\lambda - (m-1)a_2\mu = \underset{\omega}{N} - \underset{\omega}{M'}\pi - mb_2\lambda - (m-1)a_2\mu = \underset{\omega}{N} - \underset{\lambda}{A'}\pi - mb_2\lambda - (m-1)a_2\mu =\\
&\quad = \underset{\omega}{N} - mb_2\lambda - (m-1)a_2\mu = \underset{\theta}{N} - \underset{\mu}{C}\omega - mb_2\lambda - (m-1)a_2\mu = 0.
\end{aligned} \tag{82}$$

für $\nu, \rho, \dots \eta, \theta, \omega$ stets brauchbare Werthe gewinnen, die sehr einfachen nämlich:

$$\begin{aligned}
\nu &= -\frac{\underset{\mu}{D}}{\underset{\mu}{C}}\\
\rho &= -\frac{\underset{\nu}{E}}{\underset{\mu}{C}}\\
&\dots\dots\dots\\
\eta &= -\frac{\underset{\iota}{L}}{\underset{\mu}{C}}\\
\theta &= \frac{1}{\underset{\mu}{C}}\left(ma_2\lambda - \underset{\eta}{M}\right)\\
\omega &= \frac{1}{\underset{\mu}{C}}\left(mb_2\lambda + (m-1)\,a_2\mu - \underset{\theta}{N}\right).
\end{aligned} \tag{83}$$

welche eigentlich zwei Systeme repräsentiren, nämlich das der Wurzel $\mu = \mu_1$ entsprechende, das: $\nu_1, \rho_1, \ldots \eta_1, \theta_1, \omega_1$ heissen mag, und das andere der $\mu = \mu_2$ angehörende, welches wir durch $\nu_2, \rho_2, \ldots \eta_2, \theta_2, \omega_2$ andeuten wollen. Wir werden also in diesem Falle offenbar wieder zur normalen Form (78) zurückgeführt, nur dass in derselben λ_2 durch λ_1 zu ersetzen kommt, und, da die Gleichung: $a_2 \mu^2 + \underset{\lambda}{B} = 0$ unter solchen Umständen für μ zwei gleiche Wurzelwerthe Null liefert, so lässt sich gewissermassen annehmen, dass es eben diese seien, welche die Rückkehr von der irrationalen Integralform (80) zur normalen und rationalen vermittelt haben.

Gleichwie aber die Formeln (77) anwendbar zu sein aufhören, wenn $\lambda_2 = \lambda_1$ ist so hört auch die Brauchbarkeit der letzteren Gleichungen (83) auf, wenn $\mu_1 = \mu_2$ wird, weil dann der in ihnen erscheinende Divisor $\underset{\mu}{C'}$ übergeht in die Nulle. Wir sind dann genöthigt zu den früheren (82) zurückzukehren und, die erste von ihnen ins Auge fassend, zwei Fälle zu unterscheiden: den gewöhnlichen, wo

$$\underset{\mu}{D} = \underset{\lambda}{D} + \underset{\lambda}{C}\mu + b_2 \mu^2$$

von der Nulle verschieden ist, und den anderen, wo dieser Ausdruck für den Doppelwerth μ_1 verschwindet. Im ersteren enthält die sonst zur Bestimmung von ν dienende:

$$\underset{\mu}{D} + \underset{\mu}{C}\nu = 0$$

einen Widerspruch. Es existirt also kein ν und folglich tritt die normale Form wieder ausser Wirksamkeit. Da indess $\lambda = \lambda_1$ und $\mu = \mu_1$ vorhanden sind, so wird man die beiden particulären Integrale, wenn auch nicht von dem exponentiellen Faktor in (78), doch mindestens von den beiden gemeinschaftlichen einfacheren $e^{\int \left(\frac{\lambda_1}{x^m} + \frac{\mu_1}{x^{m-1}}\right) dx}$ zu befreien im Stande sein vermittelst der Substitution:

$$y = e^{\int \left(\frac{\lambda_1}{x^m} + \frac{\mu_1}{x^{m-1}}\right) dx} \mathfrak{z}.$$

Das Resultat derselben geht aus der transformirten Gleichung (72) hervor mittelst der Annahmen:

$$\begin{aligned} P &= \lambda_1 + \mu_1 x \\ Q &= - m\lambda_1 - (m-1)\,\mu_1 x \\ \underset{\lambda}{A} &= \underset{\lambda}{A'} = \underset{\lambda}{B} = 0 \\ \underset{\mu}{C} &= \underset{\mu}{C'} = 0, \end{aligned}$$

und sieht nach geschehener Division durch x^2 folgendermassen aus:

$$\begin{aligned} &(a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots)\, x^{2m-3}.\, \mathfrak{z}'' + \left[\underset{\mu}{D'} + \underset{\mu}{E'} x + \underset{\mu}{F'} x^2 + \ldots\ldots\right] x^{m-1}.\, \mathfrak{z}' + \\ &+ \Big[\underset{\mu}{D} + \underset{\mu}{E} x + \underset{\mu}{F} x^2 + \ldots + \underset{\mu}{L} x^{m-5} + (\underset{\mu}{M} - m a_2 \lambda)\, x^{m-4} + \big(\underset{\mu}{N} - m b_2 \lambda - (m-1) a_2 \mu\big)\, x^{m-3} + \\ &+ \big(\underset{\mu}{O} - m c_2 \lambda - (m-1)\, b_2 \mu\big)\, x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]\, \mathfrak{z} = 0. \end{aligned}$$

Ihre Coefficienten weisen beziehlich $2m-3$, $m-1$, 0 Factoren x aus, und der repartirte Abfall von $m - \frac{3}{2}$ Einheiten auf das Coefficientenpaar thut einen Divisor kund x^{m-1} in dem Exponenten beider

particulären Integrale. Dem zufolge erscheint der allgemeine unter solchen Umständen Genüge leistende Werth abermals in irrationaler Gestalt, nämlich:

(86) $$y = C_1\, e^{\int\left(\frac{\lambda_1}{x^m}+\frac{\mu_1}{x^{m-1}}+\frac{\nu_1}{x^{m-\frac{3}{2}}}\right)dx}\,\mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int\left(\frac{\lambda_1}{x^m}+\frac{\mu_1}{x^{m-1}}-\frac{\nu_1}{x^{m-\frac{3}{2}}}\right)dx}\,\mathfrak{z}_2.$$

Hier sind ν_1 und $-\nu_1$ die Wurzeln der binomischen Gleichung:

(87) $$a_2\,\nu^2 + \underset{\mu}{D} = 0\,,$$

$\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ aber in der Regel irrationale Functionen von x, die noch vermuthlich in gar keiner Beziehung zur ersten Classe herabgebracht sind, und deren Erscheinen zu einer Änderung der unabhängigen Veränderlichen veranlassen kann.

In dem zweiten und ungewöhnlicheren der beiden erwähnten Fälle, wo nämlich zufällig auch $\underset{\mu}{D}$ verschwindet, die (87) gleiche Wurzeln Null bekommt und die $\underset{\mu}{D}+\underset{\mu}{C'}\nu=0$ identisch erfüllt, zur Bestimmung von ν jedoch untauglich wird, findet wieder eine Rückkehr zur rationalen Form statt, denn man wird das annoch unbestimmte ν dazu verwenden können, das folgende Glied des letzten Coefficienten zu vernichten, indem man:

$$\underset{\sigma}{E} = \underset{\nu}{E} = \underset{\mu}{E} + \underset{\mu}{D'}\nu + a_2\nu^2 = 0$$

annimmt, was in der Regel zu zwei verschiedenen Werthen ν_1 und ν_2 führt, denen dann wieder paarweise brauchbare Werthe von ρ, σ, ... θ, ω entsprechen werden, gezogen aus den Gleichungen:

$$\underset{\tau}{F} = \underset{\rho}{F} = \underset{\nu}{F} + \underset{\nu}{E'}\rho = 0$$

$$\underset{\upsilon}{G} = \underset{\sigma}{G} = \underset{\rho}{G} + \underset{\rho}{F'}\sigma = \underset{\rho}{G} + \underset{\nu}{E'}\sigma = 0$$

....

$$\underset{\theta}{L} = \underset{\varepsilon}{L} = \underset{\varkappa}{L} + \underset{\varkappa}{K'}\varepsilon = \underset{\varkappa}{L} + \underset{\nu}{E'}\varepsilon = 0$$

$$\underset{\omega}{M} - ma_2\lambda = \underset{\eta}{M} - ma_2\lambda = \underset{\varepsilon}{M} + \underset{\nu}{E'}\eta - ma_2\lambda = 0$$

$$\underset{\theta}{N} - mb_2\lambda - (m-1)a_2\mu = \underset{\eta}{N} + \underset{\nu}{E'}\theta - mb_2\lambda - (m-1)\,a_2\mu = 0.$$

$$\underset{\omega}{O} - mc_2\lambda - (m-1)\,b_2\mu - (m-2)\,a_2\nu = \underset{\theta}{O} + \underset{\nu}{E'}\omega - mc_2\lambda - (m-1)\,b_2\mu - (m-2)\,a_2\nu = 0.$$

Sie sind folgende:

$$\rho = -\frac{\underset{\nu}{F}}{\underset{\nu}{E'}}\,, \qquad \sigma = -\frac{\underset{\rho}{G}}{\underset{\nu}{E'}}\,, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \varepsilon = -\frac{\underset{\varkappa}{L}}{\underset{\nu}{E'}}\,,$$

$$\eta = \frac{1}{\underset{\nu}{E'}}\left(-\underset{\varepsilon}{M} + ma_2\lambda\right)$$

$$\theta = \frac{1}{\underset{\nu}{E'}}\left(-\underset{\eta}{N} + mb_2\lambda + (m-1)\,a_2\mu\right)$$

$$\omega = \frac{1}{\underset{\nu}{E'}}\left(-\underset{\theta}{O} + mc_2\lambda + (m-1)\,b_2\mu + (m-2)\,a_2\nu\right).$$

und so sehen wir uns denn abermals kraft verschwindender gleicher Wurzeln der (87) so zu sagen zur normalen Form zurückgeführt, in welcher nur λ durch λ_1 und μ durch μ_1 ersetzt werden muss.

Es ist wohl nicht nothwendig diese Untersuchung auf dem betretenen Wege fortzusetzen. Der gleichförmige Gang derselben bringt uns die volle Überzeugung, dass ein Übergang von rationalen in irrationale Formen in der Regel Platz greifen werde, so oft sich zur Bestimmung irgend eines der Coefficienten λ, μ, ν, ... eine quadratische Gleichung ergibt, die gleiche, nicht verschwindende Wurzeln hat; wogegen dann gleiche Nullwurzeln der binomischen Gleichungen stets die Verwandlung im entgegengesetzten Sinne begleiten werden.

Kommen diese beiden Verwandlungen hinter einander vor, so bleibt die normale Form (78) geltend. Erscheint nur die erste ohne der zweiten, so wird man am besten, die Rechnung unterbrechend, zur Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen behufs der Wegschaffung der Irrationalformen greifen, und dann die ferneren Schritte den auftauchenden Formen gemäss einrichten.

Um zu sehen, in welchem Masse die Formen der Differentialgleichung, auf die man bei dieser Transformation stösst, mannigfaltiger und die Betrachtungen verwickelter werden, wenn die Ordnungszahl der Gleichung wächst, wollen wir uns noch die folgende Differentialgleichung der dritten Ordnung, in deren Coefficienten der Reihe nach $3m$, $2m$, m, 0 Factoren x befindlich sind, unter m eine ganze Zahl verstanden, als Beispiel vorlegen:

$$\mathfrak{X}_3 \,.\, x^{3m} \,.\, z''' + \mathfrak{X}_2 \,.\, x^{2m} \,.\, z'' + \mathfrak{X}_1 \,.\, x^{m} \,.\, z' + \mathfrak{X}_0 \,.\, z = 0.$$

Die aufsteigend nach x entwickelten Coefficienten $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_0$ seien:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_3 &= a_3 + b_3 x + c_3 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{X}_2 &= a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{X}_1 &= a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{X}_0 &= a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

so deutet im Allgemeinen dieser Coefficientenbau auf drei particuläre Integrale hin von der Form (78). Wir sagen: im Allgemeinen, weil durch das Verschwinden der mit a, b, c, ... bezeichneten Anfangscoefficienten in entsprechender Anzahl annoch jede andere Zusammensetzung aus Factoren x zu Tage gebracht werden kann, so z. B., dass die obigen Factorenzahlen, wegen einer möglichen vorgängigen Division durch x^m, in $2m$, m, 0, 0 übergehen können, wo dann nur zwei so gestaltete particuläre Integrale vorhanden wären; mit einem Worte es liegen in der gemachten Voraussetzung sehr viele specielle Fälle, wodurch diese zu einer sehr umfassenden wird. Um nur eines der particulären Integrale von dem durch die Formenlehre bezeichneten exponentiellen Factor zu befreien, machen wir abermals Gebrauch von der Substitution (58), eine neue abhängige Veränderliche z vermittelst derselben einführend. Die dadurch erhaltene transformirte Gleichung stellen wir zuvörderst mit Hilfe der Annahmen:

$$
(90)\quad
\begin{aligned}
P &= \lambda + \mu x + \nu x^2 + \rho x^3 + \sigma x^4 + \tau x^5 + \dots\dots\dots\dots \\
Q &= -m\lambda - (m-1)\mu x - (m-2)\nu x^2 - (m-3)\rho x^3 - (m-4)\sigma x^4 - (m-5)\tau x^5 + \dots \\
R &= m(m+1)\lambda + (m-1)m\mu x + (m-2)(m-1)\nu x^2 + (m-3)(m-2)\rho x^3 + \\
&\quad + (m-4)(m-3)\sigma x^4 + (m-5)(m-4)\tau x^5 + \dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

und durch x^{3m} dividirend hin in folgender Gestalt:

$$
(91)\quad
\begin{aligned}
&\mathfrak{X}_3 x^{3m}\,.\,z''' + \left[3P\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_2\right] x^{2m}\,.\,z'' + \left[3(P^2 + Qx^{m-1})\mathfrak{X}_3 + 2P\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_1\right] x^m\,.\,z' + \\
&\quad + \left[(P^3 + 3PQx^{m-1} + Rx^{2m-2})\mathfrak{X}_3 + (P^2 + Qx^{m-1})\mathfrak{X}_2 + P\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_0\right] z = 0,
\end{aligned}
$$

und verwandeln sie sodann durch fernere Entwicklung und Einführung der Bezeichnungen:

$$
(92)\quad
\begin{aligned}
&\underset{\lambda}{A} = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, &&\underset{\lambda}{A'} = 3a_3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1, &&\underset{\lambda}{A''} = 6a_3\lambda + 2a_2 \\
&\underset{\lambda}{B} = b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0, &&\underset{\lambda}{B'} = 3b_3\lambda^2 + 2b_2\lambda + b_1, &&\underset{\lambda}{B''} = 6b_3\lambda + 2b_2 \\
&\underset{\lambda}{C} = c_3\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0, &&\underset{\lambda}{C'} = 3c_3\lambda^2 + 2c_2\lambda + c_1, &&\underset{\lambda}{C''} = 6c_3\lambda + 2c_2 \\
&\dots\dots\dots\dots &&\dots\dots\dots\dots &&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{\mu}{B} = \underset{\lambda}{B} + \underset{\lambda}{A'}\mu, &&\underset{\mu}{B'} = \underset{\lambda}{A'} && \\
&\underset{\mu}{C} = \underset{\lambda}{C} + \underset{\lambda}{B'}\mu + \frac{1}{2}\underset{\lambda}{A''}\mu^2, &&\underset{\mu}{C'} = \underset{\lambda}{B'} + \underset{\lambda}{A''}\mu &&\underset{\mu}{C''} = \underset{\lambda}{A''} \\
&\underset{\mu}{D} = \underset{\lambda}{D} + \underset{\lambda}{C'}\mu + \frac{1}{2}\underset{\lambda}{B''}\mu^2 + a_3\mu^3, &&\underset{\mu}{D'} = \underset{\lambda}{C'} + \underset{\lambda}{B''}\mu + 3a_3\mu^2, &&\underset{\mu}{D''} = \underset{\lambda}{B''} + 6a_3\mu \\
&\underset{\mu}{E} = \underset{\lambda}{E} + \underset{\lambda}{D'}\mu + \frac{1}{2}\underset{\lambda}{C''}\mu^2 + b_3\mu^3, &&\underset{\lambda}{E'} = \underset{\lambda}{D'} + \underset{\lambda}{C''}\mu + 3b_3\mu_2, &&\underset{\mu}{E''} = \underset{\lambda}{C''} + 6b_3\mu \\
&\dots\dots\dots\dots &&\dots\dots\dots\dots &&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{\nu}{C} = \underset{\mu}{C} + \underset{\mu}{B'}\nu, &&\underset{\nu}{C'} = \underset{\mu}{B'} && \\
&\underset{\nu}{D} = \underset{\mu}{D} + \underset{\mu}{C'}\nu, &&\underset{\nu}{D'} = \underset{\mu}{C'} && \\
&\underset{\nu}{E} = \underset{\mu}{E} + \underset{\mu}{D'}\nu + \frac{1}{2}\underset{\mu}{C''}\nu^2, &&\underset{\nu}{E'} = \underset{\mu}{D'} + \underset{\mu}{C''}\nu, &&\underset{\nu}{E''} = \underset{\mu}{C''} \\
&\underset{\nu}{F} = \underset{\mu}{F} + \underset{\mu}{E'}\nu + \frac{1}{2}\underset{\mu}{D''}\nu^2, &&\underset{\nu}{F'} = \underset{\mu}{E'} + \underset{\mu}{D''}\nu, &&\underset{\nu}{F''} = \underset{\mu}{D''} \\
&\underset{\nu}{G} = \underset{\mu}{G} + \underset{\mu}{F'}\nu + \frac{1}{2}\underset{\mu}{E''}\nu^2 + a_3\nu^3, &&\underset{\nu}{G'} = \underset{\mu}{F'} + \underset{\mu}{E''}\nu + 3a_3\nu^2, &&\underset{\nu}{G''} = \underset{\mu}{E''} + 6a_3\nu \\
&\dots\dots\dots\dots &&\dots\dots\dots\dots &&\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots &&\dots\dots\dots\dots &&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

$$\underset{\eta}{K} = \underset{\varepsilon}{K} + \underset{\varepsilon}{I'}\eta\,, \qquad \underset{\eta}{K'} = \underset{\varepsilon}{I'}$$
$$\underset{\eta}{L} = \underset{\varepsilon}{L} + \underset{\varepsilon}{K'}\eta\,, \qquad \underset{\eta}{L'} = \underset{\varepsilon}{K'}$$
$$\underset{\eta}{M} = \underset{\varepsilon}{M} + \underset{\varepsilon}{L'}\eta\,, \qquad \underset{\eta}{M'} = \underset{\varepsilon}{L'}$$
$$\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots$$
$$\underset{\theta}{L} = \underset{\eta}{L} + \underset{\eta}{K'}\theta\,, \qquad \underset{\theta}{L'} = \underset{\eta}{K'}$$
$$\underset{\theta}{M} = \underset{\eta}{M} + \underset{\eta}{L'}\theta\,, \qquad \underset{\theta}{M'} = \underset{\eta}{L'}$$
$$\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots$$
$$\underset{\omega}{M} = \underset{\theta}{M} + \underset{\theta}{L'}\omega\,, \qquad \underset{\omega}{M'} = \underset{\theta}{L'}$$

in die unserem Zwecke unmittelbarer zusagende Transformirte in z:

$$\begin{aligned}
&\left[a_3 + b_3 x + c_3 x^2 + \dots\dots\dots\right] x^{3m}\,.\,z''' + \\
&+ \frac{1}{2}\left[\underset{\lambda}{A''} + \underset{\mu}{D''}x + \underset{\nu}{G''}x^2 + \dots\dots\dots\right] x^{2m}\,.\,z'' + \\
&+ \left[\underset{\lambda}{A'} + \underset{\mu}{C'}x + \underset{\nu}{E'}x^2 + \underset{\rho}{G'}x^3 + \dots\dots\right] x^{m}\,.\,z' + \\
&+ \Big[\underset{\lambda}{A} + \underset{\mu}{B}x + \underset{\nu}{C}x^2 + \underset{\rho}{D}x^3 + \dots\dots + \underset{\eta}{K}x^{m-2} + (\underset{\theta}{L} - 3ma_3\lambda^2 - ma_2\lambda)\,x^{m-1} + \\
&\quad + (\underset{\omega}{M} - 3mb_3\lambda^2 - mb_2\lambda - 3(2m-1)\,a_3\lambda\mu - (m-1)\,a_2\mu)\,x^m + \dots\dots\Big]\,z = 0.
\end{aligned} \tag{93}$$

In ihr sind gleichfalls Factoren $3m$, $2m$, m, 0 der auf einander folgenden Coefficienten ersichtlich; sie hat daher auch, so wie die Gegebene, in der Regel, d. h. für noch unbestimmt gelassene $\lambda, \mu, \nu, \dots$, drei particuläre Integrale von der Form (58), und hat solche drei sogar gewonnen, wenn sie sie ursprünglich nicht besass. Eine Ausnahme hievon machen solche specielle Werthe von $\lambda, \mu, \nu, \dots$ für welche die Anfangsglieder des letzten Coefficienten eben so viel, d. h. m an der Zahl der Nulle gleich werden, die also die folgenden m algebraischen Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
&\underset{\lambda}{A} = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \\
&\underset{\mu}{B} = \underset{\lambda}{B} + \underset{\lambda}{A'}\mu = 0 \\
&\underset{\nu}{C} = \underset{\mu}{C} + \underset{\mu}{B'}\nu = \underset{\mu}{C} + \underset{\lambda}{A'}\nu = 0 \\
&\underset{\rho}{D} = \underset{\nu}{D} + \underset{\nu}{C'}\rho = \underset{\nu}{D} + \underset{\lambda}{A'}\rho = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\underset{\eta}{K} = \dots\dots = \underset{\varepsilon}{K} + \underset{\lambda}{A'}\eta = 0 \\
&\underset{\theta}{L} - 3ma_3\lambda^2 - ma_2\lambda = \underset{\eta}{L} + \underset{\lambda}{A'}\theta - 3ma_3\lambda^2 - ma_2\lambda = 0.
\end{aligned} \tag{94}$$

In Folge dieser nämlich wird die (93) durch x^m theilbar, und biethet nach geschehener Division nur mehr $2m$, m, 0, 0 Factoren x in ihren Coefficienten dar, die auf nur zwei particuläre Integrale von der besprochenen Form (58) hindeuten, so dass also das dritte von seinem exponentiellen Factor befreit erscheint. Diess kann aber geschehen auf drei verschiedene Arten, weil von den eben aufgestellten (94) die erste, als nach λ dem dritten Grade angehörig, drei, gewöhnlich von einander verschiedene Wurzeln: λ_1, λ_2, λ_3 besitzt, und die darauf folgenden für jedes λ ein entsprechendes $\mu, \nu, \rho \ldots \eta, \theta$ liefern, was zu drei Systemen von Werthen dieser Grössen führt, die wir durch:

$$\begin{array}{llllllll} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1, & \rho_1, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \eta_1, & \theta_1 \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2, & \rho_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \eta_2, & \theta_2 \\ \lambda_3, & \mu_3, & \nu_3, & \rho_3, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \eta_3, & \theta_3 \end{array}$$

bezeichnen wollen, und die offenbar drei verschiedenen particulären Integralen angehörig sind, aus deren Zusammensetzung das Allgemeine hervorgeht, das, wie folgt, aussieht:

$$(95) \quad \begin{aligned} y = \quad & C_1\, e^{\int\left[\frac{\lambda_1}{x^m}+\frac{\mu_1}{x^{m-1}}+\frac{\nu_1}{x^{m-2}}+\cdots+\frac{\eta_1}{x^2}+\frac{\theta_1}{x}\right]dx}\, z_1 + \\ + & C_2\, e^{\int\left[\frac{\lambda_2}{x^m}+\frac{\mu_2}{x^{m-1}}+\frac{\nu_2}{x^{m-2}}+\cdots+\frac{\eta_2}{x^2}+\frac{\theta_2}{x}\right]dx}\, z_2 + \\ + & C_3\, e^{\int\left[\frac{\lambda_3}{x^m}+\frac{\mu_3}{x^{m-1}}+\frac{\nu_3}{x^{m-2}}+\cdots+\frac{\eta_3}{x^2}+\frac{\theta_3}{x}\right]dx}\, z_3 + \end{aligned}$$

Sämmtliche $\mu, \nu, \ldots\ldots \eta, \theta$ besitzen die sehr einfachen, und auch so lange brauchbaren Werthe, als der Nenner A'_λ von der Nulle verschieden ist:

$$(96) \quad \begin{aligned} & \mu = -\frac{B_\lambda}{A'_\lambda}, \qquad \nu = -\frac{C_\mu}{A'_\lambda}, \qquad \rho = -\frac{D_\nu}{A'_\lambda}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \eta = -\frac{K_\varepsilon}{A'_\lambda}, \qquad \theta = -\frac{1}{A'_\lambda}\left[L_\eta - 3ma_3\lambda^2 - ma_2\lambda\right]. \end{aligned}$$

Ihre Giltigkeit hört auf, wenn für ein der Gleichung $A_\lambda = 0$ entsprechendes λ auch $A'_\lambda = 0$ wird, was bekanntlich nur im Falle gleicher Wurzeln der erstgenannten Gleichung stattfinden kann. Dieser gleichen Wurzeln können entweder zwei oder drei vorhanden sein, und wir wollen zuerst den ersten dieser beiden Fälle, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2$ erledigen.

Da der von den zwei gleichen verschieden gedachten dritten Wurzel λ_3 bestimmte endliche Werthe von $\mu, \nu, \rho \ldots\ldots \eta, \theta$ aus den Formeln (96) angehören; so besteht jedesmal wenigstens ein particuläres Integral in der Gestalt (58), das dritte nämlich der in der (95) enthaltenen, und nur die beiden übrigen vermögen in anderer Form aufzutreten. Indem namentlich die zur Bestimmung

von μ, ν, ρ ..... η, θ dienenden Gleichungen (94) für $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ verwandelt werden in die folgenden:

$$
\left.\begin{aligned}
&\underset{\lambda}{B} = 0 \\
&\underset{\mu}{C} = \underset{\lambda}{C} + \underset{\lambda}{B'}\mu + \frac{1}{2}\underset{\lambda}{A''}\mu^2 = 0 \\
&\underset{\nu}{D} = \underset{\mu}{D} + \underset{\mu}{C}\nu = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\underset{\varepsilon}{K} = \underset{\delta}{K} + \underset{\mu}{C}\varepsilon = 0 \\
&\underset{\eta}{L} - 3ma_3\lambda_1^2 - ma_2\lambda_1 = \underset{\varepsilon}{L} + \underset{\mu}{C}\eta - 3ma_3\lambda_1^2 - ma_2\lambda_1 = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (97)
$$

von welchen die erste gewöhnlich widersprechend ist, da nur ausnahmsweise der Werth λ_1 sowohl $\underset{\lambda}{A}$, als auch $\underset{\lambda}{B}$ verschwinden macht; so gibt es unter solchen Umständen in der Regel gar kein μ, ν, ρ, ... η, θ und man ist genöthigt, es bei der Substitution:

$$
y = e^{\int \frac{\lambda_1}{x^m} dx} \cdot \mathfrak{z}
$$

zu belassen. Ihr entspricht dann eine transformirte Gleichung in $\mathfrak{z}$, deren Coefficienten nach geschehener Division durch den gemeinschaftlichen Factor x beziehlich $3m-1$, $2m-1$, m, 0 solche Factoren besitzen, was zu den Repartitionszahlen: m, $m-\frac{1}{2}$, $m-\frac{1}{2}$ führt. Demgemäss lässt sich das allgemeine Integral in folgender Gestalt wiedergeben:

$$
\begin{aligned}
y = \quad & C_1\, e^{\int \frac{dx}{x^m}(\lambda_1 + \mu_1\sqrt{x})}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int \frac{dx}{x^m}(\lambda_1 - \mu_1\sqrt{x})}\, \mathfrak{z}_2 + \\
& + C_3\, e^{\int \left(\frac{\lambda_3}{x^m} + \frac{\mu_3}{x^{m-1}} + \cdots + \frac{\eta_3}{x^2} + \frac{\theta_3}{x}\right) dx}\, \mathfrak{z}_3,
\end{aligned}
$$

allwo μ_1 den der binomischen Gleichung:

$$
\frac{1}{2} A''\mu^2 + \underset{\lambda}{B} = 0 \quad (98)
$$

Genüge leistenden Werth andeutet, $\mathfrak{z}_3$ eine Function erster Classe, $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ aber annoch zur zweiten Classe gehörige solche bezeichnen.

Eine Ausnahme hievon findet Statt, wenn die binomische (98) verschwindende gleiche Wurzeln hat, d. h. wenn für dasselbe $\lambda = \lambda_1$ zu gleicher Zeit $\underset{\lambda}{A} = \underset{\lambda}{A'} = \underset{\lambda}{B} = 0$ wird. Eine Rückkehr zur alten normalen Form (95) ist, wie gewöhnlich unter solchen Umständen, zu gewahren, denn die erste der Gleichungen (97) hört auf, eine widersprechende zu sein, und verwandelt sich vielmehr in eine identische. Die darauffolgenden dienen dann offenbar zur Bestimmung von μ, ν, ρ, ... η, und namentlich gibt die zweite, die nach μ quadratisch ist, zwei in der Regel von einander verschiedene Werthe dieser Grössen, die μ_1 und μ_2 heissen mögen.

Die Normalform (95) des allgemeinen Integrales tritt also abermals als geltend auf, nur mit dem Unterschiede, dass man in ihr λ_2 durch λ_1 zu ersetzen haben wird. Zu bemerken ist noch, dass man den Werth des letzten der gesuchten Coefficienten, nämlich θ, nun nicht mehr aus dem Systeme der Gleichungen (97), die zur Bestimmung der übrigen dienen, abzuleiten im Stande sei, sich vielmehr genöthigt sehe, das folgende im letzten Gleichungscoefficienten enthaltene mit dem Factor x^m verbundene Glied verschwinden zu lassen, um eine Gleichung zu erhalten, die zur Ermittlung von θ dient, d. h. man ist genöthigt den Formeln (97) noch die folgende hinzuzusetzen:

$$M_\theta + C_\mu \theta - 3mb_3\lambda_1^2 - mb_2\lambda_1 - 3(2m-1)\,a_2\lambda_1\mu - (m-1)\,a_1\mu = 0. \tag{99}$$

Es übt diess auf die Gestalt der transformirten Gleichung, die aus der Substitution:

$$y = e^{\int\left(\frac{\lambda_1}{x^m}+\frac{\mu_1}{x^{m-1}}+\frac{\nu_1}{x^{m-2}}+\cdots+\frac{\eta_1}{x^2}+\frac{\theta_1}{x}\right)dx}\, z$$

hervorgeht, einen gewissen Einfluss aus, den man sogleich als die natürliche Folge der vorhandenen Umstände erkennt. Ihre Coefficienten werden nämlich sämmtlich durch x^{m+1} theilbar und biethen beziehlich $2m-1$, $m-1$, 0, 0 Factoren x mit den Repartitionszahlen m, $m-1$, 0, die auf drei particuläre Integrale in der Form $e^{\int\varphi dx}$ hindeuten, deren φ beziehlich die Nenner x^m, x^{m-1}, x^0 besitzen, was auch vollkommen richtig ist, und das Hiezukommen der neuen zur Bestimmung des θ dienenden Gleichung erklärt.

Gelegentlich hat man $\mu_1 = \mu_2$ als speciellen Fall, in welchem die sonst zur Bestimmung des $\nu \ldots\ldots \eta$, θ dienenden Gleichungen (97), wegen dem verschwindenden $\overset{\mu}{C}$, ihre Dienste, in der Regel wenigstens, und so lange versagen, als $D_\mu = D_\lambda + C_\lambda\mu + \frac{1}{2} B''_\lambda\mu^2 + a_2\mu^2$ von Null verschieden ist. Man begnügt sich dann wieder mit der einfacheren Substitution:

$$y = e^{\int\left(\frac{\lambda_1}{x^m}+\frac{\mu_1}{x^{m-1}}\right)dx}\, z,$$

erhält eine Transformirte in z, deren Coefficienten beziehlich $3m-3$, $2m-3$, $m-1$, 0 Factoren x enthalten, mit den Repartitionszahlen: m, $m-\frac{3}{2}$, $m-\frac{3}{2}$. Es tritt daher unter den Bedingungen:

$$A_\lambda = A'_\lambda = B_\lambda = 0$$
$$C_\mu = C'_\mu = 0$$

die folgende neue Form des allgemeinen Integrales auf:

$$\begin{aligned} y = {} & C_1\, e^{\int\frac{dx}{x^m}(\lambda_1+\mu_1 x+\nu_1 x\sqrt{x})}\, z_1 + C_2\, e^{\int\frac{dx}{x^m}(\lambda_1+\mu_1 x-\nu_1 x\sqrt{x})}\, z_2 \\ & + C_3\, e^{\int\left(\frac{\lambda_3}{x^m}+\frac{\mu_3}{x^{m-1}}+\frac{\nu_3}{x^{m-2}}+\cdots+\frac{\eta_3}{x^2}+\frac{\theta_3}{x}\right)dx}\, z_3, \end{aligned}$$

ν_1 und $-\nu_1$ sind die beiden Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$\frac{1}{2} \underset{\lambda}{A}'' \nu^2 + \underset{\mu}{D} = 0,$$

$\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ der zweiten, $\mathfrak{z}_3$ aber der ersten Klasse angehörige Functionen.

Im Falle gleicher Wurzeln der letzterwähnten binomischen Gleichung, denen man begegnet, wenn zufällig $\underset{\mu}{D} = 0$ wird, sieht man sich abermals zur rationalen Urform zurückgeführt, nur mit dem Unterschiede, dass in derselben jetzt λ_2 durch λ_1 und μ_2 durch μ_1 zu ersetzen kommt. Die Gleichungen (97) und die (99) fahren fort ν, ρ, ... η zu bestimmen, nur zur Bestimmung des letzten derselben, von θ nämlich, hat man abermals eine neue Gleichung hinzuzufügen, die aus dem der Nulle gleich gesetzten, mit dem Factor x^{m+1} verbundenen Gliede des letzten Coefficienten der Transformirten (93) hervorgeht, was abermals seinen Grund in der, gemäss den obwaltenden Umständen, nothwendigen Form des allgemeinen Integrales seinen Grund findet.

Es ist nicht nothwendig diese Untersuchung auf dem betretenen Wege fortzusetzen, denn man sieht klar, dass, wenn die zur Bestimmung von λ dienende Gleichung $\underset{\lambda}{A} = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat, die folgenden Coefficienten μ, ν, ... höchstens doppelwerthig, durch eine quadratische Gleichung bestimmt werden können. So oft ferner eine solche quadratische Gleichung gleiche, nicht verschwindende Wurzeln besitzt, muss die rationale Urform einer irrationalen, mit Quadratwurzeln versehenen Platz machen. Gleiche Nullwurzeln der binomischen Gleichungen verwandeln diese irrationalen in die rationale Urform wieder zurück.

Unterwerfen wir jetzt den an Unterabtheilungen reicheren Fall: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ der Gleichung $\underset{\lambda}{A} = 0$ der Erörterung. Man hat hier auch $\underset{\lambda}{A} = \underset{\lambda}{A}' = \underset{\lambda}{A}'' = 0$. Gewöhnlich wird dann für ein solches λ das Polynom $\underset{\lambda}{B}$ nicht verschwinden, die zweite der Gleichungen (94) also einen Widerspruch enthalten. Die Form (58) wird somit gar keinem particulären Integrale zukommen und man wird sich mit der Substitution:

$$y = e^{\int \frac{\lambda_1}{x^m} dx} \mathfrak{z} \tag{100}$$

begnügen müssen. Die ihr entsprechende transformirte Gleichung in $\mathfrak{z}$ wird dann beziehlich Factoren x in ihren Coefficienten $3m - 1$, $2m$, m, 0 an der Zahl aufweisen, mit der dreien Coefficientenpaaren gemeinschaftlichen Repartitionszahl $m - \frac{1}{3}$, woraus die neue irrationale Form des allgemeinen Integrales hervorgeht:

$$y = C_1 e^{\int \frac{dx}{x^m}(\lambda_1 + \mu_1 x^{\frac{1}{3}})} \mathfrak{z}_1 + C_2 e^{\int \frac{dx}{x^m}(\lambda_1 + \mu_2 x^{\frac{1}{3}})} \mathfrak{z}_2 + C_3 e^{\int \frac{dx}{x^m}(\lambda_1 + \mu_3 x^{\frac{1}{3}})} \mathfrak{z}_3,$$

μ_1, μ_2 und μ_3 sind die drei Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$a_3 \mu^3 + \underset{\lambda}{B} = 0, \tag{101}$$

$\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ und $\mathfrak{z}_3$ aber der zweiten Klasse angehörige Functionen. Verschwinden die drei Werthe von μ in Folge von:

$$\underset{\lambda}{B} = 0,$$

so geht die zweite der Gleichungen (94) aus einer widersprechenden in eine identische über. Die normale Form (95) hört daher auf unzulässig zu sein. Da indess die darauffolgende dritte, nämlich:

$$\underset{,}{C} = \underset{\mu}{C} = \underset{\lambda}{C} + \underset{\lambda}{B}'\mu = 0$$

nur einen einzigen Werth von μ zu den drei gleichen λ liefert und dasselbe auch von der darauffolgenden vierten, fünften u. s. w. in Bezug auf ν, ρ, ... gesagt werden kann; so ergibt sich auch offenbar nur ein einziges particuläres Integral in der normalen Form. Um über die Beschaffenheit der beiden übrigen Aufschluss zu erhalten, ist es erspriesslich, abermals auszugehen von der einfachen Substitution (100). Die ihr entsprechende Transformirte, die aus der allgemeinen (93) durch Nullsetzen von μ, ν, ρ ..... hervorgeht, biethet, wie leicht einzusehen, die Gradzahlen der Coefficienten: $3m$, $2m+1$, $m+1$, 2 und mit ihnen die Repartitionszahlen $m-\frac{1}{2}$, $m-\frac{1}{2}$, $m-1$ dar, woraus wir drei particuläre Integrale dieser transformirten Gleichung in der Form $e^{\int \varphi dx}$ erschliessen, deren φ beziehlich die Divisoren: $x^{m-\frac{1}{2}}$, $x^{m-\frac{1}{2}}$, x^{m-1} tragen, woraus dann wieder ein allgemeines Integral der vorgelegten Differentialgleichung in der folgenden neuen, nicht mehr cubischen, sondern nur Quadratwurzeln beherbergenden Form hervorgeht:

$$y = C_1\, e^{\int \frac{dx}{x^m}[\lambda_1 + \mu_1 \sqrt{x}]}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int \frac{dx}{x^m}[\lambda_1 - \mu_1 \sqrt{x}]}\, \mathfrak{z}_2 + C_3\, e^{\int \frac{dx}{x^m}[\lambda_1 + \mu_3 x + \nu_3 x^2 + \cdots + \theta_3 x^{m-1}]}\, \mathfrak{z}_3.$$

μ_1 und $-\mu_1$ sind hier die Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$a_2\, \mu^2 + \underset{\lambda}{B}' = 0,$$

$\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ Functionen der zweiten, $\mathfrak{z}_3$ aber eine bereits der ersten Classe angehörige.

Gleichwie nun die drei verschwindenden Wurzeln der binomischen Gleichung (101) einen Übergang zweier verschiedener Irrationalformen mit dritten und zweiten Wurzeln in einander bewirkt haben, eben so vermitteln die zwei für $\underset{\lambda}{B}' = 0$ gelegentlich in Null übergehenden Wurzeln der letzten binomischen Gleichung einen ähnlichen Übergang in eine neue, ebenfalls Cubikwurzeln enthaltende Irrationalform. Unter der Voraussetzung nämlich, dass $\underset{\lambda}{A} = \underset{\lambda}{A}' = \underset{\lambda}{A}'' = \underset{\lambda}{B} = \underset{\lambda}{B}' = 0$ wird für ein und dasselbe λ, weist die der einfachen Substitution:

$$y = e^{\int \frac{\lambda_1}{x^m} dx}\, .\, \mathfrak{z} \qquad (102)$$

entsprechende transformirte Gleichung Coefficienten aus, die beziehlich dem Grade: $3m$, $2m+1$, $m+2$, 2 angehören, und denen, die dreien Coefficientenpaaren gemeinschaftliche Repartitionszahl $m-\frac{2}{3}$ entspricht, woraus wir auf die neue Gestalt des y schliessen:

$$y = C_1\, e^{\int \frac{dx}{x^m}[\lambda_1 + \mu_1 x^{\frac{1}{3}}]}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\int \frac{dx}{x^m}[\lambda_1 + \mu_2 x^{\frac{1}{3}}]}\, \mathfrak{z}_2 + C_3\, e^{\int \frac{dx}{x^m}[\lambda_1 + \mu_3 x^{\frac{1}{3}}]}\, \mathfrak{z}_3.$$

Hier bezeichnen μ_1, μ_2 und μ_3 die Wurzeln der binomischen Gleichung:

$$a_3 \mu^3 + \underset{\lambda}{C} = 0,$$

$\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$ aber in der Regel noch zur zweiten Classe gehörige Functionen.

Endlich können auch hier noch gleiche Nullwerthe von μ auftauchen, wenn zufällig zu gleicher Zeit: $\underset{\lambda}{A} = \underset{\lambda}{A'} = \underset{\lambda}{A''} = \underset{\lambda}{B} = \underset{\lambda}{B'} = \underset{\lambda}{C} = 0$ wird. Die Gradzahlen der, der einfachen Substitution (102) angehörigen transformirten Gleichung gehen dann über in: $3m$, $2m+1$, $2m+2$, 3 und biethen die gemeinsame ganze Repartitionszahl $m-1$, zum Zeichen, dass sich die irrationalen Formen in rationale umgestellt haben. Die allgemeine Substitution (58) und die ihr entsprechende allgemeine Transformirte (93) treten daher wieder in ihre Rechte ein, und es wird von den zur Bestimmung von $\lambda, \mu, \nu \ldots\ldots$ dienenden Gleichungen (94) die erste eine dreifache Wurzel λ bekommen, die zweite und dritte wird identisch erfüllt sein, die vierte aber übergehen in die nach μ dem dritten Grade angehörige:

$$\underset{\nu}{D} = \underset{\mu}{D} = \underset{\lambda}{D} + \underset{\lambda}{C}\mu + \frac{1}{2}\underset{\lambda}{B''}\mu^2 + a_2\mu^3 = 0, \tag{103}$$

man wird sohin drei, in der Regel von einander verschiedene, ihr Genüge leistende Werthe gewinnen, die sich mit μ_1, μ_2 und μ_3 bezeichnen lassen, und deren jedem ein einziges System von Werthen der folgenden Coefficienten $\nu, \rho \ldots\ldots$ angehören wird. Wir sehen uns also zu der normalen Urform des allgemeinen Integrales (95) zurückgeführt, nur mit dem Unterschiede, dass in derselben λ_2 sowohl, wie auch λ_3 durch λ_1 zu ersetzen kommt, und dass zur Bestimmung der $\lambda, \mu, \nu \ldots\ldots \theta$ nicht die m ersten Anfangsglieder des letzten Coefficienten der Transformirten (93), sondern vielmehr solche $m+2$ an der Zahl concurriren, eine Wahrnehmung, deren Grundursache auf dem unmittelbar früher betretenen Wege eingesehen werden kann.

Es ist wieder nicht nöthig, die Untersuchung in der geübten Weise, beziehlich der mit $\nu, \rho \ldots\ldots$ bezeichneten Grössen fortzusetzen, denn, was sich über die bald rationalen, bald irrationalen Werthe von μ, die den verschiedenen möglichen λ entsprechen, sagen liess, das gilt offenbar auch von den bald rational, bald irrational ausfallenden ν, je nach der Beschaffenheit der Wurzeln der cubischen Gleichung (103) in μ. Dass bei Differentialgleichungen von höheren Ordnungen die verschiedenen vorkommenden Fälle in grösserer Anzahl und die ins allgemeine Integral eingehenden Irrationalformen in grösserer Mannigfaltigkeit vorhanden sein können, ist nicht schwer einzusehen. Ihre Erkenntniss biethet aber bei dem gleichförmigen Gange der Untersuchung keine wesentliche Schwierigkeit.

Der gegenwärtige Paragraph hat bisher, wie man sieht, sich nur die Aufgabe gestellt, die Befreiung zu erwirken eines in der Form $e^{\int \varphi dx}$ gedachten particulären Integrales von einem exponentiellen Factor, wie der (56) insoferne als derselbe noch rational erscheint, oder, was dasselbe ist, als diesem particulären Integrale noch eine ganze Repartitionszahl zukommt. Weisen gebrochene Repartitionszahlen auf Irrationalgrössen hin; so ist es in den meisten Fällen räthlich, aus ähnlichen Gründen, wie die im vorhergehenden Paragraph für analoge Fälle beigebrachten, zuvörderst die Verwandlung in rationale Formen vermittelst einer passenden Substitution zu bewirken, deren Art und Weise der §. 5 lehren wird, weil man es sonst mit irrationalen Gleichungen zu thun bekommt, denen sich unsere Integrationsmethoden, wenigstens nicht mit Leichtigkeit anschmiegen. Es hat ja mit den gewöhnlichen algebraischen Gleichungen ungefähr dieselbe Bewandtniss. Die für dieselben bestehenden Auflösungs-

methoden hören im Grunde nicht auf giltig zu sein, wenn diese Gleichungen irrational werden, und doch ist es meist zweckdienlicher, durch das Verfahren des Potenzirens sie von den in ihnen enthaltenen Wurzelgrössen zu befreien.

§. 4.

Das Differenziren und Integriren der partikulären Integrale in der Differentialgleichung selbst.

Liouville hat im *Journal de l'école Polytechnique tome XIII. page* 163 eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung dadurch integrirt, dass er von den zwei partikulären Integralen derselben Differentialquotienten von allgemeiner Ordnungszahl nimmt, und die neue Gleichung bildet, der diese Genüge leisten. Da nun Liouville's Verfahren sehr geeignet ist, von dem eventuellen Nutzen dieser Transformationsweise wenigstens einen vorläufigen Begriff zu geben; so wird ihre kurze Anführung an dem gegenwärtigen Orte erspriesslich sein. Die Differentialgleichung ist die folgende:

$$(a_2 x^2 + b_2 x + c_2)\, y'' + (a_1 x + b_1)\, y' + a_0 y = 0. \tag{104}$$

Liouville führt eine neue abhängige Veränderliche ein vermittelst der Substitution:

$$y = \frac{d^{-\mu} z}{dx^{-\mu}} = z^{(-\mu)}, \tag{105}$$

und differenzirt sodann das Gleichungspolynom μ-mal Glied für Glied nach der bekannten allgemeinen Formel für die Differentiation eines Produktes. Das Resultat ist die folgende neue Gleichung in z:

$$\left[a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right] z'' + \left[(2a_2\mu + a_1)\, x + b_2\mu + b_1\right] z' + \left[a_2\mu\,(\mu - 1) + a_1\mu + a_0\right] z = 0, \tag{106}$$

welche genau dieselbe Form hat, wie jene in y, und um den einen neu eingeführten Parameter μ mehr besitzt. Dieser lässt sich daher nach Belieben, also auch so wählen, dass:

$$a_2\,\mu\,(\mu - 1) + a_1\,\mu + a_0 = 0 \tag{107}$$

wird. Bezeichnen wir die zwei dieser Gleichung zukommenden Wurzeln mit μ_1 und μ_2, so wird eine jede von ihnen, anstatt μ gesetzt. das letzte, mit dem Faktor z verbundene Glied der Gleichung verschwinden machen, und man wird haben:

$$\left[a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right] z'' + \left[(2a_2\mu_1 + a_1)\, x + b_2\mu_1 + b_1\right] z' = 0, \tag{108}$$

$$\left[a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right] z'' + \left[(2a_2\mu_2 + a_1)\, x + b_2\mu_2 + b_1\right] z' = 0. \tag{109}$$

Jede von ihnen biethet als eines der particulären Integrale eine Constante, während das andere eine Function von x ist. Die Constanten seien A_1 und A_2, die anderen $B_1 z_1$ und $B_2 z_2$, so wird man y nach Belieben entweder gleich $\frac{d^{-\mu_1} z_1}{dx^{-\mu_1}}$ oder gleich $\frac{d^{-\mu_2} z_2}{dx^{-\mu_2}}$ annehmen können, sohin das folgende allgemeine Integral erhalten:

$$y = C_1 \frac{d^{-\mu_1} z_1}{dx^{-\mu_1}} + C_2 \frac{d^{-\mu_2} z_2}{dx^{-\mu_2}}. \tag{110}$$

Es erscheint also durch dieses Verfahren auf zwei verschiedene Arten jedesmal eines der zwei particulären Integrale beseitigt, wodurch das andere berechenbar gemacht wird. Jedermann wird nun leicht hieran die Vermuthung knüpfen, dass durch den Kunstgriff des Differenzirens und Integrirens auch bei höheren Gleichungen, entweder die Beseitigung eines particulären Integrales erzweckt, oder irgend eine andere Wirkung, z. B. Verwandlung in eine geschlossene Form, vielleicht bewerkstelligt zu werden vermöchte. Wir finden uns daher veranlasst, das Differenziren und Integriren in der Gleichung selbst einer allgemeineren und aufmerksameren Discussion zu unterwerfen. Das vorgelegte einfache, schon, wie gesagt, von Liouville erkiesene, sorgsam durchgerechnete Beispiel soll uns hiezu den Weg bahnen. Denn wenn wir uns hier über die Bedeutung der einzelnen Rechnungsmomente und ihren Einfluss auf die Beschaffenheit der genügenden Werthe genaue Rechenschaft zu geben vermögen; so können wir mit Grund hoffen, dass uns dasselbe auch allgemein bei einer beliebig gestalteten Gleichung gelingen werde.

Der Klarheit wegen statuiren wir zuvörderst den einfachsten möglichen Fall, dass die algebraische Gleichung (107) in μ eine oder auch zwei ganze positive Wurzeln besitze. Die gemachte Substitution (105) führt in diesem Falle anstatt der abhängigen Veränderlichen y ein μ^{tes} Integral eines Differentialausdruckes, wie $z dx^{\mu}$, ein, ein analytisches Gebilde, von dem wir wissen, dass es vieldeutig sei, insoferne als ihm eine algebraische Function vom Grade $\mu - 1$ mit willkürlichen Coefficienten hinzugefügt werden kann. Die durch die in Rede stehende Substitution zunächst erhaltene Differentialgleichung, d. h. die:

$$(a_2 x^2 + b_2 x + c_2) \int^{\mu-2} z dx^{\mu-2} + (a_1 x + b_1) \int^{\mu-1} z dx^{\mu-1} + a_0 \int^{\mu} z dx^{\mu} = 0 \tag{111}$$

wird daher, wenn man sich den allgemeinen Werth von z, der ihr Genüge leistet, gegeben denkt, nicht in jeder Bedeutung von $\int^{\mu} z dx^{\mu}$, d. h. nicht für beliebige Werthe der constanten Coefficienten des oberwähnten algebraischen Polynomes, sondern nur für gewisse solche erfüllt sein, weil sonst die Differentialgleichung der zweiten Ordnung mehr als zwei verschiedene particuläre Integrale zulassen müsste. Man ist also genöthigt, sich ein ähnliches algebraisches Polynom vom Grade $\mu - 1$ mit bestimmten Coefficienten auch als Bestandtheil des Gleichungspolynomes zu denken. Dieses verschwindet aber in Folge der zunächst darauf eingeleiteten μ-maligen Differentiation von selbst, ein Umstand, der uns der ferneren Berücksichtigung der Vieldeutigkeit des Symboles $\int^{\mu} z dx^{\mu}$ überhebt. Es ist also die transformirte Gleichung (106) in z aus der (104) im y in aller Strenge für ganze und positive folgerichtig abgeleitet; und hat die Algebraische (107) eine solche ganze, positive Wurzel μ_1, so gilt diese Folgerichtigkeit auch von der Differentialgleichung (108). Sie gestattet ihrer einfachen Form wegen eine unmittelbare Integration, und gibt:

$$z = G + H \int dx \,.\, e^{-\int \frac{(2a_2\mu_1 + a_1)x + b_2\mu_1 + b_1}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} dx}, \tag{112}$$

allwo G und H die willkürlichen Integrationsconstanten bedeuten. Hieraus geht nun ein zweitheiliger Werth von y hervor, nämlich:

$$(113)\quad y=\int^{\mu} z\,dx^{\mu}=G_0x^{\mu}+G_1x^{\mu-1}+G_2x^{\mu-2}+\ldots+G_{\mu}+H\int^{\mu+1}dx^{\mu+1}.\,e^{-\int\frac{(2a_2\mu_1+a_1)x+b_2\mu_1+b_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}dx},$$

in welchem H zwar ohne allem Zweifel eine willkürliche Constante darstellt, dasselbe jedoch von den G_0, G_1, G_2 ... G_{μ} offenbar nicht behauptet werden kann, weil die Gleichung (104) in y nicht mehr als zwei von einander verschiedene particuläre Integrale zu besitzen vermag. Um nun die Werthe dieser Constanten zu erhalten, und überhaupt über das Verhalten des ersten Bestandtheiles von y gründlichen Aufschluss zu gewinnen, lassen wir für einen Augenblick das willkürliche H verschwinden, und substituiren den in Gestalt eines geschlossenen algebraischen Polynomes darnach erscheinenden Werth von y in (104), der er Genüge leisten soll, gewinnen als Substitutionsresultat abermals ein geschlossenes algebraisches Polynom vom Grade μ, und setzen seine sämmtlichen Coefficienten, $\mu+1$ an der Zahl, jeden für sich der Nulle gleich; so gelangen wir zum folgenden Systeme von Gleichungen:

$$G_0\left[a_2\mu_1(\mu_1-1)+a_1\mu_1+a_0\right]=0$$

$$G_1\left[a_2(\mu_1-1)(\mu_1-2)+a_1(\mu_1-1)+a_0\right]+G_0\left[b_2\mu_1(\mu_1-1)+b_1\mu_1\right]=0$$

$$(114)\quad G_2\left[a_2(\mu_1-2)(\mu_1-3)+a_1(\mu_1-2)+a_0\right]+G_1\left[b_2(\mu_1-1)(\mu_1-2)+b_1(\mu_1-1)\right]+G_0\,.\,c_2\mu_1(\mu_1-1)=0$$

$$G_3\left[a_2(\mu_1-3)(\mu_1-4)+a_1(\mu_1-3)+a_0\right]+G_2\left[b_2(\mu_1-2)(\mu_1-3)+b_1(\mu_1-2)\right]+G_1\,.\,c_2(\mu_1-1)(\mu_1-2)=0$$

. . . .

$$G_r\left[a_2(\mu_1-r)(\mu_1-r-1)+a_1(\mu_1-r)+a_0\right]+G_{r-1}\left[b_2(\mu_1-r+1)(\mu_1-r)+b_1(\mu_1-r+1)\right]+$$
$$+G_{r-2}\,.\,c_2(\mu_1-r+2)(\mu_1-r+1)=0.$$

. . . .

$$G_{\mu-2}\left[2a_2+2a_1+a_0\right]+G_{\mu-3}\left[6b_2+3b_1\right]+G_{\mu-4}\,.\,12\,.\,c_2=0$$

$$G_{\mu-1}\left[a_1+a_0\right]+G_{\mu-2}\left[2b_2+2b_1\right]+G_{\mu-3}\,.\,6\,.\,c_2=0$$

$$G_{\mu}\left[a_0\right]+G_{\mu-1}\left[b_1\right]+G_{\mu-2}\,.\,2\,.\,c_2=0.$$

Die erste von ihnen ist identisch, was auch G_0 bedeuten mag, wegen des verschwindenden Factors, der ihm anhängt. Sie lässt sohin diese Constante willkürlich. Die folgenden geben in der Regel der Reihe nach für G_1, G_2, G_3, ... G_{μ} dem willkürlichen G_0 proportionale Ausdrücke. Wir stehen also hier abermals vor einer Differentialgleichung, die ein particuläres Integral in geschlossener Form besitzt, wenn eine gewisse Function der in ihr erscheinenden constanten Parameter, nämlich die durch Auflösung der (107) gezogene:

eine ganze, positive, übrigens aber ganz beliebige Zahl darstellt. Dieselbe Eigenschaft haben wir auch im zweiten Abschnitte dieses Werkes an den alldort behandelten Differentialgleichungen wahrgenommen, deren Coefficienten die Gradzahl Eins nach der unabhängigen Veränderlichen x nicht überschreiten, nur mit dem Unterschiede, dass es alldort auch mehrere geschlossene particuläre Integrale geben konnte, wenn nur für jedes derselben die einzige Bedingungsgleichung des geschlossenen Vorhandenseins erfüllt war, die dann stets besagte, dass eine Function der constanten Parameter eine ganze positive Zahl darstelle; hingegen die Existenz eines geschlossenen ersten particulären Integrales zwar auch nur von der Erfüllung einer einzigen solchen Bedingungsgleichung abhängig ist, die eines zweiten jedoch das Stattfinden zweier Bedingungen erheischt, wie wir allsogleich sehen werden. Es kann nämlich die zur Bestimmung von μ dienende (107) auch ganze und positive, aber gleiche Wurzeln besitzen. Man würde jedoch irren, wenn man glaubte, dass nun jeder von ihnen ein geschlossenes particuläres Integral vom Grade μ angehörig sei, dass man folglich zweien verschiedenen solchen in diesem Falle begegne, denn die Gleichungen (114) sind offenbar ihrer Gestalt nach gar nicht geeignet, zu einem einzigen μ Doppelwerthe für G_1, G_2, ... G_μ zu liefern. Der wiederholten Wurzel μ entspricht daher zwar ein geschlossenes Integral, aber nur ein einziges. Noch mehr, es können μ_1 und μ_2 ungleiche, jedoch ganze und positive Zahlen gelegentlich vorstellen, ohne dass mehr als einer von ihnen, und zwar namentlich der kleineren ein geschlossenes Integral angehört. In der That, nehmen wir an, μ_2 sei die grössere der beiden ganzen positiven Zahlen μ_1 und μ_2, so wird ihr kein Genüge leistendes algebraisches Polynom vom Grade μ_2 entsprechen, es sei denn, dass eine neue Bedingung zwischen den constanten Parametern der Differentialgleichung besteht. Hievon überzeugt man sich aus dem Baue der Gleichungen (114), in welchen die der Reihe nach zu bestimmenden G_1, G_2, G_3, ... Coefficienten tragen, die Functionen von μ sind, und die aus einander dadurch hervorgehen, dass man diese Grösse jedesmal beim Übergang zum nächstfolgenden dieser Coefficienten um die Einheit verringert. Da nun der Voraussetzung nach μ_1 und μ_2 beide ganz sind, so wird durch solch' eine successive Verringerung μ_2 endlich in μ_1 verwandelt, und da diess ebenfalls eine Wurzel der (107) ist, so geht der Coefficient von $G_{\mu_2-\mu_1}$ in derjenigen Gleichung, aus welcher eben dieses $G_{\mu_2-\mu_1}$ zu bestimmen wäre, in die Nulle über. Diese wird daher entweder identisch, wenn die übrigen in ihr vorkommenden Glieder für sich Null geben, also wenn nebst den Bedingungen der ganzen und positiven Beschaffenheit von μ_1 und μ_2 noch eine dritte erfüllt ist. Zwei willkürliche Constanten, G_0 nämlich und $G_{\mu_2-\mu_1}$, und mit ihnen im Zusammenhange auch zwei geschlossene particuläre Integrale sind hievon die Folge. Oder sie liefert für $G_{\mu_2-\mu_1}$ einen unendlichen Werth, welches letztere der gewöhnliche Fall ist. Dem lässt sich nun freilich entgehen dadurch, dass man G_0 verschwinden macht, wo dann $G_{\mu_2-\mu_1}$ durch seine Gleichung nicht bestimmt ist, allein es zieht diess das Verschwinden von G_1, G_2, ... $G_{\mu_2-\mu_1-1}$ unmittelbar nach sich, und man bekommt zwar für die übrigen Coefficienten, von $G_{\mu_2-\mu_1+1}$ angefangen, Werthe, sie gehören aber nicht zu einem Polynome vom Grade μ_2, sondern vielmehr zu einem

vom Grade μ_1, also zu dem der kleineren Wurzel μ_1 entsprechenden particulären Integrale. Und diess ist also offenbar das einzige in der Regel in geschlossener Form erscheinende.

Da nun das der grösseren Wurzel μ_2 entsprechende particuläre Integral offenbar kein geschlossenes algebraisches Polynom ist, so frägt sich, in welcher Form dasselbe vorhanden sei? Um hierüber Aufschluss zu erhalten, wollen wir die Differentialgleichung von dem einen, der kleineren Wurzel μ_1 entsprechenden, stets vorhandenen particulären Integrale:

$$y_1 = G_0 x^{\mu_1} + G_1 x^{\mu_1 - 1} + G_2 x^{\mu_1 - 2} + \dots\dots\dots + G_{\mu_1} \tag{115}$$

befreien, indem wir in dieselbe nach der bekannten Methode der Variation der Constanten eine neue abhängige Veränderliche u einführen vermittelst der Substitution:

$$y = y_1 \int u dx.$$

Die daraus hervorgehende Gleichung in u ist die folgende:

$$(a_2 x^2 + b_2 x + c_2)\, y_1 \,.\, u' + \left[2\,(a_2 x^2 + b_2 x + c_2)\, y'_1 + (a_1 x + b_1)\, y_1\right] u = 0. \tag{116}$$

Sie liefert integrirt:

$$u = \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} dx}. \tag{117}$$

Wir gelangen sohin zum folgenden allgemeinen Werthe von y:

$$y = y_1 + y_1 \int \frac{dx}{y_1^2} \,.\, e^{-\int \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} dx}, \tag{118}$$

mit dessen Hilfe sich alle die früher besprochenen, bei der Auflösung der Gleichungen (114) darbiethenden Erscheinungen ganz ungezwungen erklären lassen. Er besteht nämlich, wie man sieht, aus zwei Theilen: der erste nämlich y_1 ist das geschlossene Polynom vom Grade μ_1, der zweite hingegen repräsentirt, wie sich leicht zeigen lässt, eine Function, die, nach absteigenden Potenzen von x in eine Reihe verwandelt, ein Anfangsglied mit der μ_2^{ten} Potenz von x biethet. Zerlegt man nämlich behufs der ausführlicheren Berechnung dieses zweiten Bestandtheiles den Bruch:

$$\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2}$$

in Partialbrüche, multiplizirt sodann mit dx, integrirt, und führt das gewonnene Resultat in die vorliegende Gleichung ein; so erhält man:

$$y = y_1 + K y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\,(x - \alpha)^A\,(x - \beta)^B\, dx. \tag{119}$$

$x - \alpha$ und $x - \beta$ sind die beiden Wurzelfactoren der Gleichung:

$$a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0,$$

die Exponenten A und B fliessen aus den Formeln:

$$A = -\frac{a_1\alpha + b_1}{\alpha - \beta}, \qquad B = -\frac{a_1\beta + b_1}{\alpha - \beta} \tag{120}$$

und K stellt eine willkürliche Constante vor. Es fällt nun in die Augen, dass die Function unter dem Integralzeichen, vermittelst der Division des Zählers durch den Nenner in eine nach absteigenden Potenzen von x geordnete Reihe umgestaltet, ein Anfangsglied mit der $(A+B-2\mu_1)^{\text{sten}}$ Potenz von x darbiethen werde, und da kraft der (120):

$$A + B - 2\mu_1 = -a_1 - 2\mu_1$$

ist, da ferner, gemäss der Eigenschaft der ganzen Zahlen μ_1 und μ_2, Wurzeln der Algebraischen (107) vorzustellen, $1 - a_1 = \mu_1 + \mu_2$ besteht, wir also:

$$A + B - 2\mu_1 = \mu_2 - \mu_1 - 1$$

haben; so ist es klar, dass die unter dem Integralzeichen stehende, in gewissem Sinne der Gradzahl $\mu_2 - \mu_1 - 1$ angehörige Function, mit dx multiplizirt und integrirt, eine andere, ähnlich nach absteigenden Potenzen geordnete Function liefern werde, der die positive Gradzahl $\mu_2 - \mu_1$ zukömmt, und die, mit dem Factor y_1 multiplizirt, eine unendliche Reihe liefern wird mit dem Anfangsgliede Kx^{μ_2}. Es ist aber auch ferner klar, dass, eben weil $\mu_2 - \mu_1$ ganz und positiv oder Null ist, unter dem Integralzeichen jedesmal ein Glied, wie $\frac{c}{x}$ vorfindig sein werde, das, mit dx multiplizirt, und der Integration unterworfen, einen $\log x$, und demgemäss einen Bestandtheil, wie $Cy_1 \log x$, des zweiten particulären Integrales liefern wird, welcher offenbar die Annahme, dass ein geschlossenes algebraisches Polynom vom Grade μ_2 der Differentialgleichung Genüge leistet, unstatthaft machen muss, und zu den früher erwähnten unendlichen Coefficientenwerthen, der Natur des Logarithmus nach, die unmittelbare Veranlassung gibt. Dass erst der Werth des Coefficienten $G_{\mu_2-\mu_1}$ unendlich wird, und nicht die der Vorangehenden, rührt daher, weil auch dem Logarithmus im Werthe des in der (119) enthaltenen Integrales ein ganzes algebraisches Polynom vom Grade $\mu_2 - \mu_1$ vorangeht. Wir gelangen so zu dem Schlusse, dass die Liouville'sche Gleichung (104) unter der Bedingung, dass eine gewisse Function der in ihr enthaltenen constanten Parameter, d. h. eine der Wurzeln der (107) oder beide positive ganze Zahlen sind, mindestens ein particuläres Integral in der Form eines geschlossenen algebraischen Polynoms besitze, daher es auch kömmt, dass dasselbe durch Differenziren in eine Constante verwandelt und so beseitigt werden kann; zur Existenz eines zweiten solchen jedoch nicht bloss die ganze und positive Beschaffenheit der beiden Wurzeln, sondern noch überdiess das Stattfinden einer ferneren Bedingungsgleichung vonnöthen sei. Weil aber u, wie aus seinem Werthe (117) ersichtlich, eine gebrochene, aber doch geschlossene algebraische Function darstellt; so wird man, den Begriff der geschlossenen Form erweiternd, und auch auf solche analytische Gebilde ausdehnend, welche unbestimmte Integralzeichen beherbergen, wenn nur die darunter stehende algebraische Function geschlossen ist, auch das zweite particuläre Integral für ein geschlossenes erklären können und zwar völlig bedingungslos, so zwar, dass die Existenz zweier geschlossener particulärer Integrale im engeren Sinne

des Wortes von dem Erfülltsein dreier Bedingungsgleichungen, im weiteren Sinne hingegen von dem Stattfinden einer einzigen Solchen abhängig ist.

Unsere speciellen Untersuchungen hätten also, wie man sieht, zu einem Integrationsverfahren geführt, welches in etwas von dem Liouville'schen abweicht und die Integration durch Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl zu umgehen geeignet, und doch sehr weit davon entfernt ist, dieselbe überflüssig zu machen. Die Verbindung nämlich dieser zwei verschiedenen Arten der Betrachtung erleichtert die Verwandlung anscheinend sehr verschiedener Functionsformen in einander, wie wir später sehen werden. Zur näheren Bezeichnung der keineswegs auf ganze und positive Wurzeln der (107) beschränkten Wirksamkeit des hier berührten Verfahrens dienen folgende Bemerkungen: Auch bei beliebiger Beschaffenheit des μ ist es gestattet, ein nach absteigenden Potenzen von x geordnetes, mit einem Gliede, $G_0 x^\mu$ anfangendes, aber nicht abbrechendes, sondern unendliches Polynom als partikuläres Integral der (104) vorauszusetzen. Die Gleichungen (114) gelten auch dann noch, mit Ausnahme der letzten von ihnen, die wegzufallen haben, weil sie die Voraussetzung eines ganzen μ bereits enthalten, und führen in Betreff der daraus gezogenen Werthe von G_1, G_2, ... zu keinem Widerspruche, so dass also im Allgemeinen einem jeden der beiden μ eine solche unendliche Reihe als Genüge leistender Werth entspricht. Einer einzigen Ausnahme hievon begegnen wir in dem Falle, wenn der Unterschied der beiden Wurzeln μ_2 und μ_1 eine ganze Zahl ist, wo sich dann ähnliche Erscheinungen von unendlichen Coefficientenwerthen, wie beim Vorhandensein ganzer positiver μ_2 und μ_1 ergeben, die auch denselben Grund haben und dem Erscheinen eines Logarithmus im zweiten particulären Integrale ihr Dasein verdanken, wovon man sich auf die eben geübte Weise aus den Formeln (115), (119) und (120) überzeugen kann. Eine fernere, sehr wesentliche Bemerkung ist die, dass sich dieser Behandlung zwar auch andere Differentialgleichungen unterwerfen lassen, insoferne als man ihnen ein particuläres Integral in Form einer absteigend geordneten unendlichen Reihe voraussetzen kann, wenn nur Abfälle um die Einheit in den Gradzahlen bei den Coefficienten vorfindig sind, die auf die Zulässigkeit solcher Formen hindeuten, geschlossene algebraische Polynome jedoch als Genüge leistende Werthe besitzen unter den Differentialgleichungen der zweiten Ordnung nur die in aller Strenge unter der Form (104) enthaltenen, mit Coefficienten, denen beziehlich die Gradzahlen 2, 1, 0 angehören, die jedoch gelegentlich auch in 1, 1, 0 und 0, 1, 0 übergehen können, und es genügt hier nicht, nur Abfälle um die Einheit in den Gradzahlen zu besitzen, weil z. B. schon bei einer Gleichung mit Coefficienten mit den Gradzahlen 3, 2, 1 die ähnlich eingeleiteten, mit der Voraussetzung eines nach absteigenden Potenzen von x geordneten und geschlossenen y anfangenden Rechnungen zu widersprechenden Werthen der Coefficienten zu führen vermögen; denn man kömmt, wie leicht einzusehen, zu ähnlichen Gleichungen, wie die (114), erhält aber um Eine mehr, und hat doch nicht mehr Grössen, durch deren schickliche Wahl ihnen Genüge geleistet werden kann.

Nachdem wir nun gezeigt haben, dass in der Gleichung (104) der erste Bestandtheil des Werthes von y, der für ganze und positive μ ein ganzes und geschlossenes algebraisches Polynom,

für alle anderen hingegen eine unendliche Reihe darstellt, für sich der Differentialgleichung Genüge leistet; so unterliegt es wohl gar keinem Zweifel, dass man dasselbe auch von dem zweiten Theile. und zwar für beliebige μ behaupten könne, wenn gleich die Rechnungen, die zu dieser Form geführt haben, nur unter der beschränkenden Voraussetzung, dass μ eine ganze positive Zahl sei, durchgeführt worden sind. Man kann sich hievon auch *a posteriori* durch unmittelbare Substitution von:

$$y = \int^{\mu+1} dx^{\mu+1} . e^{-\int\frac{(2a_2\mu + a_1) x + b_2\mu + b_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} dx},$$

in die Differentialgleichung (104) überzeugen, und kann hiebei, um weitläufigen Rechnungsentwicklungen auszuweichen, allenfalls, wie folgt, verfahren: Man setze:

$$I = e^{-\int\frac{(2a_2\mu + a_1) x + b_2\mu + b_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} dx},$$

so wird:

$$y = \int^{\mu+1} dx^{\mu+1} . I, \qquad y' = \int^{\mu} dx^{\mu} . I, \qquad y'' = \int^{\mu-1} dx^{\mu-1} . I.$$

also das Substitutionsresultat in die (104), das für einen Augenblick P heissen mag:

$$P = (a_2x^2 + b_2x + c_2) \int^{\mu-1} dx^{\mu-1} . I + (a_1x + b_1) \int^{\mu} dx^{\mu} . I + a_0 \int^{\mu+1} dx^{\mu+1} . I.$$

Nun hat man aber, vermöge einer bekannten Formel, die zur Differentiation eines Produktes nach beliebigem Index dienlich ist:

$$\int^{\mu-1} dx^{\mu-1} . (a_2x^2+b_2x+c_2) I = (a_2x^2+b_2x+c_2) \int^{\mu-1} dx^{\mu-1} . I - (\mu-1)(2a_2x+b_2) \int^{\mu} dx^{\mu} . I +$$

$$+ (\mu - 1) \mu a_2 \int^{\mu+1} dx^{\mu+1} . I$$

$$\int^{\mu} dx^{\mu} (a_1 x + b_1) . I \qquad = (a_1 x + b_1) \int^{\mu} dx^{\mu} . I - \mu . a_1 \int^{\mu+1} dx^{\mu+1} . I$$

$$\int^{\mu} dx^{\mu} . (\mu-1) (2a_2x+b_2) . I = (\mu-1) (2a_2 x + b_2) \int^{\mu} dx^{\mu} . I - 2 (\mu - 1) \mu a_2 \int^{\mu+1} dx^{\mu+1} . I$$

$$\int^{\mu+1} dx^{\mu+1} . a_0 . I \qquad = a_0 \int^{\mu+1} dx^{\mu+1} . I.$$

Die Addition dieser vier Gleichungen liefert zunächst:

$$\int^{\mu-1} dx^{\mu-1} (a_2 x^2 + b_2 x + c_2) I + \int^{\mu} dx^{\mu} (a_1 x + b_1) I + \int^{\mu} dx^{\mu} (\mu - 1) (2a_2x + b_2) I =$$

$$= P - \left[a_2 \mu (\mu - 1) + a_1 \mu + a_0\right] \int^{\mu+1} dx^{\mu+1} . I.$$

und da, wie leicht einzusehen:

$$\int^{\mu-1} dx^{\mu-1} (a_2x^2 + b_2x + c_2) I = \int^{\mu} dx^{\mu} \left[\left(2a_2 (1-\mu) - a_1\right) x + b_2 (1-\mu) - b_1\right] I$$

und

$$a_2 \mu (\mu - 1) + a_1 \mu + a_0 = 0$$

besteht; so hat man, wie zu erwarten stand, und zwar, was auch immer die durch μ vorgestellte Wurzel der algebraischen Gleichung für eine Beschaffenheit haben mag, nachdem das Substitutionsverfahren in dieser Beziehung gar nichts Bestimmtes voraussetzt:

$$P = 0,$$

und hiemit wäre die Liouville'sche Integrationsmethode allgemein gerechtfertigt, wenn sie überhaupt einer solchen Rechtfertigung bedürfte. Auch erscheint es überflüssig, zur Differentialgleichung (104), die wir für ganze und positive Wurzeln μ der Algebraischen (107) der Integration nach Liouville unterworfen haben, zurückzukehren, und dieselbe noch überdiess dem ähnlichen Verfahren für ganze negative oder auch gebrochene μ, sorgsam eine Gleichung aus der anderen streng wissenschaftlich ableitend, zu unterziehen. Wir thun diess aber dennoch, weil sich auf diesem Wege neue Formen des allgemeinen Integrales und überhaupt eine gründlichere Einsicht in die innere Natur dieser Sorte von Differentialgleichungen gewinnen lassen.

Wir fassen also das der algebraischen Gleichung (107) Genüge leistende μ als negative ganze Zahl auf. Dem zufolge findet die Einführung einer neuen Veränderlichen z in die (104) nicht mehr vermittelst der vieldeutigen Substitution (105), sondern vielmehr vermittelst der folgenden Statt, der nur eine einzige bestimmte Bedeutung entspricht:

$$y = \frac{d^{\mu} z}{dx^{\mu}} = z^{(\mu)}. \tag{121}$$

Die Transformirte erscheint zunächst in folgender Form:

$$(a_2 x^2 + b_2 x + c_2)\, z^{(\mu+2)} + (a_1 x + b_1)\, z^{(\mu+1)} + a_0\, z^{(\mu)} = 0, \tag{122}$$

und da bei bestimmtem und eindeutigem z, wie schon gesagt, auch $z^{(\mu)}$ bestimmt und eindeutig ist, so wird sich dasselbe auch von dem Gleichungspolynom sagen lassen. Um indess dieses auf die Ordnungszahl zwei herabzubringen, ist eine μ-malige Integration nothwendig, in deren Gefolge bekanntlich ein geschlossenes algebraisches Polynom vom Grade $\mu - 1$ mit willkürlichen Coefficienten erscheint. Die auf diesem Wege aus der Vorliegenden folgerichtig abgeleitete, transformirte Gleichung in z ist daher:

$$\begin{aligned} &\left[a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right] z'' + \left[(-2a_2\mu + a_1)x - b_2\mu + b_1\right] z' + \left[a_2\mu(\mu+1) - a_1\mu + a_0\right] z = \\ &= D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \dots\dots\dots + D_{\mu-1} x^{\mu-1}, \end{aligned} \tag{123}$$

und man kann überzeugt sein, dass der ihr Genüge leistende Werth von z mindestens für gewisse, annoch zu bestimmende $D_0, D_1, D_2, \dots\dots D_{\mu-1}$ auch die vorhergehende (122) erfüllen, sohin zu einem richtigen Werthe von y führen werde. Nun ist aber die (123) eine complete Gleichung, deren Integral, wie bekannt, aus jenem der reducirten:

$$(a_2 x^2 + b_2 x + c_2)\, z'' + \left[(-2a_2\mu + a_1)x - b_2\mu + b_1\right] z' + \left[a_2\mu(\mu+1) - a_1\mu + a_0\right] z = 0, \tag{124}$$

und aus einer besonderen Auflösung der completen zusammengesetzt ist. Ersteres kennen wir bereits aus den eben durchgeführten Untersuchungen, und wissen, dass es in der Formel (112) enthalten gedacht

werden könne. Letztere ist bei Gleichungen, die in die vorliegende Form der (123) fallen, in der Regel leicht zu bestimmen und es ist namentlich:

$$z = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots\dots\dots + B_{\mu-1} x^{\mu-1}, \tag{125}$$

eine solche besondere Auflösung bei allen die Gestalt:

$$(\mathfrak{a}_2 x^2 + \mathfrak{b}_2 x + \mathfrak{c}_2)\, z'' + (\mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{b}_1)\, z' + \mathfrak{a}_0 z = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \dots\dots + D_{\mu-1} x^{\mu-1} \tag{126}$$

tragenden Gleichungen. Hievon gewinnt man durch Substitution des aufgestellten Werthes von z die volle Überzeugung. Sie verwandelt den ersten Theil in ein, dem zweiten Theile ähnliches, geschlossenes Polynom vom Grade $\mu - 1$ mit eben so willkürlichen Coefficienten. Die zwischen ihnen bestehenden Relationen, durch Gleichstellung der einzelnen Glieder gewonnen, sind:

$$\begin{aligned}
D_{\mu-1} &= \left[\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1(\mu-1) + \mathfrak{a}_2(\mu-1)(\mu-2)\right] B_{\mu-1}\\
D_{\mu-2} &= \left[\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1(\mu-2) + \mathfrak{a}_2(\mu-2)(\mu-3)\right] B_{\mu-2} + \left[\mathfrak{b}_1(\mu-1) + \mathfrak{b}_2(\mu-1)(\mu-2)\right] B_{\mu-1}\\
D_{\mu-3} &= \left[\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1(\mu-3) + \mathfrak{a}_2(\mu-3)(\mu-4)\right] B_{\mu-3} + \left[\mathfrak{b}_1(\mu-2) + \mathfrak{b}_2(\mu-2)(\mu-3)\right] B_{\mu-2} + \mathfrak{c}_2(\mu-1)(\mu-2) B_{\mu-1}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
D_r &= \left[\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 r + \mathfrak{a}_2 r\,(r-1)\right] B_r + \left[\mathfrak{b}_1 (r+1) + \mathfrak{b}_2 (r+1)\, r\right] B_{r+1} + \mathfrak{c}_2 (r+2)(r+1) B_{r+2}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
D_2 &= \left[\mathfrak{a}_0 + 2\mathfrak{a}_1 + 2\mathfrak{a}_2\right] B_2 + \left[3\mathfrak{b}_1 + 6\mathfrak{b}_2\right] B_3 + 12\mathfrak{c}_2 B_4\\
D_1 &= \left[\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1\right] B_1 + \left[2\mathfrak{b}_1 + 2\mathfrak{b}_2\right] B_2 + 6\mathfrak{c}_2 B_3\\
D_0 &= \mathfrak{a}_0 B_0 + \mathfrak{b}_1 B_1 + 2\mathfrak{c}_2 B_2.
\end{aligned} \tag{127}$$

Sie zeigen auf das klarste, dass die Willkürlichkeit sich von den D genannten Coefficienten auf die mit B bezeichneten in der Regel unmittelbar übertrage. Eine Ausnahme hievon biethen nur diejenigen Fälle, wo einer der zur ersten Vertikalreihe der zweiten Theile der vorliegenden Gleichungen gehörigen Coefficienten irgend eines der zu bestimmenden B in die Nulle übergeht. Allein gerade ein solcher Fall ist der gegenwärtige: Da nämlich die zu behandelnde Gleichung eben die (123) ist, und zwar für ein μ, das der Algebraischen:

$$a_2 \mu (\mu + 1) - a_1 \mu + a_0 = 0$$

Genüge leistet, so haben wir, die (123) mit der (126) Glied für Glied vergleichend:

$$\mathfrak{a}_2 = a_2, \qquad \mathfrak{b}_2 = b_2, \qquad \mathfrak{c}_2 = c_2$$

$$\mathfrak{a}_1 = -2a_2\mu + a_1, \qquad \mathfrak{b}_1 = -b_2\mu + b_1$$

$$\mathfrak{a}_0 = a_2 \mu (\mu + 1) - a_1 \mu + a_0 = 0$$

anzunehmen. Dem zufolge hört die letzte der Relationen (127) auf, B_0 zu liefern, sie gibt vielmehr B_1 und zwar zum zweiten Male, nachdem auch die unmittelbar vorangehende zur Bestimmung von B_1

dient, und hieraus geht eine unzulässige Relationsgleichung zwischen den mit D bezeichneten Coefficienten hervor, unzulässig darum, weil dieselben willkürlich sind, somit keine zwischen ihnen bestehende Bedingung vertragen. Also gerade in diesem Falle ist der Ausdruck (125) keine besondere Auflösung unserer completen Differentialgleichung, nämlich der:

$$(128)\quad \left[a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right] z'' + \left[(-2a_2\mu + a_1)x - b_2\mu + b_1\right] z' = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots\ldots + D_{\mu-1} x^{\mu-1}.$$

Es hindert uns jedoch nichts, mit Auslassung des unbrauchbar gewordenen Coefficienten B_0 nicht mehr die Substitution (125), sondern vielmehr die folgende:

$$(129)\quad z = B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + B_{\mu-1} x^{\mu-1}$$

durchzuführen, und nachzusehen, inwieferne hiedurch der erste Theil der (128) dem zweiten genähert, wenn nicht gleichgestellt zu werden vermöge. Wir entwickeln also dieses Substitutionsresultat nach absteigenden Potenzen von x und äquipariren die beiderseits vorhandenen Coefficienten von $x^{\mu-1}$, $x^{\mu-2}$, ... x; gelangen hiedurch zu Gleichungen, die aus den (127) hervorgehen, durch Nullsetzen von $\mathfrak{a}_0$ mit Ausschluss der letzten von ihnen, die wegzufallen hat. Man sieht hieraus, dass der eingeführte Ausdruck dem ersten Theile der Gleichung (128) einen Werth ertheile, der dem zweiten identisch gleichen würde, wenn er nicht mit der willkürlichen Constante D_0, sondern vielmehr mit der bestimmten solchen $g = \mathfrak{b}_1 B_1 + 2\mathfrak{c}_2 B_2 = (-b_2\mu + b_1) B_1 + 2c_2 B_2$ anfinge, mit anderen Worten: es ist der Ausdruck (129) zwar keine besondere Auflösung der completen Differentialgleichung (128), wohl aber der ähnlichen:

$$(130)\quad \left[a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right] z'' + \left[(-2a_2\mu + a_1)x - b_2\mu + b_1\right] z' = g + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots + D_{\mu-1} x^{\mu-1}.$$

Da nun aber die (128) auch so geschrieben werden kann:

$$(131)\quad \left[a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right] z'' + \left[(-2a_2\mu + a_1)x - b_2\mu + b_1\right] z' = (D_0 - g) + g + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots + D_{\mu-1} x^{\mu-1};$$

so kann mit Rücksicht auf die lineare Form behauptet werden, dass der allgemeine Werth von z zusammengesetzt sei aus zwei Theilen, einem nämlich, der, in den ersten Theil der Gleichung substituirt, demselben den Werth $D_0 - g$ verleiht, d. h. dem allgemeinen Integrale der:

$$(132)\quad \left[a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right] z'' + \left[(-2a_2\mu + a_1)x - b_2\mu + b_1\right] z' = D_0 - g,$$

und der bekannten besonderen Auflösung (129), die der (130) entspricht. Das ersterwähnte allgemeine Integral hat nun seinerseits wieder zwei Bestandtheile. Hievon ist nun der erste das allgemeine Integral der Reducirten:

$$(133)\quad \left[a_2 x^2 + b_2 x + c_2\right] z'' + \left[(-2a_2\mu + a_1)x - b_2\mu + b_1\right] z' = 0,$$

welches durch folgende Formel gegeben ist:

$$(134)\quad z = G + H \int dx \, . \, e^{-\int \frac{(-2a_2\mu + a_1)x - b_2\mu + b_1}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} dx},$$

der zweite aber eine besondere Auflösung der Completen, die so aussieht:

$$z = (D_0 - g) \int dx \,.\, e^{-\int \frac{(-2a_2\mu + a_1)x - b_2\mu + b_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} dx} \,.\, \int \frac{dx}{a_2x^2 + b_2x + c_2} \, e^{\int \frac{(-2a_2\mu + a_1)x - b_2\mu + b_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} dx} = K\mathfrak{Z}. \quad (135)$$

Wir verstehen hier unter K eine willkürliche Constante, die $D_0 - g$ nämlich, unter $\mathfrak{Z}$ aber den variablen Factor dieser besonderen Auflösung. Das Aggregat aller dieser verschiedenen Bestandtheile von z, sohin der allgemeine Werth dieser Grösse, welcher der (128) Genüge leistet, ist also folgender:

$$z = G + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots + B_{\mu-1} x^{\mu-1} + H \int dx \,.\, e^{-\int \frac{(-2a_2\mu + a_1)x - b_2\mu + b_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} dx} + K\mathfrak{Z}. \quad (136)$$

Aus ihm geht endlich der allgemeine Werth von y hervor:

$$y = z^{(\mu)} = H \frac{d^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}} \,.\, e^{-\int \frac{(-2a_2\mu + a_1)x - b_2\mu + b_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} dx} + K \frac{d^{\mu}\mathfrak{Z}}{dx^{\mu}}. \quad (137)$$

Die direkte Substitution hat uns gelehrt, dass der erste Theil dieses zweigliedrigen Werthes für die beiden aus der Gleichung:

$$a_2 \mu (\mu + 1) - a_1 \mu + a_0 = 0$$

gezogenen Werthe von μ, was auch ihre sonstige Beschaffenheit sein mag, für sich die Differentialgleichung erfülle. Dasselbe gilt daher auch von dem zweiten Theile, wovon man sich allenfalls auch *a posteriori* durch direkte Substitution überzeugen kann, so dass, zufolge der Doppelwerthigkeit von μ, jeder dieser beiden Bestandtheile eigentlich der Repräsentant ist von zwei verschiedenen particulären Integralen, die zu Zweien beliebig gruppirt, oder einzeln der, dem früher Gesagten nach, ebenfalls Genüge leistenden, nach absteigenden Potenzen von x geordneten, in der Regel unendlichen, gelegentlich aber in einen geschlossenen Ausdruck übergehenden Reihe, die in der (137) vorkömmt, zugesetzt, jedesmal das allgemeine Integral darstellen. Diese Fülle dem Anscheine nach sehr verschieden gestalteter Formen wird geeignet sein, gelegentlich die nothwendige Verwandlung derselben in einander zu erleichtern, und stellt sich demnach als ein Vortheil heraus, den man durch Differentiation der particulären Integrale in der Differentialgleichung selbst erreicht.

Es wird nicht nothwendig sein, den anscheinend vielleicht schon bis zur Peinlichkeit vorsichtigen Gang der gegenwärtigen Untersuchungen mit einigen Worten der Entschuldigung zu begleiten; die erzielten Resultate, und die damit gewonnene Einsicht in die innere Natur der in Rede stehenden Differentialgleichungen rechtfertigen ihn zur Genüge. Der mathematische Forscher ist bekanntlich auch auf dem Gebiethe der algebraischen Gleichungen zu ähnlichen Vorsichten verpflichtet, wenn die von ihm eingeleiteten Transformationen die Anzahl der Genüge leistenden Werthe entweder vergrössern oder verringern. Geschieht namentlich das erstere durch Potenziren der Gleichung, so hat er die dadurch eingeführten neuen Wurzeln sorgsam von den anderen alten, der ursprünglichen Gleichung Genüge leistenden Werthen zu sondern. Geschieht hingegen das andere durch Radikation, so ist es

ohne besondere Rechtfertigung nicht gestattet, die erhaltenen Wurzelgrössen nur in einer einzigen ihrer Bedeutungen zu nehmen. Ähnliche Vorsichten nun sind offenbar auch auf dem Felde der linearen Differentialgleichungen zu beobachten, so oft durch die vorgenommenen Transformationen entweder die Ordnungszahl erhöht, und hiemit neue particuläre Integrale eingeführt werden, oder so oft diese Ordnungszahlen auf irgend eine Weise herab gesetzt, und hiemit einige der Genüge leistenden Werthe beseitigt werden. Das eine und das andere geschah gegenwärtig, und es erscheinen die erwähnten Vorsichten hier um so nothwendiger und um so mehr im Geiste einer Transformationslehre der Theorie der linearen Differentialgleichungen, als das Integriren derselben praktisch aufgefasst eigentlich ein Discutiren der Eigenschaften des Integrales ist, die bei den zu diesem Zwecke eingeleiteten Rechnungsentwicklungen allmälig und Schritt für Schritt zu Tage kommen.

Nach diesen Vorbereitungen fühlen wir uns im Stande, das Differenziren nach einem beliebigen Index allgemein bei Differentialgleichungen von unbestimmter Ordnungszahl zum Gegenstande unserer Untersuchungen zu machen. Wir fangen bei einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung an:

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + X_1 y' + X_0 y = 0, \tag{138}$$

bei welcher wir aber zuerst denselben Coefficientenbau, der auch in der Liouville'schen (104) ersichtlich ist, voraussetzen, Coefficienten nämlich, die ihrer Gradzahl nach mit dem Index des Differentialquotienten, zu dem sie gehören, übereinstimmen, d. h. wir werden zuvörderst die Gleichung:

$$\begin{aligned}(a_n x^n + b_n x^{n-1} + c_n x^{n-2} + \dots) y^{(n)} + (a_{n-1} x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + c_{n-1} x^{n-3} + \dots) y^{(n-1)} + \dots\dots \\ + (a_1 x + b_1) y' + a_0 y = 0\end{aligned} \tag{139}$$

einer solchen Transformation unterwerfen, verwandeln sie also mittelst der Substitution (105) zuvörderst in:

$$X_n z^{(n-\mu)} + X_{n-1} z^{(n-\mu-1)} + \dots\dots\dots + X_1 z^{(-\mu+1)} + X_0 z^{(-\mu)} = 0 \tag{140}$$

sodann aber durch μ-maliges Differenziren des Gleichungspolynoms nach der bekannten Formel in:

$$\begin{aligned}X_n z^{(n)} + \left[\mu X'_n + X_{n-1}\right] z^{(n-1)} + \left[\binom{\mu}{2} X''_n + \mu X'_{n-1} + X_{n-2}\right] z^{(n-2)} + \dots\dots + \\ + \left[\binom{\mu}{n-1} X_n^{(n-1)} + \binom{\mu}{n-2} X_{n-1}^{(n-2)} + \dots + \mu X'_2 + X_1\right] z' + \left[\binom{\mu}{n} X_n^{(n)} + \binom{\mu}{n-1} X_{n-1}^{(n-1)} + \dots + \mu X'_1 + X_0\right] z = 0.\end{aligned} \tag{141}$$

Hier entstehen nun zunächst zwei Fragen: erstens, hat man die vorliegende Gleichung als aus der (140) richtig abgeleitet anzusehen? und zweitens, in welchem Zusammenhange stehen die Werthe von z mit jenen von y? Ist nun μ eine ganze positive Zahl, so kann offenbar die erste dieser beiden Fragen bejahend beantwortet werden, und auch die zweite wird unschwer erledigt. Hätte man nämlich das allgemeine Integral der letzten Gleichung in z unter der Form:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots\dots\dots + C_n z_n, \tag{142}$$

so würde sich daraus offenbar das allgemeine Integral der (138) ergeben, nämlich:

$$y = C_1 \int^{\mu} z_1 dx^{\mu} + C_2 \int^{\mu} z_2 dx^{\mu} + \dots\dots\dots + C_n \int^{\mu} z_n dx^{\mu}. \qquad (143)$$

Da jedoch der zweite Theil dieser Gleichung seiner Natur nach den Zusatz einer mit μ Constanten versehenen ganzen algebraischen Function, wie:

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots\dots\dots + B_{\mu-1} x^{\mu-1}$$

verträgt, und in Folge dessen mit constanten Coefficienten $n+\mu$ an der Zahl ausgerüstet ist, andererseits aber die Gleichung (138) nicht $n+\mu$, sondern nur n particuläre Integrale haben kann; so bleibt noch übrig, die Werthe der überschüssigen μ Constanten auf dem direkten Substitutionswege und Falls dieser sich umgehen lässt, durch andere Betrachtungen zu ermitteln. Etwas anders verhält sich die Sache, wenn μ zwar ganz ist, aber negativ. Wir wollen diesen Fall dadurch anschaulich machen, dass wir in den Gleichungen (105), (140) und (141) $-\mu$ anstatt μ schreiben. Hiedurch verwandeln sie sich in:

$$y = \frac{d^{\mu} z}{dx^{\mu}} = z^{(\mu)} \qquad (144)$$

$$X_n z^{(\mu+n)} + X_{n-1} z^{(\mu+n-1)} + \dots\dots\dots + X_1 z^{(\mu+1)} + X_0 z^{(\mu)} = 0 \qquad (145)$$

$$X_n z^{(n)} + \left[-\mu X'_n + X_{n-1}\right] z^{(n-1)} + \left[\binom{-\mu}{2} X''_n - \mu X'_{n-1} + X_{n-2}\right] z^{(n-2)} + \dots\dots\dots +$$
$$+\left[\binom{-\mu}{n-1} X_n^{(n-1)} + \binom{-\mu}{n-2} X_{n-1}^{(n-2)} + \dots -\mu X'_2 + X_1\right] z' + \left[\binom{-\mu}{n} X_n^{(n)} + \binom{-\mu}{n-1} X_{n-1}^{(n-1)} + \dots -\mu X'_1 + X_0\right] z = 0. \qquad (146)$$

und man sieht, dass durch die Einführung der neuen Veränderlichen z zunächst der Gleichung (145) neue particuläre Integrale μ an der Zahl zugewachsen sind, diejenigen nämlich, welche $z^{(\mu)} = 0$ machen und in der einzigen Formel enthalten sind:

$$z = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots\dots\dots + B_{\mu-1} x^{\mu-1}. \qquad (147)$$

Ferner bemerkt man, dass, weil die (146) aus der (145) durch μmaliges Integriren hervorgegangen ist, ihr zweiter Theil auch nicht Null sein dürfe, sondern gleich einem Polynome, wie:

$$D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \dots\dots\dots + D_{\mu-1} x^{\mu-1}$$

ausfalle. Die aus der (145) auf dem betretenen Wege richtig Abgeleitete heisst also im Grunde:

$$X_n z^{(n)} + \left[-\mu X'_n + X_{n-1}\right] z^{(n-1)} + \left[\binom{-\mu}{2} X''_n - \mu X'_{n-1} + X_{n-2}\right] z^{(n-2)} + \dots\dots\dots +$$
$$+\left[\binom{-\mu}{n-1} X_n^{(n-1)} + \binom{-\mu}{n-2} X_{n-1}^{(n-2)} + \dots -\mu X'_2 + X_1\right] z' + \left[\binom{-\mu}{n} X_n^{(n)} + \binom{-\mu}{n-1} X_{n-1}^{(n-1)} + \dots -\mu X'_1 + X_0\right] z = \qquad (148)$$
$$= D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \dots\dots\dots + D_{\mu-1} x^{\mu-1},$$

und es besteht, wie wir wissen, ihr allgemeines Integral aus zwei Theilen, dem allgemeinen Integrale nämlich der Reducirten (146), welches wir abermals als in der Formel (142) enthalten vorauszusetzen berechtigt sind, und einer besonderen Auflösung der completen Gleichung, welche letztere wieder

durch die Formel (147) gegeben ist. Hievon überzeugt man sich durch die directe Substitution dieses Werthes von z in den ersten Theil der completen Gleichung, durch welche derselbe offenbar verwandelt wird in ein algebraisches Polynom vom Grade $\mu - 1$, welches dem im zweiten Theile befindlichen, mit derselben Gradzahl versehenen Glied für Glied gleichgestellt werden kann, woraus sich Beziehungsgleichungen zwischen den Constanten $B_0, B_1, \ldots\ldots B_{\mu-1}$ und den $D_0, D_1, \ldots\ldots D_{\mu-1}$ ergeben, die jedoch so gestaltet sind, dass sie die ersteren vollkommen willkührlich lassen, wenn es die anderen sind; es erscheint nämlich mittelst derselben $B_{\mu-1}$ gerade so, wie in den Formeln (127), als Function der einzigen $D_{\mu-1}$, ferner $B_{\mu-2}$ als $D_{\mu-1}$ und $D_{\mu-2}$ enthaltender Ausdruck u. s. w. und nur, wenn einer oder mehrere der Endcoefficienten in der reducirten Gleichung der Nulle gleich ausfallen sollten, hört die Willkührlichkeit der Constanten auf. Sehen wir also ab von diesem Falle, so sieht der vollständige Werth von z, der der Completen (148) Genüge leistet, so aus:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots\ldots + C_n z_n + B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots + B_{\mu-1} x^{\mu-1}, \tag{149}$$

und es geht aus ihm folgender allgemeine Werth von y hervor:

$$y = \frac{d^\mu z}{dx^\mu} = C_1 \frac{d^\mu z_1}{dx^\mu} + C_2 \frac{d^\mu z_2}{dx^\mu} + \ldots\ldots\ldots + C_n \frac{d^\mu z_n}{dx^\mu}. \tag{150}$$

Es war also behufs der Auffindung von y unnütz, das vollständige Integral der completen Gleichung in z zu ermitteln, jenes der reducirten reicht vollkommen zu diesem Zwecke hin. Und wenn nun auch diese Berechtigung, mit dem Integrale der Reducirten zu operiren, hier nur für ganze positive und negative μ nachgewiesen ist; so ist sie desshalb noch keineswegs auf solche ganze Werthe beschränkt, sondern lässt sich meistentheils durch den öfter betretenen Weg der Schlussfolgerung auch auf allgemeine, eine noch unbestimmt gelassene Buchstabengrösse in sich schliessende μ ausdehnen, für deren verschiedene Werthe der genannte Differentiationsindex gelegentlich auch ganz zu werden vermag.

Diese Schlussfolgerungen gelten allgemein und nehmen noch gar keine Rücksicht auf die besondere Wahl des Differentiationsindex μ. Ihre Richtigkeit ist aber, wenigstens noch einstweilen gebunden an die Bedingung, dass die ganze Function (147) vom Grade $\mu - 1$ wirklich eine besondere Auflösung der Completen (148) ist, ein Umstand, von dessen Stattfinden man sich daher in jedem vorkommenden Falle erst sorgsam zu überzeugen haben wird.

Wir wollen jetzt zu einer besonderen Voraussetzung in Betreff der Beschaffenheit von μ übergehen, und finden uns durch die gelungene Integration der Liouville'schen Gleichung veranlasst, durch Differenziren oder Integriren der particulären Integrale nach dem Index μ wo möglich die Verwandlung eines derselben in eine Constante, und sofortige Beseitigung auch in der (141) anzustreben. Um diess zu erzielen, ist es nothwendig, dass man μ eine der Wurzeln sein lasse der algebraischen Gleichung:

$$\binom{\mu}{n} X_n^{(n)} + \binom{\mu}{n-1} X_{n-1}^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + \mu X_1' + X_0 = 0, \tag{151}$$

oder, was dasselbe ist, der:

$$a_n\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)+a_{n-1}\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)+\ldots\ldots+a_1\mu+a_0=0. \quad (152)$$

Die Differentialgleichung verwandelt sich dem zufolge und unter der hinzutretenden Voraussetzung, dass es wirklich eine ganze und positive Wurzel der Art gäbe (denn nur für solche Differentiations-indices ist die (141) aus der (140) richtig abgeleitet) in:

$$\begin{aligned} X_n z^{(n)} &+ \left[\mu X_n' + X_{n-1}\right] z^{(n-1)} + \left[\binom{\mu}{2} X_n'' + \mu X_{n-1}' + X_{n-2}\right] z^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \left[\binom{\mu}{n-1} X_n^{(n-1)} + \binom{\mu}{n-2} X_{n-1}^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu X_2' + X_1\right] z' = 0, \end{aligned} \quad (153)$$

und es leistet ihr offenbar eine willkührliche Constante Genüge. Sie heisse G_0; so kann man in der Integralform (142) $C_n = G_0$, $z_n = 1$ annehmen, und es erscheint der allgemeine, mit n Constanten versehene, ihr Genüge leistende Werth unter folgender Gestalt:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{n-1} z_{n-1} + G_0.$$

Das hieraus hervorgehende y aber ist gegeben durch die Formel:

$$\begin{aligned} y = C_1 \int^{\mu} z_1 dx^{\mu} &+ C_2 \int^{\mu} z_2 dx^{\mu} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{n-1} \int^{\mu} z_{n-1} dx^{\mu} + \\ G_0 x^{\mu} &+ G_1 x^{\mu-1} + G_2 x^{\mu-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + G_{\mu}, \end{aligned} \quad (154)$$

und die darin enthaltenen $n+\mu$ Constanten, von welchen offenbar nur eine Anzahl von n derselben willkührlich sein kann, weil eben n die Ordnungszahl der Gleichung in y ist, die übrigen aber bestimmte Werthe erhalten müssen, zwingen uns, zur Ermittlung dieser Werthe eine Substitution in die genannte Gleichung vorzunehmen. Wir führen aber nicht die des ganzen Ausdruckes für y, sondern nur die seines letzten Bestandtheiles, der eine ganze algebraische Function vom Grade μ darstellt, durch ein Verfahren, in welchem die Anfrage enthalten ist, ob und unter welchen Bedingungen der (139) eine geschlossene algebraische und ganze Function von x als Genüge leistender Werth angehöre. Wir setzen also:

$$y = G_0 x^{\mu} + G_1 x^{\mu-1} + G_2 x^{\mu-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + G_{\mu} \quad (155)$$

in die (139), sehen hiedurch ihren ersten Theil auch in ein geschlossenes algebraisches Polynom vom Grade μ übergehen, und machen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x je für sich der Nulle gleich; so gelangen wir zu einem Systeme von $\mu+1$ Gleichungen, die mit Hilfe der folgenden Annahmen:

$$\begin{aligned} A_{\mu} &= a_n\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)+a_{n-1}\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)+\ldots\ldots+a_2\mu(\mu-1)+a_1\mu+a_0 \\ B_{\mu} &= b_n\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)+b_{n-1}\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)+\ldots\ldots+b_2\mu(\mu-1)+b_1\mu \\ C_{\mu} &= c_n\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)+c_{n-1}\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)+\ldots\ldots+c_2\mu(\mu-1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (156)$$

und unter der Voraussetzung, dass $A_{\mu-1}$, $B_{\mu-1}$, $C_{\mu-1}$, ... dasjenige bedeute, was aus A_{μ}, B_{μ}, C_{μ}, ... wird, wenn man in denselben μ in $\mu-1$ verwandelt, und allgemein A_r, B_r, C_r, ... beziehlich

12 *

aus $\underset{\mu}{A}$, $\underset{\mu}{B}$, $\underset{\mu}{C}$, ... hervorgehen durch Verwandlung von μ in r, in sehr einfacher Gestalt erscheinen, nämlich:

$$
\begin{aligned}
0 &= \underset{\mu}{A}\, G_0 \\
0 &= \underset{\mu-1}{A}\, G_1 + \underset{\mu}{B}\, G_0 \\
0 &= \underset{\mu-2}{A}\, G_2 + \underset{\mu-1}{B}\, G_1 + \underset{\mu}{C}\, G_0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= \underset{r}{A}\, G_{\mu-r} + \underset{r+1}{B}\, G_{\mu-r-1} + \underset{r+2}{C}\, G_{\mu-r-2} + \ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= (a_1+a_0)\, G_{\mu-1} + (2b_2+2b_1)\, G_{\mu-2} + (6c_3+6c_2)\, G_{\mu-3} + \ldots\ldots + (n \ldots 1 . h_n + n \ldots 2 h_{n-1})\, G_{\mu-n-1} \\
0 &= a_0 G_\mu + b_0 G_{\mu-1} + 2c_2 G_{\mu-2} + 6d_3 G_{\mu-3} + \ldots\ldots + (n-1) \ldots 1 . h_{n-1} G_{\mu-n-1} + n \ldots 1 . h_n G_{\mu-n},
\end{aligned}
\tag{157}
$$

und wir erwarten von ihnen die Bestimmung von G_0, G_1, ... G_μ. Die erste wird identisch, weil, der zu Grunde gelegten Annahme nach, μ eine Wurzel der Gleichung $\underset{\mu}{A}=0$ ist; lässt also G_0 willkührlich. Die folgenden erscheinen der Reihe nach geeignet für G_1, G_2, ... G_μ dem willkührlichen G_0 proportionale Werthe zu liefern, so lange wenigstens, als keiner der zur ersten Verticalreihe gehörigen Coefficienten, nämlich $\underset{\mu-1}{A}$, $\underset{\mu-2}{A}$, ... $\underset{r}{A}$, ..., a_1+a_0, a_0 verschwindet. Diess verhält sich auch wirklich so, wenn die Gleichung $\underset{\mu}{A}=0$ nur eine einzige ganze positive Wurzel besitzt, hat sie hingegen deren mehrere, so entspricht nur einer von ihnen, und zwar der numerisch kleinsten ein System brauchbarer Werthe von G_1, G_2, ... G_μ. In der That, man gebe für einen Augenblick der $\underset{\mu}{A}=0$ nur zwei ganze positive Wurzeln; sie seien: μ die grössere und r die kleinere, so hat man offenbar identisch $\underset{\mu}{A}=0$ und $\underset{r}{A}=0$. Es erhält daher der Coefficient $G_{\mu-r}$ in der Gleichung, aus welcher er bestimmt werden sollte, die Nulle zum Factor, fällt also weg. Die übrigen darin vorkommenden Glieder erscheinen in Gestalt eines Produktes wie UG_0, allwo U eine Function der in der (139) enthaltenen constanten Parameter ist. Da nun in der Regel U nicht gleich Null ist, so ist man genöthigt, um einem Widerspruche zu entgehen, $G_0=0$ zu machen, was dann aber auch das Verschwinden von G_1, G_2, ... $G_{\mu-r-1}$, unmittelbar nach sich zieht. $G_{\mu-r}$ bleibt dann zwar willkührlich und für $G_{\mu-r+1}$, ... G_μ werden demselben proportionale Ausdrücke aus den folgenden Gleichungen zwar gewonnen, sie gehören aber offenbar nicht mehr zu einem Polynome vom Grade μ, sondern nur zu einem vom Grade r, also nicht zur grösseren, sondern zur kleineren der beiden ganzen und positiven Wurzeln der $\underset{\mu}{A}=0$. Ähnliches geschieht bei dem Vorhandensein gleicher Werthe von μ, von denen nur einer sich ein geschlossenes Polynom von der angedeuteten Form zueignet.

Ausnahmsweise kann es sich indess ereignen, dass die Relation zwischen den constanten Parametern $U=0$ identisch erfüllt ist. Die sonst zur Bestimmung der $G_{\mu-r}$ dienliche der Gleichungen (157), nämlich die:

$$\underset{r}{A}\, G_{\mu-r} + UG_0 = 0$$

ist dann für jedes G_0 und $G_{\mu-r}$ erfüllt, und die darauffolgenden liefern für die übrigen Coefficienten

$G_{\mu-r+1}, \ldots G_\mu$ zweitheilige Werthe, so zwar, dass der erste Theil dem G_0, der zweite dem $G_{\mu-r}$ proportional ausfällt. Das mit diesen Coefficienten versehene algebraische Polynom zerfällt also gleichfalls in zwei Theile, der eine mit der willkührlichen Constante G_0, der andere mit $G_{\mu-r}$, der erste ist vom Grade μ, der andere vom Grade r. Man hat also in diesem Ausnahmsfalle zwei verschiedene geschlossene algebraische Polynome, die je für sich der Differentialgleichung Genüge leisten.

Von ihnen geht eines und zwar das der Gradzahl nach niedrigere alsogleich verloren, sobald zu den zwei ganzen und positiven Wurzeln r noch eine dritte s hinzutritt, die kleiner ist als die beiden ersteren. Diejenige der Gleichungen (157) nämlich, die zur Bestimmung von $G_{\mu-s}$ sonst dient, und unter den gemachten Voraussetzungen, nämlich μ und r ganz und $U=0$ die Gestalt:

$$\underset{s}{A}\, G_{\mu-s} + VG_{\mu-r} + WG_0 = 0$$

annimmt, versagt jetzt, wegen $\underset{s}{A}=0$, diesen Dienst und verwandelt sich in:

$$VG_{\mu-r} + WG_0 = 0,$$

und hiemit ist im Allgemeinen zwischen $G_{\mu-r}$ und G_0 eine Relation gegeben, die die Willkührlichkeit von $G_{\mu-r}$ aufhebt, und ein Zusammenschmelzen der beiden den Gradzahlen μ und r angehörigen particulären Integrale in ein einziges vom Grade μ bewirkt; dafür bleibt aber $G_{\mu-s}$ willkührlich und tritt als neue, zu einem Polynome vom Grade s, das für sich der Differentialgleichung Genüge leistet, gehörige Integrationsconstante auf, so dass also bei dem Vorhandensein dreier ganzer positiver Wurzeln der $\underset{\mu}{A}=0$ und dem Bestehen der Relationsgleichung $U=0$ nur der grössten und kleinsten derselben geschlossene algebraische Polynome als particuläre Integrale angehören, und die $U=0$ ein verlässliches Kennzeichen des Vorhandenseins zweier solcher ist.

Ausnahmsweise können zwischen den Parametern der Differentialgleichung auch die drei Relationen $U=0$, $V=0$, $W=0$ erfüllt sein. Es bleiben dann G_0 sowohl, wie $G_{\mu-r}$ und $G_{\mu-s}$ willkührlich und gehören als Constante zu drei verschiedenen geschlossenen particulären Integralen, deren Existenz, wie man sieht, an sechs Bedingungen geknüpft ist, nämlich μ, r und s ganz und positiv und nebst dem $U=V=W=0$.

Es ist nicht schwer diese Betrachtungen fortzusetzen, und man kommt namentlich auf dem betretenen Wege sehr bald zu dem Schlusse, dass das Vorhandensein von vier geschlossenen Integralen abhänge von zehn Bedingungen; das Vorhandensein von fünf solchen geknüpft sei an Bedingungen fünfzehn an der Zahl u. s. w., so dass also einer jeden der ganzen positiven Wurzeln von $\underset{\mu}{A}=0$, wie viel ihrer auch immer sein mögen, mindestens Ein geschlossenes particuläres Integral entsprechen kann, da die Anzahl der zu erfüllenden Gleichungen jener der constanten Parameter der Differentialgleichung nicht überschreitet. Die einzige Ausnahme hievon machen die gleichen Wurzeln μ, denen nach den Angaben der Analysis niemals eben so viele geschlossene Werthe von y angehören, sondern immer nur ein einziger solcher. Die Analysis unterlässt ihre Angabe nicht darum, weil sie nicht existiren, sondern im Gegentheile, so oft es mehrere geschlossene Polynome gibt von ungleicher Gradzahl, existiren auch mehrere

verschiedene gleichgradige, gewonnen z. B. durch Addition und Subtraction der ersteren; sondern sie scheint vielmehr diess darum zu thun, um der Allgemeinheit in ihren Aussagen treu zu bleiben.

Wären demnach auch zwei solche geschlossene Werthe beide vom Grade μ vorhanden, so kann man aus ihnen durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition auch zwei andere bilden, die in der Regel die Gradzahlen μ und $\mu - 1$ aufweisen werden. Von diesen also werden unsere Rechnungen sprechen im vorkommenden Falle, und geben sie ja irgend einmal gleiche μ, so wird diess ein sicheres Zeichen sein, dass nur einem einzigen von ihnen ein geschlossener algebraischer Ausdruck angehöre, die übrigen aber zwar auch die Gradzahl μ tragen, wegen eines in ihnen enthaltenen Logarithmus jedoch die Form eines nach absteigenden Potenzen von x geordneten Polynomes anzunehmen nicht im Stande seien.

Auch ist nicht zu übersehen, dass hier von geschlossenen Formen im allerengsten Sinne des Wortes d. h. von geschlossenen algebraischen ganzen Polynomen die Rede sei, und erweitert man diesen Begriff, indem man ihn auch auf Ausdrücke mit einem oder mehreren unbestimmten Integralzeichen bezieht, unter welchen sich lauter algebraische ganze oder gebrochene geschlossene Formen befinden, so können theilweise diese Bedingungen auch wegfallen, wie wir in dem kurz zuvor zur Sprache gebrachten einfacheren Beispiele gesehen haben.

Zur klareren Einsicht dient hier die Bemerkung, dass sich all' die verschiedenen Bedingungsgleichungen in einem speciellen Falle mit Leichtigkeit angeben lassen, in dem nämlich, wo die ganzen und positiven Wurzeln μ mit den natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3 ..... zusammenfallen. So ist z. B. die:

$$a_0 = 0$$

die einzige Bedingungsgleichung des Vorhandenseins einer Wurzel Null sowohl, wie auch eines particulären Integrales der (139) vom Grade Null, d. h. einer Constante. Sollen zwei Genüge leistende Werthe vorhanden sein mit den Gradzahlen 0 und 1, d. h. soll $y = G_0 + G_1 x$ für beliebige G_0 und G_1 entsprechen; so müssen die drei Bedingungsgleichungen erfüllt sein:

$$a_0 = 0\,, \qquad a_1 = 0\,, \qquad b_1 = 0.$$

Von ihnen begründen die zwei ersten die Existenz der ganzen Wurzeln 0 und 1, die dritte aber tritt an die Stelle der $U = 0$. Soll es drei geschlossene algebraische Integrale geben mit den Gradzahlen 0, 1, 2, so bestehen die sechs Bedingungen:

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0$$
$$b_1 = b_2 = c_2 = 0.$$

Die drei ersteren begründen die Existenz der ganzen Wurzeln 0, 1, 2; die drei letzten hingegen spielen die Rolle der $U = V = W = 0$. u. s. w.

Von diesen auf die ganze und positive Beschaffenheit einer oder mehrerer Wurzeln der $A_\mu = 0$ fussenden Betrachtungen ist der Übergang zum allgemeinen Fall, d. h. zu einer beliebigen Beschaffenheit von μ, nicht schwer. Das geschlossene Polynom (155), das wir in die (139) substituirten,

kann auch verwandelt werden in eine nach absteigenden Potenzen von x geordnete unendliche Reihe vom Grade μ, d. h. mit einem Anfangsgliede $G_0 x^\mu$, unter μ eine Wurzel der $\underset{\mu}{A}=0$ verstanden. Das Substitutionsresultat geht dann auch in eine unendliche Reihe über, aber die Gleichungen (157) zur Bestimmung von G_1, G_2, ... hören nicht auf fortzubestehen, mit Ausnahme der letzten, die darum wegfallen, weil in ihnen die nicht mehr statthabende Voraussetzung eines ganzen μ enthalten ist. Bei der Bestimmung der unendlich vielen Coefficienten stösst man aber auf keinerlei Widerspruch und sieht sich daher berechtigt zum Schlusse, dass einer jeden Differentialgleichung von der Form (139) n particuläre Integrale, oder vielmehr, richtiger gesprochen, so viele, als die Gleichung $\underset{\mu}{A}=0$ Wurzeln hat, in Form von unendlichen Reihen entsprechen, die nach absteigenden Potenzen von x geordnet sind, und alle die Eigenschaft besitzen, abzubrechen, wenn die ihnen angehörige Gradzahl μ einen ganzen positiven Werth bekommt; und diess ist es, was uns die Analysis durch Darlegung der Umstände, unter welchen der letzte Coefficient der (146) in die Nulle übergeht, eigentlich mittheilt.

Die Berechtigung, den zweiten Theil der Gleichung (148) zu ersetzen durch die Nulle. fällt aber weg, wenn das in der (147) enthaltene algebraische Polynom aufhört eine besondere Auflösung dieser Gleichung zu sein, und diess geschieht jedesmal dann, wenn nach geschehener Substitution dieses Polynomes, und Aequiparation der Coefficienten beiderseits, für eine oder mehrere der Constanten B_0, B_1, ... $B_{\mu-1}$ sich unendliche Werthe ergeben. Diesem Falle begegnet man aber gerade dann, wenn man den Differentiationsindex so wählt, dass das mit dem Factor z verbundene Glied der Gleichung (146) verschwindet, d. h. wenn man ihn eine der Wurzeln sein lässt der algebraischen Gleichung:

$$\binom{-\mu}{n} X_n^{(n)} + \binom{-\mu}{n-1} X_{n-1}^{(n-1)} + \dots\dots\dots - \mu X'_1 + X_0 = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$(-1)^n a_n \mu(\mu+1)\dots(\mu+n-1) + (-1)^{n-1} a_{n-1}\mu(\mu+1)\dots(\mu+n-2) + \dots\dots - a_1\mu + a_0 = 0, \quad ($$

deren jedesmal so viele sind, als die vorgelegte Differentialgleichung (138) particuläre Integrale besitzt, die der ersten Functionsklasse angehören, denen somit ein repartirter Abfall um die Einheit in der Gradzahl in den letzten Coefficienten angehört. Und namentlich ist es die Constante B_0, welche bei der Substitution den Coefficienten Null bekommt und so aus dem Resultate herausfällt, wonach man in der bekannten, etwas uneigentlichen Weise von einem unendlichen Werthe derselben spricht. Im Grunde aber verhält sich die Sache so: die Substitution des Polynomes:

$$B_1 x + B_2 x^2 + \dots\dots\dots + B_{\mu-1} x^{\mu-1}, \quad ($$

welches eben das (147) ohne den B_0 ist, in den ersten Theil der (148) gibt demselben einen Werth, wie:

$$g + D_1 x + D_2 x^2 + \dots\dots\dots + D_{\mu-1} x^{\mu-1}. \quad ($$

allwo $D_1, D_2, \ldots\ldots D_{\mu-1}$ eben so willkührlich sind, wie die $B_1, B_2, \ldots\ldots B_{\mu-1}$; g aber eine bestimmte Constante bedeutet. Man kann also sagen, dass das eben vorliegende Polynom (159) eine besondere Auflösung der Differentialgleichung (148) in z sein würde, wenn ihr zweiter Theil der (160) wäre, da er es aber nicht ist, und vielmehr den abweichenden Werth:

$$(D_0 - g) + g + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + D_{\mu-1} x^{\mu-1}$$

besitzt, so wird man sagen können: Das allgemeine Integral der Completen (148) besteht aus der $(\mu-1)$ theiligen besonderen Auflösung (159) und dem allgemeinen Integrale der Gleichung:

$$(161)\quad \begin{aligned} &X_n z^{(n)} + \left[-\mu X'_n + X_{n-1}\right] z^{(n-1)} + \left[\binom{-\mu}{2} X''_n - \mu X'_{n-1} + X_{n-2}\right] z^{(n-2)} + \ldots\ldots + \\ &+ \left[\binom{-\mu}{n-1} X_n^{(n-1)} + \binom{-\mu}{n-2} X_{n-1}^{(n-2)} + \ldots\ldots - \mu X'_2 + X_1\right] z' = D_0 - g, \end{aligned}$$

welches seinerseits wieder aus zwei Theilen zusammengesetzt ist, nämlich dem allgemeinen Integrale der Reducirten:

$$(162)\quad \begin{aligned} &X_n z^{(n)} + \left[-\mu X'_n + X_{n-1}\right] z^{(n-1)} + \left[\binom{-\mu}{2} X''_n - \mu X'_{n-1} + X_{n-2}\right] z^{(n-2)} + \ldots\ldots + \\ &+ \left[\binom{-\mu}{n-1} X_n^{(n-1)} + \binom{-\mu}{n-2} X_{n-1}^{(n-2)} + \ldots\ldots - \mu X'_2 + X_1\right] z' = 0, \end{aligned}$$

das, wie man sieht, auch eine willkührliche Constante als Bestandtheil in sich schliessen, somit in der Gestalt:

$$z = C_0 + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots\ldots\ldots + C_{n-1} z_{n-1}$$

erscheinen wird, und einer besonderen Auflösung der (161), die anstatt z gesetzt dem ersten Theile den willkührlich constanten Werth $D_0 - g$ ertheilt, sohin diesen letzteren als Factor enthält, und desshalb mit GZ bezeichnet werden kann, unter G eine willkührliche Constante, etwa die $D_0 - g$ selbst, und unter Z eine Function von x verstanden. Das allgemeine Integral also unserer Gleichung in z, nämlich der (148), ist in diesem Falle:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots\ldots + C_{n-1} z_{n-1} + GZ + C_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots + B_{\mu-1} x^{\mu-1},$$

und hieraus folgt das Integral der vorgelegten Gleichung in y:

$$(163)\quad y = \frac{d^\mu z}{dx^\mu} = C_1 \frac{d^\mu z_1}{dx^\mu} + C_2 \frac{d^\mu z_2}{dx^\mu} + \ldots\ldots + C_{n-1} \frac{d^\mu z_{n-1}}{dx^\mu} + G \frac{d^\mu Z}{dx^\mu}.$$

Hätten wir hingegen, anstatt so, wie hier angedeutet, zu rechnen, geradenwegs die Reducirte (162), so wie im Falle eines positiven Werthes von μ in (151), dessen früher Erwähnung geschah, zu Grunde gelegt; so würden wir erhalten haben:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots\ldots\ldots + C_{n-1} z_{n-1} + C_0,$$

und es wäre jetzt daraus:

$$(164)\quad y = \frac{d^\mu z}{dx^\mu} = C_1 \frac{d^\mu z_1}{dx^\mu} + C_2 \frac{d^\mu z_2}{dx^\mu} + \ldots\ldots\ldots + C_{n-1} \frac{d^\mu z_{n-1}}{dx^\mu}$$

als zwar nur $(n-1)$-theiliger, gleichwohl aber doch der (139) Genüge leistender Werth hervorgegangen.

Begnügt man sich also mit einem unvollständigen, nur $n-1$ Constante enthaltenden Integrale, welches übrigens durch die Methode der Variation der Constanten und vermittelst der Integration einer Differentialgleichung der ersten Ordnung immer vervollständigt werden kann; so ist man auch berechtigt, anstatt der Completen (148), nur mit der einfacheren Reducirten (162) zu rechnen. Aber wir ziehen aus unseren Untersuchungen noch eine, nicht uninteressante Folgerung: Die allgemeine Integration nämlich der vorgelegten Differentialgleichung in y ist als vollendet anzusehen, wenn es gelungen ist, kein eigentliches Integral, sondern nur eine besondere Auflösung $G\mathfrak{Z}$ der (161) zu ermitteln, ohne einer anderen Constante als der D_0-g selbst, jedoch mit noch unbestimmtem μ; denn man wird in einem so gestalteten Ausdrucke anstatt μ der Reihe nach alle n Wurzeln der Algebraischen (158) substituiren, denselben auf diese Weise in $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots\ldots \mathfrak{Z}_n$ verwandeln, den constanten Factor G zugleich in $G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots G_n$ umsetzen, und dem gemäss einen n-theiligen Werth von y aufstellen, der aussieht, wie folgt:

$$y = G_1 \frac{d^{\mu_1}\mathfrak{Z}_1}{dx^{\mu_1}} + G_2 \frac{d^{\mu_2}\mathfrak{Z}_2}{dx^{\mu_2}} + G_3 \frac{d^{\mu_3}\mathfrak{Z}_3}{dx^{\mu_3}} + \ldots\ldots\ldots + G_n \frac{d^{\mu_n}\mathfrak{Z}_n}{dx^{\mu_n}}, \tag{165}$$

und ohne Zweifel das gesuchte allgemeine Integral darstellt, wenigstens so lange, als wirklich n von einander verschiedene Werthe von μ vorhanden sind.

Die bisherigen Ergebnisse dieses Paragraphes dürften genügen, um zu zeigen, dass das Differenziren und Integriren der particulären Integrale in der Gleichung selbst im Allgemeinen einzuleiten sei, und welche Vorsichten man dabei zu beobachten habe. Ob man dabei den beabsichtigten Zweck erreicht, hängt von der Natur desselben und von den obwaltenden Umständen ab. Einstweilen haben wir gesehen, dass man durch diese Transformationsweise, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind, die Ermittlung eines oder mehrerer geschlossener particulärer Integrale, oder die Beseitigung derselben, oder auch endlich die Verwandlung unähnlich gestalteter analytischer Ausdrücke in einander (Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl in bestimmte Integrale und umgekehrt) beabsichtigen könne, und es ist nicht nur bei Differentialgleichungen von dem Baue der (139), sondern auch bei allen anderen, deren Coefficienten ganze algebraische Functionen von x sind, unschwer, den Erfolg und die Bedingungen desselben im Voraus zu beurtheilen.

Für das erste ist es klar, dass man dort, wo keine repartirten Abfälle um die Einheit in der Gradzahl bei den letzten Coefficienten bemerkbar sind, vergebens nach geschlossenen algebraischen Formen und überhaupt nach Functionen der ersten Klasse frage. Wir wissen aber auch andererseits, dass sich jedes particuläre Integral vermittelst einer vorgängigen Transformation anderer Art, die die Befreiung von einem exponentiellen Factor bezweckt, zur ersten Klasse herunterbringen lasse, womit dann auch dieser nothwendige Abfall um die Einheit in der Gradzahl wenigstens bei einem, nämlich dem letzten Coefficientenpaare, wenn nicht bei mehreren verknüpft ist. Es wird diess auf so viele ver-

schiedene Arten erzielt, als der zweiten Klasse angehörige particuläre Integrale vorhanden sind, und man kann immerhin fragen, ob nicht eines derselben ein Produkt sei aus einem exponentiellen Factor zweiter Klasse und einem der ersten Klasse angehörigen, geschlossenen algebraischen Polynome. Hat man also das Letztere von dem erstgenannten Factor befreit, so ergibt sich offenbar jedesmal eine transformirte Gleichung, die in der Form:

$$(166)\quad \begin{aligned}&\left[a_n x^{n+r} + b_n x^{n+r-1} + c_n x^{n+r-2} + \ldots\ldots\right] y^{(n)} + \left[a_{n-1} x^{n+r-1} + b_{n-1} x^{n+r-2} + c_{n-1} x^{n+r-3} + \ldots\ldots\right] y^{(n-1)} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \left[a_0 x^r + b_0 x^{r-1} + c_0 x^{r-2} + \ldots\ldots\right] y = 0.\end{aligned}$$

allwo jedoch gelegentlich auch einige der mit a, b, c bezeichneten Anfangscoefficienten in die Nulle übergehen, und so Ansteigungen anstatt der gleichmässigen Abfälle bewirken können. Nur bei dem letzten Coefficientenpaare ist der Abfall um die Einheit in der Gradzahl ein nothwendiger, also a_1 und a_0 von der Nulle verschieden. Führt man nun in diese Gleichungen für einen Augenblick eine neue abhängige Veränderliche ein vermittelst der Substitution:

$$y = \frac{d^r u}{dx^r} = u^{(r)},$$

wodurch sie in:

$$\begin{aligned}&\left[a_n x^{n+r} + b_n x^{n+r-1} + c_n x^{n+r-2} + \ldots\ldots\right] u^{(n+r)} + \left[a_{n-1} x^{n+r-1} + b_{n-1} x^{n+r-2} + c_{n-1} x^{n+r-3} \ldots\ldots\right] u^{(n+r-1)} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \left[a_0 x^r + b_0 x^{r-1} + c_0 x^{r-2} + \ldots\ldots\right] u^{(r)} = 0,\end{aligned}$$

übergeht, so liegt und zwar in aller Vollständigkeit die Form (139) wieder vor, nur mit dem Zusatze, dass hier unmittelbar r geschlossene, algebraische, particuläre Integrale, diejenigen nämlich, die $\frac{d^r u}{dx^r} = 0$ machen, und in der Formel:

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + B_{r-1} x^{r-1}$$

enthalten sind, in die Augen fallen, mit den Gradzahlen $0, 1, 2, \ldots\ldots r-1$. Ihnen entsprechen bereits erfüllte Bedingungsgleichungen:

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + r = \frac{r(r+1)}{2}$$

an der Zahl, erfüllt durch das Verschwinden sämmtlicher r Hinterglieder. Soll es nun nebst ihnen noch einen geschlossenen ganzen algebraischen Werth von u geben, der dann offenbar auch einen solchen von y zur Folge haben wird, so müssen nach den Ergebnissen unserer Untersuchungen $r+1$ neue Bedingungsgleichungen hinzutreten, von denen wenigstens die erste nichts anderes besagt, als, dass eine gewisse Function der in der (166) enthaltenen constanten Parameter, die zugleich die Gradzahl des Polynoms ausdrückt, eine ganze positive Zahl sein müsse. Es ist also die Existenz eines geschlossenen y an die Erfüllung von $r+1$ Bedingungsgleichungen geknüpft. Liegt daher namentlich eine Differentialgleichung vor, mit lauter Coefficienten vom Grade Eins, so hängt auch die geschlos-

sene Beschaffenheit eines jeden ihrer particulären Integrale nur von einer einzigen Bedingung ab. Hat man eine Differentialgleichung mit lauter quadratischen Coefficienten, so gehören zum geschlossenen Vorhandensein eines jeden derselben zwei Bedingungen, und hat man allgemein Coefficienten vom Grade m, so müssen m Bedingungen erfüllt sein, auf dass auch nur ein einziger der Genüge leistenden Werthe in ein geschlossenes algebraisches Polynom übergehe. Wir werden auf diese Ergebnisse bei der Auseinandersetzung der Integrationsmethoden im folgenden Abschnitte und auf einem anderen Wege zurückkommen.

§. 5.

Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen.

Dass die Einführung einer neuen Veränderlichen in der gesammten Integralrechnung überhaupt mancherlei Nutzen gewähre, irrationale in rationale Formen verwandle, transscendente in algebraische umsetze u. s. w., weiss jedermann, dass sie auch speciell bei der Integration der linearen Differentialgleichungen nicht unerspriessliche Dienste leiste, haben wir an mehreren Orten gesehen. Siehe S. 105—112 des I. Bandes. Gleichwohl wäre, der ihr zukommenden Wichtigkeit ungeachtet, darüber in der Transformationslehre sehr wenig zu sagen, weil sie in der Ausübung, wenn man von längeren Rechnungen in complicirteren Fällen absieht, keine Schwierigkeiten biethet, wenn sich nicht einerseits gewisse allgemeine Bemerkungen über die Verwendbarkeit oder Nichtverwendbarkeit dieser Transformationsweise in verschiedenen Fällen daran schlössen, andererseits aber die Kenntniss der Entwicklungsweise gewisser allgemeiner Formeln zu diesem Geschäfte nothwendig wäre, die annoch in der Infinitesimalanalysis wenig bekannt sind. Erstere Bemerkungen in Anwendung auf einfachere Fälle soll dieser Paragraph bringen, die Entwicklung der allgemeinen, auf die Ordnungszahl n der Gleichung bezüglichen Formen ist einem späteren vorbehalten.

Wir nehmen an, der Rechner findet aus irgend einem Grunde für gut, die unabhängige Veränderliche x einer Differentialgleichung durch eine andere $\mathfrak{x}$ zu ersetzen, die mit der ersteren durch irgend eine Gleichung, eine höhere Algebraische können wir annehmen, da es sich um Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten handelt:

$$\varphi\,(x\,,\,\mathfrak{x}) = 0 \tag{167}$$

verknüpft ist; so hat er zu erwägen, dass der Differentialgleichung zufolge der Werth von y, der ihr Genüge leistet, ursprünglich eine Function von x sei, etwa $y = \psi(x)$, dass sich aber dieser durch die Substitution des aus der vorliegenden (167) für x hervorgehenden Werthes offenbar verwandle in eine Function von $\mathfrak{x}$, etwa $y = \chi(\mathfrak{x})$ und dass endlich dieser letzterwähnte, durch die Wiedereinführung des aus (167) hervorgehenden Werthes von $\mathfrak{x}$ verwandelt werden müsse in $y = \psi(x)$. Man kann daher, wenn man will, y als eine Function von $\mathfrak{x}$ betrachten, welche x nur insoferne in sich enthält, als diese Veränderliche in $\mathfrak{x}$ enthalten ist auf die durch die (167) angedeutete Weise. Dieser Anschauung gemäss ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{x}}{dx}\\
y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{d\mathfrak{x}^2}\frac{d\mathfrak{x}^2}{dx^2} + \frac{dy}{d\mathfrak{x}}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2}\\
y''' &= \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{d\mathfrak{x}^3}\frac{d\mathfrak{x}^3}{dx^3} + 3\,\frac{d^2y}{d\mathfrak{x}^2}\frac{d\mathfrak{x}}{dx}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} + \frac{dy}{d\mathfrak{x}}\frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3}\\
y^{IV} &= \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4y}{d\mathfrak{x}^4}\frac{d\mathfrak{x}^4}{dx^4} + 6\,\frac{d^3y}{d\mathfrak{x}^3}\frac{d\mathfrak{x}^2}{dx^2}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} + 4\,\frac{d^2y}{d\mathfrak{x}^2}\frac{d\mathfrak{x}}{dx}\frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3} + 3\,\frac{d^2y}{d\mathfrak{x}^2}\cdot\frac{d^2\mathfrak{x}^2}{dx^4} + \frac{dy}{d\mathfrak{x}}\frac{d^4\mathfrak{x}}{dx^4}
\end{aligned}
\tag{168}
$$

. . . .

Die allgemeine, für den Differentiationsexponenten n geltende Formel bringt ein späterer Paragraph, und es dienen all' diese Gleichungen dazu, die nach x genommenen Differentialquotienten in solche nach $\mathfrak{x}$ umzuwandeln, während die Coefficienten entweder Functionen von x geblieben sind, oder, wenn sich die (167) nicht bequem nach $\mathfrak{x}$ auflösen lässt, sogar noch als Functionen von x, $\frac{d\mathfrak{x}}{dx}$, $\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2}$ .... erscheinen. Da aber die (167), mehrere Male nach x unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{x}$ eine Function von x sei, der Differentiation unterworfen, zu folgendem Systeme von Gleichungen führt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{d\mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{x}}{dx} = 0\\
&\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\,\frac{d^2\varphi}{dx\,d\mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{x}}{dx} + \frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{x}^2}\frac{d\mathfrak{x}^2}{dx^2} + \frac{d\varphi}{d\mathfrak{x}}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} = 0\\
&\frac{d^3\varphi}{dx^3} + 3\,\frac{d^3\varphi}{dx^2d\mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{x}}{dx} + 3\,\frac{d^3\varphi}{dx\,d\mathfrak{x}^2}\frac{d\mathfrak{x}^2}{dx^2} + \frac{d^3\varphi}{d\mathfrak{x}^3}\frac{d\mathfrak{x}^3}{dx^3} + 3\,\frac{d^2\varphi}{dx\,d\mathfrak{x}}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} + 3\,\frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{x}^2}\frac{d\mathfrak{x}}{dx}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} + \frac{d\varphi}{d\mathfrak{x}}\frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3} = 0\\
&\frac{d^4\varphi}{dx^4} + 4\,\frac{d^4\varphi}{dx^3d\mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{x}}{dx} + 6\,\frac{d^4\varphi}{dx^2d\mathfrak{x}^2}\frac{d\mathfrak{x}^2}{dx^2} + 4\,\frac{d^4\varphi}{dx\,d\mathfrak{x}^3}\frac{d\mathfrak{x}^3}{dx^3} + \frac{d^4\varphi}{d\mathfrak{x}^4}\frac{d\mathfrak{x}^4}{dx^4} + 6\,\frac{d^3\varphi}{dx^2d\mathfrak{x}}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} +\\
&\quad + 12\,\frac{d^3\varphi}{dx\,d\mathfrak{x}^2}\frac{d\mathfrak{x}}{dx}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} + 6\,\frac{d^3\varphi}{d\mathfrak{x}^3}\frac{d\mathfrak{x}^2}{dx^2}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} + 4\,\frac{d^2\varphi}{dx\,d\mathfrak{x}}\frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3} + 3\,\frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{x}^2}\frac{d^2\mathfrak{x}^2}{dx^4} +\\
&\quad + 4\,\frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{x}^2}\frac{d\mathfrak{x}}{dx}\frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3} + \frac{d\varphi}{d\mathfrak{x}}\frac{d^4\mathfrak{x}}{dx^4} = 0
\end{aligned}
\tag{169}
$$

. . . .

so besitzt man eine Reihe von Formeln, die genügt, um aus den Differentialgleichungscoefficienten x, $\frac{d\mathfrak{x}}{dx}$, $\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2}$, ... zu eliminiren, wonach sie als bloss $\mathfrak{x}$ enthaltende Ausdrücke dastehen, man somit statt einer Gleichung zwischen y und x eine andere zwischen y und $\mathfrak{x}$ erhalten hat. Führt man die erste Hälfte dieser Rechnungsoperationen, die Einführung der Werthe nämlich aus den Gleichungen (168) durch bei den folgenden Differentialgleichungen der zweiten, dritten und vierten Ordnung:

$$
\begin{aligned}
X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y &= 0\\
X_3 y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y &= 0\\
X_4 y^{IV} + X_3 y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y &= 0,
\end{aligned}
\tag{170}
$$

so verwandeln sie sich in:

$$X_2 \frac{d\mathfrak{x}^2}{dx^2} \cdot \frac{d^2y}{d\mathfrak{x}^2} + \left[X_2 \frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} + X_1 \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \right] \frac{dy}{d\mathfrak{x}} + X_0 y = 0$$

$$X_3 \frac{d\mathfrak{x}^3}{dx^3} \cdot \frac{d^3y}{d\mathfrak{x}^3} + \left[3X_3 \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} + X_2 \frac{d\mathfrak{x}^2}{dx^2} \right] \frac{d^2y}{d\mathfrak{x}^2} + \left[X_3 \frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3} + X_2 \frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} + X_1 \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \right] \frac{dy}{dx} + X_0 y = 0 \qquad (171)$$

$$X_4 \frac{d\mathfrak{x}^4}{dx^4} \cdot \frac{d^4y}{d\mathfrak{x}^4} + \left[6X_4 \frac{d\mathfrak{x}^2}{dx^2} \frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} + X_3 \frac{d\mathfrak{x}^3}{dx^3} \right] \frac{d^3y}{d\mathfrak{x}^3} + \left[4X_4 \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3} + 3X_4 \frac{d^2\mathfrak{x}^2}{dx^4} + \right.$$

$$\left. + 3X_3 \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} + X_2 \frac{d\mathfrak{x}^2}{dx^2} \right] \frac{d^2y}{d\mathfrak{x}^2} + \left[X_4 \frac{d^4\mathfrak{x}}{dx^4} + X_3 \frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3} + X_2 \frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} + X_1 \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \right] \frac{dy}{d\mathfrak{x}} + X_0 y = 0,$$

und wenn sich überdiess die (167) nach $\mathfrak{x}$ bequem auflösen lässt, somit $\frac{d\mathfrak{x}}{dx}, \frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2} \ldots\ldots$ als Functionen von x ohne Schwierigkeit ermittelt werden können, so biethen sie auch Coefficienten, die reine Functionen der Veränderlichen x sind, anstatt welcher man nur noch vermittelst der (167) die andere $\mathfrak{x}$ einzuführen haben wird. Lässt sich nun diese Gleichung auch nach x ohne Mühe auflösen und gibt sie für diese Veränderliche etwa gar einen rationalen Werth, so gelingt die beabsichtigte Einführung ohne alle Schwierigkeit und kann von einer rationalen Form der Coefficienten abermals zu einer solchen führen. Es ist diess aber offenbar nur ein seltener Fall, derjenige nämlich, wo zwischen x und $\mathfrak{x}$ eine Gleichung besteht, wie die folgende:

$$a + b\mathfrak{x} + cx + dx\mathfrak{x} = 0,$$

welche sowohl x durch $\mathfrak{x}$, als auch $\mathfrak{x}$ durch x rational auszudrücken gestattet, und der wohl höchst selten vorkommen dürfte. Ist man hingegen entweder von einer irrationalen Differentialgleichung ausgegangen, oder erscheint der Werth von x in Function von $\mathfrak{x}$ irrational; so ist auch die transformirte Gleichung, zu der man gelangt, eine irrationale, kann jedoch gelegentlich eine Division durch einen irrationalen Factor zulassen und dadurch wieder rational werden, muss diess jedoch nicht nothwendigerweise.

Ein zweiter günstigerer Fall ist der, wo die Gleichung (167) sich wohl nach x, aber nicht nach $\mathfrak{x}$ rational auflösen lässt. Man hat sich dann behufs der gänzlichen Elimination von x aus den Differentialgleichungen (171) an die Formeln (169) zu wenden, in welchen wir, um sie zum Gebrauche geschmeidiger zu machen:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi', \quad \frac{d\varphi}{d\mathfrak{x}} = \varphi_{,}, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi'', \quad \frac{d^2\varphi}{dx\,d\mathfrak{x}} = \varphi'_{,}, \quad \frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{x}^2} = \varphi_{,,},$$

und allgemein:

$$\frac{d^{r+s}\varphi}{dx^r\,d\mathfrak{x}^s} = \varphi^{(r)}_{(s)}$$

setzen werden. Sie verwandeln sich hiedurch in:

$$(172)\quad \begin{aligned}
&\varphi' + \varphi_{,}\frac{d\mathfrak{r}}{dx} = 0\\
&\varphi'' + 2\varphi'_{,}\frac{d\mathfrak{r}}{dx} + \varphi_{,,}\frac{d\mathfrak{r}^2}{dx^2} + \varphi_{,}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2} = 0\\
&\varphi''' + 3\varphi''_{,}\frac{d\mathfrak{r}}{dx} + 3\varphi'_{,,}\frac{d\mathfrak{r}^2}{dx^2} + \varphi_{,,,}\frac{d\mathfrak{r}^3}{dx^3} + 3\varphi'_{,}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2} + 3\varphi_{,,}\frac{d\mathfrak{r}}{dx}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2} + \varphi_{,}\frac{d^3\mathfrak{r}}{dx^3} = 0\\
&\varphi^{IV} + 4\varphi'''_{,}\frac{d\mathfrak{r}}{dx} + 6\varphi''_{,,}\frac{d\mathfrak{r}^2}{dx^2} + 4\varphi'_{,,,}\frac{d\mathfrak{r}^3}{dx^3} + \varphi_{IV}\frac{d\mathfrak{r}^4}{dx^4} + 6\varphi''_{,}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2} + 12\varphi'_{,,}\frac{d\mathfrak{r}}{dx}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2} +\\
&\quad + 6\varphi_{,,,}\frac{d\mathfrak{r}^2}{dx^2}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2} + 4\varphi'_{,}\frac{d^3\mathfrak{r}}{dx^3} + 3\varphi_{,,}\frac{d^2\mathfrak{r}^2}{dx^4} + 4\varphi_{,,}\frac{d\mathfrak{r}}{dx}\frac{d^3\mathfrak{r}}{dx^3} + \varphi_{,}\frac{d^4\mathfrak{r}}{dx^4} = 0
\end{aligned}$$

. . . .

Die erste von ihnen liefert einen Werth für $\frac{d\mathfrak{r}}{dx}$, der aus $\mathfrak{r}$ und x rational zusammengesetzt ist, nämlich:

$$(173)\quad \frac{d\mathfrak{r}}{dx} = -\frac{\varphi'}{\varphi_{,}},$$

diesen substituiren wir in die zweite und ziehen sodann aus ihr einen ähnlichen Werth von $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2}$:

$$(174)\quad \frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2} = -\frac{1}{\varphi_{,}^3}\left[\varphi''\varphi_{,}^2 - 2\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,} + \varphi_{,,}\varphi'^2\right].$$

Mit ihrer Hilfe gibt die dritte jetzt einen Ausdruck für $\frac{d^3\mathfrak{r}}{dx^3}$:

$$(175)\quad \begin{aligned}\frac{d^3\mathfrak{r}}{dx^3} = -\frac{1}{\varphi_{,}^5}\Big[&\varphi'''\varphi_{,}^4 - 3\varphi''_{,}\varphi'\varphi_{,}^3 + 3\varphi'_{,,}\varphi'^2\varphi_{,}^2 - \varphi_{,,,}\varphi'^3\varphi_{,} - 3\varphi''\varphi'_{,}\varphi_{,}^3 +\\
&+ 3\varphi''\varphi_{,,}\varphi'\varphi_{,}^2 + 6\varphi'^2_{,}\varphi'\varphi_{,}^2 - 9\varphi'_{,}\varphi_{,,}\varphi'^2\varphi_{,} + 3\varphi_{,,}^2\varphi'^3\Big]\end{aligned}$$

dann die vierte auf dieselbe Weise:

$$(176)\quad \begin{aligned}\frac{d^4\mathfrak{r}}{dx^4} = -\frac{1}{\varphi_{,}^7}\Big[&\varphi^{IV}\varphi_{,}^6 - 4\varphi'''_{,}\varphi'\varphi_{,}^5 + 6\varphi''_{,,}\varphi'^2\varphi_{,}^4 - 4\varphi'_{,,,}\varphi'^3\varphi_{,}^3 + \varphi_{IV}\varphi'^4\varphi_{,}^2 - 4\varphi'''\varphi'_{,}\varphi_{,}^5 +\\
&+ 4\varphi'''\varphi_{,,}\varphi'\varphi_{,}^4 - 6\varphi''_{,}\varphi''\varphi_{,}^5 + 24\varphi''_{,}\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,}^4 - 18\varphi''_{,}\varphi_{,,}\varphi'^2\varphi_{,}^3 + 12\varphi'_{,,}\varphi''\varphi'\varphi_{,}^4 -\\
&- 36\varphi'_{,,}\varphi'_{,}\varphi'^2\varphi_{,}^3 + 24\varphi'_{,,}\varphi_{,,}\varphi'^3\varphi_{,}^2 - 6\varphi_{,,,}\varphi''\varphi'^2\varphi_{,}^3 + 16\varphi_{,,,}\varphi'_{,}\varphi'^3\varphi_{,}^2 - 10\varphi_{,,,}\varphi_{,,}\varphi'^4\varphi_{,} +\\
&+ 3\varphi''^2\varphi_{,,}\varphi_{,}^4 + 12\varphi''\varphi'^2_{,}\varphi_{,}^4 - 36\varphi''\varphi'_{,}\varphi_{,,}\varphi'\varphi_{,}^3 + 18\varphi''\varphi_{,,}^2\varphi'^2\varphi_{,}^2 - 24\varphi'^3_{,}\varphi'\varphi_{,}^3 +\\
&+ 72\varphi'^2_{,}\varphi_{,,}\varphi'^2\varphi_{,}^2 - 60\varphi'_{,}\varphi_{,,}^2\varphi'^3\varphi_{,} + 15\varphi_{,,}^3\varphi'^4\Big]\end{aligned}$$

u. s. w. Diese Werthe (173), (174), (175), (176) der Differentialquotienten kann man jetzt in die Gleichungen (171) substituiren, deren Coefficienten sich hiedurch als rationale Functionen von x und $\mathfrak{r}$ darstellen werden, wenn ursprünglich X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 rational waren, und im entgegen-

gesetzten Falle dieselbe ursprüngliche Irrationalgrösse annoch enthalten werden. Die Substitutionsresultate sind:

$$X_2\varphi'^{3}\varphi_{,}\,.\,\frac{d^2y}{dr^2}-\left[X_2\left(\varphi''\varphi_{,}^{2}-2\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,}+\varphi_{,,}\varphi'^{3}\right)+X_1\varphi'\varphi_{,}^{2}\right]\frac{dy}{dr}+X_0\varphi_{,}^{3}\,.\,y=0$$

$$\begin{aligned}X_3\varphi'^{3}\varphi_{,}^{3}\,.\,\frac{d^3y}{dr^3}&-\left[3X_3\left(\varphi''\varphi_{,}^{2}-2\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,}+\varphi_{,,}\varphi'^{3}\right)+X_2\varphi'\varphi_{,}^{2}\right]\varphi'\varphi_{,}\,.\,\frac{d^2y}{dr^2}+\\&+\Big[X_3\big(\varphi'''\varphi_{,}^{4}-3\varphi''_{,}\varphi'\varphi_{,}^{3}+3\varphi'_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{2}-\varphi_{,,,}\varphi'^{3}\varphi_{,}-3\varphi''\varphi'_{,}\varphi_{,}^{3}+\\&+3\varphi''\varphi_{,,}\varphi'\varphi_{,}^{2}+6\varphi'^{2}_{,}\varphi'\varphi_{,}^{2}-9\varphi'_{,}\varphi_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,}+3\varphi_{,,}^{2}\varphi'^{3}\big)+\\&+X_2\left(\varphi''\varphi_{,}^{2}-2\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,}+\varphi_{,,}\varphi'^{3}\right)\varphi_{,}^{2}+X_1\varphi'\varphi_{,}^{4}\Big]\frac{dy}{dr}+X_0\varphi_{,}^{5}\,y=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_4\,.\,\varphi'^{4}\varphi_{,}^{2}\,.\,\frac{d^4y}{dr^4}&-\left[6X_4\left(\varphi''\varphi_{,}^{2}-2\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,}+\varphi_{,,}\varphi'^{3}\right)+X_3\varphi'\varphi_{,}^{2}\right]\varphi'^{2}\varphi_{,}^{2}\,.\,\frac{d^3y}{dr^3}+\\&+\Big[X_4\big(4\varphi'''\varphi'\varphi_{,}^{4}-12\varphi''_{,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{3}+12\varphi'_{,,}\varphi'^{3}\varphi_{,}^{2}-4\varphi_{,,,}\varphi'^{4}\varphi_{,}+3\varphi''^{2}\varphi_{,}^{4}-24\varphi''\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,}^{3}+\\&+18\varphi''\varphi_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{2}+36\varphi'^{2}_{,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{2}-48\varphi'_{,}\varphi_{,,}\varphi'^{3}\varphi_{,}+15\varphi_{,,}^{2}\varphi'^{4}\big)+\\&+3X_3\left(\varphi''\varphi_{,}^{2}-2\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,}+\varphi_{,,}\varphi'^{3}\right)\varphi'\varphi_{,}^{2}+X_2\varphi'^{2}\varphi_{,}^{4}\Big]\varphi_{,}\,.\,\frac{d^2y}{dr^2}-\\&-\Big[X_4\big(\varphi^{IV}\varphi_{,}^{6}-4\varphi'''_{,}\varphi'\varphi_{,}^{5}+6\varphi''_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{4}-4\varphi'_{,,,}\varphi'^{3}\varphi_{,}^{3}+\varphi_{IV}\varphi'^{4}\varphi_{,}^{2}-\\&-4\varphi'''\varphi'_{,}\varphi_{,}^{5}+4\varphi'''\varphi_{,,}\varphi'\varphi_{,}^{4}-6\varphi''_{,}\varphi''\varphi_{,}^{5}+24\varphi''_{,}\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,}^{4}-\\&-18\varphi''_{,}\varphi_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{3}+12\varphi'_{,,}\varphi''\varphi'\varphi_{,}^{4}-36\varphi'_{,,}\varphi'_{,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{3}+24\varphi'_{,,}\varphi_{,,}\varphi'^{3}\varphi_{,}^{2}-\\&-6\varphi_{,,,}\varphi''\varphi'^{2}\varphi_{,}^{3}+16\varphi_{,,,}\varphi'_{,}\varphi'^{3}\varphi_{,}^{2}-10\varphi_{,,,}\varphi_{,,}\varphi'^{4}\varphi_{,}+3\varphi''^{2}\varphi_{,,}\varphi_{,}^{4}+\\&+12\varphi''\varphi'^{2}_{,}\varphi_{,}^{4}-36\varphi''\varphi'_{,}\varphi_{,,}\varphi'\varphi_{,}^{3}+18\varphi''\varphi_{,,}^{2}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{2}-24\varphi'^{3}_{,}\varphi'\varphi_{,}^{3}+\\&+72\varphi'^{2}_{,}\varphi_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{2}-60\varphi'_{,}\varphi_{,,}^{2}\varphi'^{3}\varphi_{,}+15\varphi_{,,}^{3}\varphi'^{4}\big)+\\&+X_3\big(\varphi'''\varphi_{,}^{4}-3\varphi''_{,}\varphi'\varphi_{,}^{3}+3\varphi'_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{2}-\varphi_{,,,}\varphi'^{3}\varphi_{,}-3\varphi''\varphi'_{,}\varphi_{,}^{3}+\\&+3\varphi''\varphi_{,,}\varphi'\varphi_{,}^{2}+6\varphi'^{2}_{,}\varphi'\varphi_{,}^{2}-9\varphi'_{,}\varphi_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,}+3\varphi_{,,}^{2}\varphi'^{3}\big)\varphi_{,}^{2}+\\&+X_2\left(\varphi''\varphi_{,}^{2}-2\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,}+\varphi_{,,}\varphi'^{3}\right)\varphi_{,}^{4}+X_1\varphi'\varphi_{,}^{6}\Big]\frac{dy}{dr}+X_0\varphi_{,}^{7}\,.\,y=0.\end{aligned}$$

und es bleibt nur noch übrig, aus ihnen vermittelst der (167) die Veränderliche x herauszuschaffen, was gemäss der gemachten Voraussetzung, dass x rational durch r ausgedrückt werden kann, ohne Schwierigkeit angeht, auch jedesmal zu rationalen Formen führt, wenn ursprünglich nur solche in den Coefficienten vorhanden waren und oft auch dann noch rationale Resultate liefert, wenn die Coefficienten ursprünglich nur solche Irrationalgrössen enthielten, die sich vermittelst der (167) auch rational durch x und r ausdrücken lassen, in welchem Falle daher die Befreiung von Irrationalgrössen eine Folge der ausgeführten Transformation ist.

Hieraus ergibt sich schon zum Theil der Nutzen der Einführung einer neuen Variablen, den wir hier nicht erschöpfend darzustellen, sondern nur durch Aufzählung der Hauptfälle, in welchen diese Transformationsweise erspriessliche Dienste leistet, in ein helleres Licht zu setzen beabsichtigen.

Anwendbar ist dieses Verfahren jedesmal, so oft die vorgelegte Differentialgleichung Coefficienten besitzt, die eine Wurzelgrösse von der Art derjenigen einschliessen, die auch in einem gewöhnlichen Differentialausdrucke, der der Integration zu unterwerfen ist, wenn sie darin vorkommt, das Rationalmachen zulässt und zwar eben zur Rationalmachung der Differentialgleichung selbst vermittelst derselben Substitution, also namentlich:

a) Wenn die Coefficienten aus x und der Wurzelgrösse $\left(\frac{x+c}{ax+b}\right)^{\frac{1}{q}}$ rational zusammengesetzt sind, die Einführung einer neuen Veränderlichen und hiemit verbundene Rationalmachung gelingt dann hier, so wie bei dem gewöhnlichen Integriren durch die Substitution:

$$\frac{x+c}{ax+b} = \mathfrak{r}^q, \tag{178}$$

so dass jetzt die bereits von Brüchen befreit gedachte (167) in die folgende übergeht:

$$\varphi(x, \mathfrak{r}) = x\left[1 - a\mathfrak{r}^q\right] + c - b\mathfrak{r}^q = 0. \tag{179}$$

Hier ist der specielle Fall $a=0$, $b=1$, in welchem die wegzuschaffende Irrationalgrösse einfacher Weise $\sqrt[q]{x+c}$ ist, mit inbegriffen; ihm entspricht die Substitutionsgleichung:

$$\varphi(x, \mathfrak{r}) = x + c - \mathfrak{r}^q = 0. \tag{180}$$

b) Wenn sich in den Coefficienten eine Quadratwurzel über einem quadratischen Ausdruck befindet, rational aber sonst auf beliebige Weise mit x verknüpft, etwa die $\sqrt{x^2+ax+b}$. Hier hilft bekanntlich die Substitution:

$$\mathfrak{r} - x = \sqrt{x^2 + ax + b},$$

die der (167) folgende Gestalt ertheilt:

$$\varphi(x, \mathfrak{r}) = x\left[a + 2\mathfrak{r}\right] + b - \mathfrak{r}^2 = 0, \tag{181}$$

oder auch die andere:

$$x\mathfrak{r} + \sqrt{b} = \sqrt{x^2 + ax + b},$$

in Folge deren die (167) so aussieht:

$$\varphi(x, \mathfrak{r}) = x\left[1 - \mathfrak{r}^2\right] + a - 2\mathfrak{r}\sqrt{b} = 0, \tag{182}$$

oder, falls der quadratische Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, bereits in einfache Factoren zerlegt, in der Form $(x-a)(x-b)$ vorkäme, die folgende dritte:

$$(x-a)\,\mathfrak{r} = \sqrt{(x-a)(x-b)},$$

der die folgende Gestalt der (167) angehört:

$$\varphi(x, \mathfrak{r}) = x\left[1 - \mathfrak{r}^2\right] - b + a\mathfrak{r}^2 = 0. \tag{183}$$

c) Wenn die Gleichungscoefficienten zwei in denselben gesondert erscheinende Quadratwurzeln, wie $\sqrt{x+a}$ und $\sqrt{x+b}$ enthalten. Hier wird man die Befreiung von beiden zugleich durch eine und dieselbe Substitution bewerkstelligen, nämlich:

$$\sqrt{x+a} = \mathfrak{r} + \frac{a-b}{4\mathfrak{r}},$$

woraus:

$$\sqrt{x+b} = \mathfrak{r} - \frac{a-b}{4\mathfrak{r}}$$

folgt. Die rational gemachte Substitutionsgleichung ist in diesem Falle:

$$\varphi(x, \mathfrak{r}) = x + \frac{a+b}{2} - \mathfrak{r}^2 - \frac{(a-b)^2}{16\mathfrak{r}^2} = 0. \tag{184}$$

Auch wenn die beiden Irrationalgrössen die etwas complicirtere Form:

$$\sqrt{\frac{x+a}{x+c}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{x+b}{x+c}}$$

besitzen sollten, lässt sich noch derselbe Zweck erreichen durch zwei auf einander folgende Substitutionen. Man bemerkt nämlich, dass:

$$\sqrt{\frac{x+a}{x+c}} = \sqrt{1 + \frac{a-c}{x+c}} = \sqrt{1+u}$$

sei, wenn man:

$$u = \frac{a-c}{x+c}$$

sein lässt, und dass auf dieselbe Weise:

$$\sqrt{\frac{x+b}{x+c}} = \sqrt{\frac{b-c}{a-c}}\sqrt{\frac{a-c}{b-c}+u}$$

werde. Man hat sohin anstatt der beiden gegebenen Wurzelgrössen ein Paar andere erhalten, deren Verwandlung in rationale Formen durch die einzige eben besprochene Substitution gelingt, kömmt also, wie gesagt, durch zwei aufeinander folgende Substitutionen zum Ziele. Man kann sie jedoch auch, wenn man will, in eine einzige zusammenziehen und erhält, so man diess thut, die folgende Substitutionsgleichung:

$$\varphi(x, \mathfrak{r}) = (x+c)\left[16(b-c)^2\mathfrak{r}^4 + 8(b-c)(2c-b-a)\mathfrak{r}^2 + (b-a)^2\right] - 16(a-c)(b-c)^2\mathfrak{r}^2 = 0. \tag{185}$$

Es versteht sich von selbst, dass die sämmtlichen, *sub a)*, *b)* und *c)* angeführten Substitutionsweisen nicht die einzigen, sondern nur die einfachsten sind, durch die der beabsichtigte Zweck der Rationalmachung erreicht wird, und dass man in den sämmtlichen Formeln: (179), (180), (181), (182), (183), (184), (185) die neu eingeführte Veränderliche $\mathfrak{r}$ auch durch eine jede rationale Function derselben zu ersetzen berechtigt sei, wenn man sich hievon eine erspriessliche Nebenwirkung verspricht. Der Hauptzweck des Rationalmachens der Gleichung ist immer erreicht.

Mehr Fälle als die aufgezählten lassen sich hier, so wie bei dem gewöhnlichen Integrationsgeschäft im Allgemeinen nicht angeben, und man sieht, dass hier, wie dort, das Rationalmachen durch schickliche Einführung einer neuen Veränderlichen nur in wenigen Fällen gelinge. Um ein einfaches Beispiel zu haben, nehme man die Differentialgleichung:

$$x \,.\, y'' + \mathfrak{r}y' . \sqrt{x^2 + a^2} - (x^2 - a^2)\, y = 0.$$

Hier ist gemäss dem Gesagten die Substitution angezeigt:

$$\mathfrak{r} - x = \sqrt{x^2 + a^2},$$

und man hat daher:

$$\varphi = 2x\mathfrak{r} + a^2 - \mathfrak{r}^2 = 0, \tag{186}$$

da aber in diesen, so wie in allen anderen hier aufgezählten Fällen die Function φ nach x vom ersten Grade ist, sohin ihre, nach dieser Variablen genommenen Differentialquotienten vom zweiten angefangen jedesmal verschwinden; so wird es zweckdienlich sein, den Formeln (177) die unter solchen Umständen geltende einfachere Gestalt zu ertheilen dadurch, dass man alle Glieder als verschwindend auslässt, in denen ein φ erscheint, das oben mit mehr als einem Striche versehen ist Sie werden hiedurch:

$$X_2 \varphi'^{2} \varphi_{,} \,.\, \frac{d^2y}{d\mathfrak{r}^2} - \Big[X_2 \left(- 2\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,} + \varphi_{,,}\varphi'^{3}\right) + X_1 \varphi'\varphi_{,}^{2}\Big] \frac{dy}{d\mathfrak{r}} + X_0\, \varphi_{,}^{3} \,.\, y = 0$$

$$\begin{aligned}
X_3 \varphi'^{3} \varphi_{,}^{3} \,.\, \frac{d^3y}{d\mathfrak{r}^3} &- \Big[3X_3 \left(- 2\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,} + \varphi_{,,}\varphi'^{3}\right) + X_2 \varphi'\varphi_{,}^{2}\Big]\, \varphi'\varphi_{,} \frac{d^2y}{d\mathfrak{r}^2} + \\
&+ \Big[X_3 \left(3\varphi'_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{2} - \varphi_{,,,}\varphi'^{3}\varphi_{,} + 6\varphi'^{2}_{,}\varphi'\varphi_{,}^{2} - 9\varphi'_{,}\varphi_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,} + 3\varphi_{,,}^{2}\varphi'^{3}\right) + \\
&+ X_2 \left(- 2\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,} + \varphi_{,,}\varphi'^{3}\right) \varphi_{,}^{2} + X_1 \varphi'\varphi_{,}^{4}\Big] \frac{dy}{d\mathfrak{r}} + X_0\, \varphi_{,}^{5}\, y = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_4 \varphi'^{4} \varphi_{,}^{3} \,.\, \frac{d^4y}{d\mathfrak{r}^4} &- \Big[6X_4 \left(- 2\varphi_{,}\varphi'\varphi_{,} + \varphi_{,,}\varphi'^{3}\right) + X_3 \varphi'\varphi_{,}^{2}\Big]\, \varphi'^{2}\varphi_{,}^{3} \,.\, \frac{d^3y}{d\mathfrak{r}^3} + \\
&+ \Big[X_4 \left(12\varphi'_{,,}\varphi'^{3}\varphi_{,}^{2} - 4\varphi_{,,,}\varphi'^{4}\varphi_{,} + 36\varphi'^{2}_{,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{2} - 48\varphi'_{,}\varphi_{,,}\varphi'^{3}\varphi_{,} + 15\varphi_{,,}^{2}\varphi'^{4}\right) + \\
&+ 3X_3 \left(- 2\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,} + \varphi_{,,}\varphi'^{3}\right) \varphi'\varphi_{,}^{2} + X_2 \varphi'^{2}\varphi_{,}^{4}\Big]\, \varphi_{,} \,.\, \frac{d^2y}{d\mathfrak{r}^2} - \\
&- \Big[X_4 \left(- 4\varphi'_{,,,}\varphi'^{3}\varphi_{,}^{2} + \varphi_{IV}\varphi'^{4}\varphi_{,}^{2} - 36\varphi'_{,,}\varphi'_{,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{3} + 24\varphi'_{,,}\varphi_{,,}\varphi'^{3}\varphi_{,}^{2} + \right. \\
&\quad + 16\varphi_{,,,}\varphi'_{,}\varphi'^{3}\varphi_{,}^{2} - 10\varphi_{,,,}\varphi_{,,}\varphi'^{4}\varphi_{,} - 24\varphi'^{3}_{,}\varphi'\varphi_{,}^{3} + 72\varphi'^{2}_{,}\varphi_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{2} - \\
&\quad \left. - 60\varphi'_{,}\varphi_{,,}^{2}\varphi'^{3}\varphi_{,} + 15\varphi_{,,}^{3}\varphi'^{4}\right) + \\
&+ X_3 \left(3\varphi'_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,}^{2} - \varphi_{,,,}\varphi'^{3}\varphi_{,} + 6\varphi'^{2}_{,}\varphi'\varphi_{,}^{2} - 9\varphi'_{,}\varphi_{,,}\varphi'^{2}\varphi_{,} + 3\varphi_{,,}^{2}\varphi'^{3}\right) \varphi_{,}^{2} + \\
&+ X_2 \left(- 2\varphi'_{,}\varphi'\varphi_{,} + \varphi_{,,}\varphi'^{3}\right) \varphi_{,}^{4} + X_1 \varphi'\varphi_{,}^{6}\Big] \frac{dy}{d\mathfrak{r}} + X_0\, \varphi_{,}^{7} \,.\, y = 0.
\end{aligned} \tag{187}$$

Nun machen wir in die erste von ihnen die folgenden, hier giltigen Substitutionen:

$$\varphi' = 2\mathfrak{r}, \quad \varphi_{,} = 2\,(x - \mathfrak{r}), \quad \varphi'_{,} = 2, \quad \varphi_{,,} = -2, \quad \sqrt{x^2 + a^2} = \mathfrak{r} - x;$$

so ist das Resultat eine Gleichung mit rational aus x und $\mathfrak{r}$ zusammengefügten Coefficienten. In dieser schreiben wir endlich: $x = \frac{\mathfrak{r}^2 - a^2}{2\mathfrak{r}}$ und gelangen so zur gesuchten rationalen Gleichung zwischen y und $\mathfrak{r}$:

$$8\mathfrak{r}^3(\mathfrak{r}^2-a^2)(\mathfrak{r}^2+a^2)\frac{d^2y}{d\mathfrak{r}^2} + \left[16a^2\mathfrak{r}^4(\mathfrak{r}^2-a^2)+4r\mathfrak{r}^3(\mathfrak{r}^2+a^2)^3\right]\frac{dy}{d\mathfrak{r}} - \left[\mathfrak{r}^4-6\mathfrak{r}^2a^2+a^4\right](a^2+\mathfrak{r}^2)^2\,y = 0.$$

Anwendbar ist ferner die in Rede stehende Transformationsweise, wenn zwar eine rationale Differentialgleichung vorliegt, vielleicht sogar mit ganzen Repartitionszahlen, wenn aber die gewissen gruppenweise vorkommenden negativen Brüche für den in der Formenlehre stets mit k bezeichneten Exponenten auf Irrationalgrössen in den particulären Integralen hinweisen, die man behufs der leichteren Berechnung aus ihnen herauszuschaffen wünscht. Sind nun diese Irrationalgrössen keine anderen, als die kurz zuvor zur Sprache gebrachten, so gelingt die Befreiung von denselben durch die eben besprochenen Substitutionen. Um auch diess in einem sehr einfachen Beispiele zu sehen, betrachte man die Gleichung:

$$2\,(x + a)\,(x + b)\,.\,y'' + (a - b)\,.\,y' + 2\,(x + a)^2\,y = 0. \tag{188}$$

Sieht man die den beiden Factoren des ersten Coefficienten entsprechenden Werthe von k, so sind sie $k = -\frac{3}{2}$ für den Factor $x + a$ und $k = -\frac{1}{2}$ für den anderen, nämlich $x + b$. Ersterer deutet auf eine Irrationalgrösse $\sqrt{x + a}$ in zwei particulären Integralen, letzterer verräth das Vorhandensein von $\frac{1}{\sqrt{x + b}}$ in eben denselben. Diess in Verbindung mit dem Umstande, dass die Differentialgleichung nur der zweiten Ordnung angehört, also nur Irrationalgrössen beherbergen kann, die aus der Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades hervorgehen, d. h. mit nur Einer Wurzelgrösse, überzeugt uns von der Existenz des einzigen irrationalen Elementes $\sqrt{\frac{x + a}{x + b}}$ im Integrale. Die rational machende Substitution ist daher:

$$\mathfrak{r}^2 = \frac{x + a}{x + b},$$

folglich:

$$\varphi = x\,(\mathfrak{r}^2 - 1) + \mathfrak{r}^2 b - a = 0, \tag{189}$$

und wirklich führt sie zu der transformirten Gleichung zwischen y und $\mathfrak{r}$: (190)

$$\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}^2 - 1)^4\,.\,\frac{d^2y}{d\mathfrak{r}^2} + 2\,(\mathfrak{r}^2 + 1)\,(\mathfrak{r}^2 - 1)^3\,.\,\frac{dy}{d\mathfrak{r}} + 4\,(a - b)^2\,\mathfrak{r}^6\,.\,y = 0,$$

in welcher keinerlei Spuren von Irrationalgrössen mehr bemerkbar sind. Diese wäre nun nach den Vorschriften der früheren Paragraphe einer ferneren Behandlung zu unterwerfen. Diesen zufolge gewahrt man, zuvörderst die Gradzahlen der Coefficienten ins Auge fassend, die 9, 8, 5 sind, einen auf das Paar entfallenden Abfall von zwei Einheiten, der uns jedenfalls überzeugt, dass die Genüge leistenden

Werthe in Bezug auf eben diese Gradzahlen bereits der ersten Functionsklasse angehörig seien, und sogar vermuthen lässt, dass beide particulären Integrale, in der Form $e^{\int \varphi dx}$ gedacht, φ vom Grade -2 besitzen. Nicht so verhält sich die Sache in Rücksicht auf den Factorenbau der Coefficienten, die der Reihe nach sowohl Factoren $x-1$, als auch $x+1$ besitzen, 4, 3, 0 an der Zahl, und hiedurch zwei Integrale kund geben, die beide in der Form:

$$y = e^{\int \frac{\varphi dx}{(x^2-1)^2}} z$$

erscheinen, und sohin der Befreiung von dem ihnen anhängenden exponentiellen Factor bedürftig sind, um in jeder Beziehung zur ersten Klasse herabgebracht zu werden. Der Multiplikator x des ersten Coefficienten kommt hier nicht in Betracht, und braucht im Nenner von φ nicht vorausgesetzt zu werden, weil er zunächst zu einem Bestandtheile, wie $k \log x$ des Exponenten der Exponentiellen Veranlassung gibt, sodann aber einen algebraischen Factor x^k von z begründet, der auf die Klasse, zu der z gehört, keinen Einfluss nimmt. Von dem Bruche $\frac{\varphi}{(x^2-1)^2}$ aber lassen sich zwei aggregative Bestandtheile ablösen, nämlich die:

$$\frac{\lambda}{(x+1)^2} + \frac{\mu}{x+1}, \qquad \text{und} \qquad \frac{\lambda'}{(x-1)^2} + \frac{\mu'}{x-1},$$

welchen die exponentiellen Factoren beider particulärer Integrale entsprechen:

$$e^{\int \left(\frac{\lambda}{(x+1)^2} + \frac{\mu}{x+1}\right) dx}, \qquad e^{\int \left(\frac{\lambda'}{(x+1)^2} + \frac{\mu'}{x-1}\right) dx},$$

von welchen die Befreiung derselben zu bewerkstelligen ist. Gemäss den Vorschriften nun des §. 3 befreien wir zuvörderst vom ersten dieser Factoren vermittelst der hiezu dienlichen Substitution:

$$y = e^{\int \left(\frac{\lambda}{(x+1)^2} + \frac{\mu}{x+1}\right) dx} z,$$

der man, um den Coefficienten, so wie es sein muss, nach aufsteigenden Potenzen von $x+1$ zu ordnen, die andere diesem Zwecke entsprechende:

$$x + 1 = \xi \qquad \text{oder} \qquad x = -1 + \xi$$

vorangehen lassen wird, wodurch sich aus der Gleichung (190) zwischen y und x die folgende zwischen y und ξ ergibt:

$$\begin{aligned} & \left[-16 + 48\xi - 56\xi^2 + 32\xi^3 - 9\xi^4 + \xi^5\right] \xi^4 \cdot \frac{d^2y}{d\xi^2} + \\ (191) \qquad & + \left[-32 + 80\xi - 88\xi^2 + 52\xi^3 - 16\xi^4 + 2\xi^5\right] \xi^3 \cdot \frac{dy}{d\xi} + \\ & + 4(a-b)^2 \left[-1 + 5\xi - 10\xi^2 + 10\xi^3 - 5\xi^4 + \xi^5\right] \cdot y = 0, \end{aligned}$$

während die oberwähnte Substitutionsgleichung jetzt in die ähnliche:

$$y = e^{\int\left(\frac{\lambda}{\xi^2}+\frac{\mu}{\xi}\right)d\xi}\,\mathfrak{z}$$

übergeht. Hierauf passen ganz die Formeln (71), (72), (73), (76) u. s. w. des §. 3, in denen die vorliegenden enthalten sind als specieller Fall und zwar:

$$a = 0, \qquad m = 2, \qquad x = \xi$$

$$\begin{aligned}
X_2 &= -16 + 48\xi - 56\xi^2 + 32\xi^3 - 9\xi^4 + \xi^5 \\
X_1 &= \quad -32\xi + 80\xi^2 - 88\xi^3 + 52\xi^4 - 16\xi^5 + 2\xi^6 \\
X_0 &= 4\left[-1 + 5\xi - 10\xi^2 + 10\xi^3 - 5\xi^4 + \xi^5\right](a-b)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underset{\lambda}{A} &= -16\lambda^2 - 4(a-b)^2 \\
\underset{\lambda}{B} &= 48\lambda^2 - 32\lambda + 20(a-b)^2 \\
\underset{\mu}{B} &= 48\lambda^2 - 32\lambda + 20(a-b)^2 - 32\lambda\mu \\
ma_2\lambda &= -32\lambda
\end{aligned}$$

und trifft man endlich eine solche Wahl von x und μ, dass die der oberwähnten Substitution entsprechende transformirte Gleichung durch ξ^2 theilbar wird, ihre Coefficienten also nach wirklich durchgeführter Division 2, 0, 0 solche Factoren ausweisen, wodurch dann die beabsichtigte Befreiung eines der particulären Integrale von seinem exponentiellen Factor erlangt ist, d. h. zieht man λ und μ aus den Gleichungen:

$$\underset{\lambda}{A} = 0, \qquad \underset{\mu}{B} - ma_2\lambda = 0,$$

welche die Doppelwerthe liefern:

$$\lambda = \pm\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-1}, \qquad \mu = \mp\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-1};$$

so gelangt man zu den zwei der einen und anderen Bedeutung dieser Doppelwerthe entsprechenden transformirten Gleichungen zwischen ξ und $\mathfrak{z}$, so wie zwischen ξ und $\mathfrak{z}$:

$$\begin{aligned}
&\left[-16 + 48\xi - 56\xi^2 + 32\xi^3 - 9\xi^4 + \xi^5\right]\xi^2\cdot\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\xi^2} + \\
&+\left[\begin{array}{l} -32\xi + 80\xi^2 - 88\xi^3 + 52\xi^4 - 16\xi^5 + 2\xi^6 + \\ +(-16 + 64\xi - 104\xi^2 + 88\xi^3 - 41\xi^4 + 10\xi^5 - \xi^6)(a-b)\sqrt{-1}\end{array}\right]\frac{d\mathfrak{z}}{d\xi} + \\
&+\left[\begin{array}{l} \frac{1}{4}(+8 - 32\xi + 49\xi^2 - 35\xi^3 + 11\xi^4 - \xi^5)(a-b)^2 \\ +\frac{1}{2}(\quad - 8\xi + 20\xi^2 - 18\xi^3 + 7\xi^4 - \xi^5)(a-b)\sqrt{-1}\end{array}\right]\mathfrak{z} = 0.
\end{aligned} \tag{192}$$

$$\left[-16+48\xi-56\xi^2+32\xi^3-9\xi^4+\xi^5\right]\cdot\xi^2\cdot\frac{d^2\mathfrak{Z}}{d\xi^2}+$$

$$(193)\qquad +\left[\begin{array}{l} \qquad\qquad -32\xi+80\xi^2-88\xi^3+52\xi^4-16\xi^5+2\xi^6 \\ +(+16-64\xi+104\xi^2-88\xi^3+41\xi^4-10\xi^5+\xi^6)(a-b)\sqrt{-1} \end{array}\right]\frac{d\mathfrak{Z}}{d\xi}+$$

$$+\left[\begin{array}{l} \frac{1}{4}(+8-32\xi+49\xi^2-35\xi^3+11\xi^4-\xi^5)(a-b)^2+ \\ +\frac{1}{2}(\qquad +8\xi-20\xi^2+18\xi^3-7\xi^4+\xi^5)(a-b)\sqrt{-1} \end{array}\right]\mathfrak{Z}=0.$$

Die ihnen Genüge leistenden particulären Integrale nennen wir bezüglich $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ und $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$; so wird sich der allgemeine Werth von y aufstellen lassen in einer der folgenden zwei Gestalten:

$$(194)\qquad y=e^{\int\left(\frac{\lambda}{\xi^2}+\frac{\mu}{\xi}\right)d\xi}\,\mathfrak{z}=e^{\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-1}\int\left(\frac{1}{\xi^2}-\frac{1}{\xi}\right)d\xi}\left[C_1\mathfrak{z}_1+C_2\mathfrak{z}_2\right]$$

$$(195)\qquad y=e^{-\int\left(\frac{\lambda}{\xi^2}+\frac{\mu}{\xi}\right)d\xi}\,\mathfrak{Z}=e^{-\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-1}\int\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\xi}\right)d\xi}\left[C_1\mathfrak{Z}_1+C_2\mathfrak{Z}_2\right],$$

wo aber keine der vier Functionen $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$ zur ersten Klasse herabgebracht ist, weil ihnen nach allem ein exponentieller Factor, wie:

$$e^{\int\left(\frac{\lambda'}{(\mathfrak{r}-1)^2}+\frac{\mu'}{\mathfrak{r}-1}\right)d\mathfrak{r}}=e^{\int\left(\frac{\lambda'}{(\xi-2)^2}+\frac{\mu'}{\xi-2}\right)d\xi}$$

anhängt, auf dessen Vorhandensein auch die Coefficienten der beiden transformirten Gleichungen (192) und (193) hindeuten, in denen sich Factoren $\xi-2$ und zwar 4, 3, 0 an der Zahl nachweisen lassen. Wir verfahren also ähnlich mit ihnen, wie mit der vorgelegten (190), d. h. wir beginnen mit der Substitution:

$$\xi-2=\eta\,,\qquad \xi=\eta+2\,,$$

die lediglich den Zweck hat, die Coefficienten nach aufsteigenden Potenzen von η zu ordnen. Es ist nicht nothwendig, diess in beiden transformirten (192) und (193) zu thun; es genügt vielmehr, diess nur bei der ersten von ihnen durchzuführen, da sich die andere von ihr im Zeichen von $\sqrt{-1}$ unterscheidet, und die Voraussetzung festzuhalten, dass $\sqrt{-1}$ doppelwerthig sei und einmal in seiner positiven, das andere Mal in seiner negativen Bedeutung genommen werden soll. Das doppelte Substitutionsresultat ist dann in der einzigen Formel enthalten:

$$(4+8\eta+5\eta^2+\eta^3)\,\eta^4\cdot\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\eta^2}+$$

$$+\left[8+12\eta+8\eta^2+2\eta^3+(a-b)\sqrt{-1}\,(-\eta-2\eta^2-\eta^3)\right]\eta^3\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{d\eta}$$

$$(196)\qquad +\left[\begin{array}{l} \frac{1}{4}(a-b)^2\,(4+16\eta-23\eta^2+13\eta^3+\eta^4-\eta^5)+ \\ +\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-1}\,(-2\eta^3-3\eta^4-\eta^5) \end{array}\right]\mathfrak{z}=0.$$

Hier ist nur noch übrig, die Befreiung von dem in z annoch vorhandenen Factor zu bewerkstelligen vermittelst der Substitution:

$$z = e^{\int\left(\frac{\lambda}{\eta^2}+\frac{\mu}{\eta}\right)d\eta}\, u. \tag{197}$$

Die Gleichungen, zu welchen sie führt, sind abermals in denen des §. 3 enthalten, und man hat namentlich:

$$\alpha = 0, \qquad m = 2, \qquad x = \eta$$

$$\mathfrak{X}_2 = 4 + 8\eta + 5\eta^2 + \eta^3$$

$$\mathfrak{X}_1 = 8\eta + 12\eta^2 + 2\eta^3 + (a-b)\sqrt{-1}\,(-\eta^2 - 2\eta^3 - \eta^4)$$

$$\mathfrak{X}_0 = \frac{1}{4}(a-b)^2(4 + 16\eta - 23\eta^2 + 13\eta^3 + \eta^4 - \eta^5) +$$

$$+ \frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-1}\,(-2\eta^3 - 3\eta^4 - \eta^5)$$

$$\underset{\lambda}{A} = 4\lambda^2 + (a-b)^2 = 0, \qquad \underset{\lambda}{B} = 8\lambda^2 + 8\lambda + 4(a-b)^2$$

$$\underset{\mu}{B} - ma_2\lambda = 8\lambda^2 + 4(a-b)^2 + 8\lambda\mu = 0,$$

und hieraus für λ und μ abermals die Doppelwerthe:

$$\lambda = \pm\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-1}, \qquad \mu = \pm\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-1}. \tag{198}$$

Fasst man nun speciell die (192) ins Auge, deren Integrale z_1 und z_2 sind, und lässt zu gleicher Zeit in den vorliegenden (198) die oberen Zeichen gelten; so gewinnt man die Transformirte:

$$(4+8\eta+5\eta^2+\eta^3)\eta^2 . \frac{d^2u}{d\eta^2} + \left[8\eta+12\eta^2+8\eta^3+2\eta^4+(a-b)\sqrt{-1}\left[4+12\eta+12\eta^2+4\eta^3\right]\right] . \frac{du}{d\eta} = 0,$$

der, wie man sieht, eine willkührliche Constante $u = H_1$ Genüge leistet. Folglich entspricht der (192) ein particuläres Integral:

$$z_1 = H_1 . e^{\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-1}\int\left(\frac{1}{\eta^2}+\frac{1}{\eta}\right)d\eta} = H_1 . e^{\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-1}\int\frac{x}{(x-1)^2}dx},$$

und hieraus geht wieder ein particulärer Werth von y hervor, gezogen aus der (194) für $C_2 = 0$:

$$y_1 = H_1 e^{2(a-b)\sqrt{-1}\int\frac{x^2}{(x^2-1)^2}dx}.$$

Geht man hingegen von der anderen Differentialgleichung (193) zwischen ξ und $\mathfrak{z}$ aus, und lässt zu gleicher Zeit in den Werthen (198) die unteren Zeichen gelten, so gelangt man zu der Transformirten zwischen η und u:

$$(4+8\eta+5\eta^2+\eta^3)\eta^2 \cdot \frac{d^2u}{d\eta^2} + \left[8\eta+12\eta^2+8\eta^3+2\eta^4-(a-b)\sqrt{-1}\left[4+12\eta+12\eta^2+4\eta^3\right]\right] \cdot \frac{du}{d\eta} = 0,$$

der abermals eine Constante $u = H_2$ als Genüge leistender Werth angehört, aus welcher man durch Zuziehung der (197) und (195) particuläre Werthe für $\mathfrak{z}_2$ und y gewinnt, nämlich:

$$\mathfrak{z}_2 = H_2 \, e^{-\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-1}\int\left(\frac{1}{\eta^2}+\frac{1}{\eta}\right)d\eta} = H_2 \, e^{-\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-1}\int\frac{\mathfrak{r}}{(\mathfrak{r}-1)^2}d\mathfrak{r}}$$

$$y_2 = H_2 \, e^{-2(a-b)\sqrt{-1}\int\frac{\mathfrak{r}}{(\mathfrak{r}^2-1)^2}d\mathfrak{r}}.$$

Die beiden particulären Werthe y_1 und y_2 biethen endlich aggregirt einen allgemeinen Ausdruck für y, nämlich:

$$y = H_1 \, e^{2(a-b)\sqrt{-1}\int\frac{\mathfrak{r}^2}{(\mathfrak{r}^2-1)^2}d\mathfrak{r}} + H_2 \, e^{-2(a-b)\sqrt{-1}\int\frac{\mathfrak{r}^2}{(\mathfrak{r}^2-1)^2}d\mathfrak{r}},$$

von welchem man durch Restitution der alten Variablen x anstatt der $\mathfrak{r}$ vermittelst der (189) zum allgemeinen Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung (188) übergehen kann, das sonach in der Form:

$$y = C_1 \, e^{\int dx\sqrt{-\frac{x+a}{x+b}}} + C_2 \, e^{-\int dx\sqrt{-\frac{x+a}{x+b}}}$$

erscheinen wird.

Anwendbar ist endlich die Einführung einer neuen Veränderlichen bei Differentialgleichungen mit gebrochenen Repartitionszahlen und vorzüglich wenn dieselben zwischen 0 und — 1 liegen. Bekanntlich gibt da weder die Form des Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, noch die eines bestimmten Integrales annehmbare, zum ferneren Rechnen taugliche Ausdrücke, und will man die gesuchten particulären Integrale nach §. 2 zur ersten Functionsclasse herabbringen, so gelingt diess wohl immer, aber die transformirte Gleichung, die zur Berechnung jener Functionen erster Classe dienen sollte, ist irrational, wodurch die Berechnung zwar nicht unmöglich gemacht, jedenfalls aber sehr erschwert wird. Es ist also bei einem solchen Vorkommen zweckmässig, eine Änderung der independenten Variablen in einer Weise eintreten zu lassen, dass sich hiedurch die gebrochenen Repartitionszahlen in ganze verwandeln. Nun stelle man sich eine Differentialgleichung vor, die an einer der Seiten des bekannten normalen Polygones einen Abfall von r Einheiten auf s Coefficientenpaare biethet, so dass $s > r$ ist. Es fällt dann auf das Paar die Repartitionszahl $-\frac{r}{s}$, und die particulären Integralen s an der Zahl zukommende Form ist nun im Allgemeinen, und, wenn in der Rechnung keine Einwendung dagegen liegt:

$$y = e^{\int\left(\lambda x^{-\frac{r}{s}} + \mu x^{-\frac{r+1}{s}} + \cdots + \tau x^{-\frac{s-1}{s}}\right)dx} \, \mathfrak{z}, \tag{199}$$

und wechselt man hier die unabhängige Veränderliche vermittelst der Substitution:

$$x = \mathfrak{r}^s; \tag{200}$$

so wird daraus eine Form, wie:

$$y = e^{\int(\lambda x^{s-r-1} + \mu x^{s-r-2} + \ldots\ldots + \tau)dx}\, \mathfrak{z},$$

mit einer Function von positiver Gradzahl $s - r - 1$ im Exponenten der Exponentielle, die somit, als particuläres Integral gedacht, eine Ansteigung von $s - r - 1$ Einheiten in dem zugehörigen Coefficientenpaare der Differentialgleichung zur Folge haben wird, und einem Factor $\mathfrak{z}$, der, weil er aus $\mathfrak{x}$, also einer Function erster Klasse, durch eine algebraische Substitution hervorgeht, ebenfalls eine Function erster Klasse darstellt. Hieraus folgt, dass die durchgeführte Substitution (200) die Abfälle von $\frac{r}{s}$ Einheiten jedesmal in Steigungen verwandeln wird von $s - r - 1$ Einheiten auf das Paar, die sich, weil auf s Paare ausgedehnt, zu einer Gesammtsteigung von $s(s - r - 1)$ Einheiten aggregiren werden. Nur in dem einzigen Falle, wo $s = r + 1$ ist, geht diese Ansteigung in ein Niveau über. Diess gilt im Allgemeinen. In speciellen Fällen, wo von den Coefficienten λ, μ, ... τ in regelmässiger Reihenfolge einige verschwinden, oder, wo $\frac{r}{s}$ ein einer Abkürzung fähiger Bruch ist, werden sich andere Substitutionsweisen ergeben, die die gebrochenen Abfälle verwandeln in Ansteigungen von minderem Zahlenwerthe und die man, der geschmeidigeren Rechnungsformen wegen, zu denen sie führen, jedesmal vorziehen wird. Überhaupt biethen sich hier zur Erreichung des einen Zweckes, Verwandlung nämlich der gebrochenen Repartitionszahlen in ganze, unzählige Substitutionsarten, denn es ist zuvörderst klar, dass, wenn $x = \mathfrak{r}^s$ eine rationalmachende solche ist, auch $x = \mathfrak{r}^{2s}$, $x = \mathfrak{r}^{3s}$, ... dasselbe leisten werde, ja noch mehr, wenn $x = \mathfrak{r}^s$ es thut, so wird man auch:

$$x\,(A\mathfrak{r}^r + B\mathfrak{r}^{r-1} + \ldots\ldots + R) = A_1\mathfrak{r}^{r+s} + B_1\mathfrak{r}^{r+s-1} + \ldots\ldots + S \tag{201}$$

schreiben können und hiemit denselben Zweck erreichen, denn die vorliegende Differentialgleichung wird mit rationalen Coefficienten vorausgesetzt, die Substitutionsfunction, die wir mit φ bezeichnet haben, gehört nach x dem ersten Grade an, es sind also alle Bedingungen erfüllt, unter welchen die durch Transformation erzielte Form abermals eine rationale ist; zudem wird x durch eine Function von $\mathfrak{r}$ vom Grade s ersetzt, wodurch die gebrochenen Ansteigungen nothwendig in ganze verwandelt werden. Man könnte nun allenfalls vermittelst einer solchen Substitution, wie die (201), auch eine gewisse Anzahl von bestimmten oder annoch unbestimmt gelassenen Parametern einführen, um sie in der Folge zu irgend einem Zwecke zu verwenden, diess wäre indess eine wahre Massregel der Verzweiflung, anzuwenden in Fällen, wo man sich keinen Rath mehr weiss, wenn man über den damit zu erreichenden Zweck sich im vorhinein nicht klar geworden ist. Der rationelle Rechner wird sich jedesmal sagen: Wenn ein und dasselbe Ziel durch mehrere verschiedene Substitutionen erreicht werden kann, so ist von ihnen entweder die bequemste oder diejenige den anderen vorzuziehen, die mehrere Zwecke auf einmal erreicht, z. B. alle Irrationalgrössen aus den particulären Integralen wegschafft, während sie zugleich die gebrochenen Repartitionszahlen in ganze verwandelt. Über die Bequemlichkeit einer Substitution lässt sich nur von Fall zu Fall urtheilen. Sollen aber, wie zuletzt erwähnt, alle Irrationalgrössen, wo möglich, zugleich herausgeschafft werden; so muss man dieselben durch eine vorgängige Untersuchung der Factoren des ersten Coefficienten und der ihnen entsprechenden k, ferner

des Factorenbaues überhaupt, des denselben umspannenden Polygones und der sich daraus ergebenden Repartitionszahlen zu ermitteln suchen. Ob sich dann eine Substitution zu ihrer Wegschaffung auffinden lässt und welche, muss aus dieser Untersuchung hervorgehen. Berühren wir einige Fälle:

Eine beliebige Differentialgleichung ist gegeben, darin vorkommende Repartitionszahlen sind halbe. Die Untersuchung des ersten Coefficienten hat einen Factor $x-\alpha$ dargelegt, dem ein k entspricht, aus der Reihe negativer Brüche $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$. Man schliesst sonach auf die Irrationalgrösse $\sqrt{(x-\alpha)}$, die auch vermuthlich die gebrochenen Repartitionszahlen veranlasst. Man wird hier nicht zur Substitution $x=\mathfrak{r}^2$ greifen, weil sie zwar die gebrochenen Repartitionszahlen in ganze umzustellen geeignet wäre, zur Wegschaffung der oberwähnten Irrationalgrösse jedoch nicht dienlich sein könnte, vielmehr voraussichtlich zu zwei neuen Factoren des ersten Coefficienten, nämlich $\mathfrak{r}-\sqrt{\alpha}$ und $\mathfrak{r}+\sqrt{\alpha}$ Veranlassung geben würde, denen gebrochene k mit dem Nenner 2 angehören, andeutend die im Integrale offenbar noch vorfindige $\sqrt{\mathfrak{r}^2-\alpha}$. Die unter den vorausgesetzten Umständen zweckmässige Substitution wird hingegen die folgende sein:

$$x = \alpha + \mathfrak{r}^2.$$

Hat man im ersten Differentialgleichungscoefficienten zwei Factoren $x-\alpha$ und $x-\beta$, denen gebrochene und negative k angehören, deutend auf die Irrationalgrössen $\sqrt{x-\alpha}$ und $\sqrt{x-\beta}$ im allgemeinen Integrale, so kann man fragen, ob diese letzteren beisammen als Factoren eines und desselben Produktes stehen, oder getrennt. Ersteres, d. h. das Vorkommen von $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}$ oder $\sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ wird sich auch in einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung bereits finden können, jedoch können diese beiden Formen zu gebrochenen Ansteigungen oder Abfällen keine Veranlassung geben, weil sie bezüglich die ganzen Gradzahlen 1 und 0 darbiethen. Letzteres hingegen kann stattfinden bei einer die Ordnungszahl 2 übersteigenden Differentialgleichung und verträgt sich auch sehr gut mit gebrochenen Repartitionszahlen. Hiernach hätte man nun die Art der Einführung einer neuen Veränderlichen zu bestimmen, und man wird z. B. bei einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit ganzen Ansteigungszahlen, falls man aus den Werthen von k auf das Vorkommen von $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}$ geschlossen hätte, die Substitutionsgleichung (183) erkiesen, welche in Folge des Umstandes, dass x kraft derselben eine Function von $\mathfrak{r}$ ist, die dem Grade Null angehört, eine Reduction der particulären Integrale zur ersten Klasse in Bezug auf die Gradzahlen der Coefficienten zur Folge haben wird. Anders verhält es sich in Bezug auf den Factorenbau und namentlich wird der Factor $\mathfrak{r}^2-1$ in höheren Potenzen dem ersten und zweiten Gleichungscoefficienten zugeschlagen, was nachträglich zur Transformation nöthigen wird, die der §. 3 lehrt. Hätte man hingegen bei einer höheren, etwa der vierten Ordnung angehörigen Differentialgleichung dieselben Factoren $x-\alpha$ und $x-\beta$ mit zugehörigen gebrochenen $k=-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ und zugleich gebrochene Repartitionszahlen derselben Art, so könnten diese sehr gut dem gesonderten Vorkommen der Wurzelgrössen $\sqrt{x-\alpha}$ und $\sqrt{x-\beta}$ entsprechen und es wäre die Substitutionsgleichung (184) vorzuziehen, die nun die doppelte Wirkung des Herausschaffens der genannten Irrationalgrössen und der Verwandlung der gebrochenen Ansteigungszahlen in

ganze haben wird. Es ist nicht schwer die Substitutionsweise zu errathen, die in jedem speciellen Falle zum Ziele zu führen vermag und ihre Wirkung im Voraus zu beurtheilen; eigentliche Sicherheit aber hat man hier nicht und muss sich, falls man durch Einführung einer neuen Veränderlichen mehr als den einen Zweck ganzer Repartitionszahlen auf einmal erreichen will, mit der Wahrscheinlichkeit des Erfolges begnügen.

Die erhaltene transformirte Gleichung zwischen y und $\mathfrak{r}$ biethet in den meisten Fällen höhere Gradzahlen der Coefficienten, erscheint daher complicirter als die Gegebene. Diess soll jedoch den Rechner weder befremden noch abschrecken, da sich grösstentheils der Ursprung der neu hinzugekommenen Factoren des ersten und der folgenden Coefficienten ganz ohne Mühe nachweisen lässt. Wenn z. B. allgemein bei einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung durch die sehr einfache Substitution $x = \mathfrak{r}^2$ in die Anfangscoefficienten, auch wenn diese den Factor x gar nicht enthielten, der Reihe nach Factoren $\mathfrak{r}$ fallen $n-1$, $n-2$, ... 2, 1, 0, 0 an der Zahl; so kann solches durchaus nicht Wunder nehmen und liesse sich zufolge der Betrachtungen, die wir im §. 1 anstellten, im Voraus verkünden. In der That, da sich jedesmal die particulären Integrale, wie wir alldort gesehen haben, so gruppiren lassen, dass daraus Genüge leistende Werthe hervorgehen, die bezüglich der 0ten, 1sten, 2ten ..... $n-1^{sten}$ Potenz von x proportional sind, auch wenn der erste Coefficient gar keinen Factor x enthält, so werden diese Werthe offenbar durch die Substitution $x = \mathfrak{r}^2$ in andere, bezüglich der 0ten, 2ten, 4ten ..... $(2n-2)^{ten}$ Potenz von $\mathfrak{r}$ proportionale verwandelt. Diese vermag die Gleichung $k(k+1)\,(k+2)$ ..... $(k+n-1) = 0$ nicht zu geben, die Analysis sieht sich also genöthigt, um ihre Angabe zu ermöglichen, die oberwähnten Zahlen der Factoren $\mathfrak{r}$ in die Coefficienten zu werfen, und rechnet man die ihnen zugehörigen Werthe von k, so erhält man, wie es sein muss, $k = -2$, -4, ..., $-2n+2$. Biethen sich also nach durchgeführter Transformation ähnliche neue Factoren und ihnen entsprechende k dar, so weiss man auch, woher sie kommen, und welche Bedeutung man ihnen beizulegen hat.

Wir wollen noch einige sehr einfache Beispiele der Transformation solcher Gleichungen anführen, bei welchen die gebrochenen Repartitionszahlen in ganze zu verwandeln sind. Das erste sei:

$$(x - a) \,.\, y'' + b^2 y = 0.$$

Der eine Einheit betragende Abfall vom ersten auf den letzten Coefficienten beweist zur Genüge die irrationale Beschaffenheit des particulären Integrales, wenn auch der dem Factor $x - a$ des ersten Coefficienten entsprechende Werth von $k = -1$ darauf nicht nothwendig hindeutet. In den Ausnahmszustand kann das Integral höchstens gerathen für $x = a$, da sich kein anderer Factor des ersten Coefficienten vorfindet. Man wird daher am sichersten gehen, wenn man die Einführung einer neuen Veränderlichen auf dem Wege der Substitution:

$$\varphi = x - a - \mathfrak{r}^2 = 0$$

veranstaltet. Hieraus folgt:

$$\varphi' = 1, \qquad \varphi_{,} = -2\mathfrak{r}, \qquad \varphi'_{,} = 0, \qquad \varphi_{,,} = -2,$$

und die erste der Gleichungen (187), in der man, dem gegenwärtigen Falle entsprechend,

$$X_2 = x - a, \qquad X_1 = 0, \qquad X_0 = b^2$$

setzen wird, geht nach gehöriger Herausschaffung von x über in:

$$\mathfrak{r} \,.\, \frac{d^2y}{d\mathfrak{r}^2} - \frac{dy}{d\mathfrak{r}} + 4b^2\mathfrak{r} \,.\, y = 0,$$

eine uns sehr wohl bekannte Form, enthalten als specieller Fall in der (161) S. 79 des 1. Bandes, die wir alldort der Integration unterworfen haben.

Als zweites Beispiel diene die folgende einfache Gleichung der vierten Ordnung:

$$x \,.\, y^{IV} \pm b^4 y = 0. \tag{202}$$

Sie ist in der (95), die wir S. 57 des 1. Bandes besprochen haben, als specieller Fall enthalten und gehört sammt der vorigen zur Klasse derjenigen, die der Integration durch bestimmte Integrale und Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl sich am wenigsten fügen wollen. Die Einführung einer neuen Veränderlichen dient also auch hier als Mittel, um fügsamere Formen zu erhalten. Die im Allgemeinen angezeigte Substitution wäre wohl $x = \mathfrak{r}^4$, entsprechend dem Abfalle von einer Einheit auf vier Coefficientenpaare; da man indessen wahrnimmt, dass die Substitution:

$$y = e^{\int \frac{\lambda dx}{\sqrt[4]{x}}} \mathfrak{z} = e^{\frac{4}{3}\lambda x^{\frac{3}{4}}} \,.\, \mathfrak{z}$$

bereits die Herabsetzung zur ersten Klasse eines der particulären Integrale zur Folge hat, und diess zwar auf vier verschiedene Arten, nämlich für alle vier Werthe von λ, die aus der algebraischen Gleichung $\lambda^4 \pm b^4 = 0$ als Wurzeln hervorgehen, so dass also das allgemeine Integral der Form nach ist:

$$y = C_1\, e^{\frac{4}{3}\lambda_1 x^{\frac{3}{4}}}\, \mathfrak{z}_1 + C_2\, e^{\frac{4}{3}\lambda_2 x^{\frac{3}{4}}}\, \mathfrak{z}_2 + C_3\, e^{\frac{4}{3}\lambda_3 x^{\frac{3}{4}}}\, \mathfrak{z}_3 + C_4\, e^{\frac{4}{3}\lambda_4 x^{\frac{3}{4}}}\, \mathfrak{z}_4,$$

unter λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 eben diese vier Wurzeln verstanden, während $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$, $\mathfrak{z}_4$ bereits Functionen erster Klasse sind; so sieht man, dass auch die folgende andere Substitution die gewünschte Wirkung habe, nämlich:

$$x^{\frac{3}{4}} = \mathfrak{r} \qquad \text{oder} \qquad x = \mathfrak{r}^{\frac{4}{3}}.$$

Der Vortheil, den sie vor der früheren hat, besteht darin, dass die erhaltene transformirte Gleichung minder hohe Coefficienten besitzt, die noch überdiess ihrer Gradzahl nach im Niveau stehen, während die frühere Substitution zu Ansteigungen um zwei Einheiten auf das Coefficientenpaar geführt hätte. Wir erkiesen also die:

$$\varphi = x - \mathfrak{r}^{\frac{4}{3}} = 0, \tag{203}$$

bekommen sonach:

$$\varphi' = 1, \quad \varphi_, = -\frac{4}{3}\mathfrak{r}^{\frac{1}{3}}, \quad \varphi_,' = 0, \quad \varphi_{,,} = -\frac{4}{9}\mathfrak{r}^{-\frac{2}{3}}, \quad \varphi_{,,,} = \frac{8}{27}\mathfrak{r}^{-\frac{5}{3}}, \quad \varphi_{IV} = -\frac{40}{81}\mathfrak{r}^{-\frac{8}{3}},$$

und nun aus der dritten der Gleichungen (187), mit Hilfe dieser Werthe, und der dem vorliegenden Falle entsprechenden:

$$X_4 = x, \qquad X_3 = X_2 = X_1 = 0, \qquad X_0 = \pm\, b^4,$$

nach herausgeschafftem x die folgende Transformirte zwischen y und r:

$$81 r^3 \frac{d^4y}{dr^4} - 162 r^2 \frac{d^3y}{dr^3} + 207 r \frac{d^2y}{dr^2} - 135 \frac{dy}{dr} \pm 256\, b^4 r^3 .\, y = 0.$$

Wir nehmen in ihr die Factoren r^3, r^2, r, 1, r^3 der aufeinanderfolgenden Coefficienten wahr, und sind veranlasst, die ihnen entsprechenden k aufzusuchen, um zu entscheiden, ob sie der ursprünglichen Beschaffenheit der particulären Integrale oder der gemachten Substitution angehören. Die Gleichung des dritten Grades in k ist:

$$81\,(k+3)\,(k+2)\,(k+1) + 162\,(k+2)\,(k+1) + 207\,(k+1) + 135 = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$9k^3 + 72k^2 + 176k + 128 = 0.$$

Sie biethet die Wurzeln: $-\frac{4}{3}$, $-\frac{8}{3}$, $-\frac{12}{3}$, die wie wir wissen die Repräsentanten sind einer in drei verschiedenen particulären Integralen vorkommenden dritten Wurzel aus r, welche letztere augenscheinlich in der ursprünglichen (202) nicht enthalten, sondern lediglich durch die Substitution (203) eingeführt worden ist. Zur klareren Anschauung biethet sich hier die Bemerkung, dass der (202), wie leicht nachgewiesen werden kann, drei particuläre Integrale entsprechen in Form von unendlichen convergirenden Reihen, geordnet nach aufsteigenden Potenzen von x, deren erstes mit einem dem x, das zweite mit einem dem x^2 und das dritte mit einem dem x^3 proportionalen Gliede anfängt, und welche Anfangsglieder kraft der durchgeführten Substitution (203) in $r^{-\frac{4}{3}}$, $r^{-\frac{8}{3}}$, $r^{-\frac{12}{3}}$, verwandelt werden, so dass man annehmen kann, diese drei Reihen seien eben die durch die vorliegenden Werthe von k angedeuteten particulären Integrale. Der wirklichen Integration wirft diese fremde, lediglich dem Substitutionsverfahren anheim fallende Irrationalgrösse kein Hinderniss im Wege.

Wir schliessen hiemit den Kreis der zur Erläuterung der hier besprochenen Transformationsweise angeführten Beispiele und wenn wir auch keinen anderen Nutzen derselben zur Sprache gebracht haben, als entweder den des Rationalmachens einer Differentialgleichung mit irrationalen Coefficienten, oder den des Rationalmachens der particulären Integrale in einer rationalen Gleichung, oder endlich den der Verwandlung gebrochener Repartitionszahlen in ganze; so weiss doch jeder geübte Analyst aus Erfahrung, dass die Einführung einer neuen Veränderlichen auch noch andere gar mannigfaltige Zwecke erreichen helfe. Wenn ferner das Rationalmachen der Gleichung, oder der particulären Integrale nur in gewissen speciellen, nicht sehr zahlreichen Fällen durch die Hilfe dieser Transformationsweise gelingt, so thut diess dem Werthe derselben noch keinen Eintrag, wenn nur nachgewiesen werden kann, dass diese Fälle eben die einfachsten, am häufigsten vorkommenden sind, dass überdiess hiebei die Veränderung der unabhängigen Variablen als das kürzeste zum Ziele führende Mittel dastehe

und dass endlich der Erfolg, oder die Erfolglosigkeit desselben ohne besondere Mühe, schon im vorhinein erkannt zu werden vermöge, misslungene Schritte und getäuschte Erwartungen daher nicht zu befürchten stehen. Diess alles ist in der That der Fall.

Stossen wir aber auf eine Differentialgleichung entweder mit irrationalen Coefficienten, oder auch nur mit irrationalen particulären Integralen, auf die sich die Wirksamkeit der eben auseinandergesetzten Transformationsweise nicht erstreckt; so folgt daraus noch nicht, dass sie als unseren Methoden absolut widerstrebend, oder auch nur keine Integration in geschlossener Form zulassend zu betrachten und zur Seite zu schieben sei. Wir müssen vielmehr darauf bedacht sein, Mittel zu ersinnen, welche den Zweck des Rationalmachens entweder jedesmal zu erreichen, oder zu umgehen geeignet sind dergestalt, dass die unvermeidliche Aufstellung der Irrationalformen den letzten in den Hintergrund tretenden Moment der Rechnung bildet. Die Lücken, welche der gegenwärtige Paragraph gelassen, und die auszufüllen uns noch obliegt, entsprechen den folgenden zwei verschiedenen denkbaren Fällen, nämlich erstens demjenigen, wo eine Differentialgleichung mit irrationalen Coefficienten vorliegt und zwar mit Irrationalgrössen, die durch eine Vertauschung der unabhängigen Variablen nicht wegzuschaffen sind, und zweitens demjenigen, wo zwar die Coefficienten rational sind, ihre Beschaffenheit jedoch und namentlich die gebrochenen Repartitionszahlen in Verbindung mit den charakteristischen Werthen des mit k bezeichneten Exponenten auf die Anwesenheit eben solcher Irrationalgrössen in den particulären Integralen hindeuten.

Im ersten Falle einer irrationalen Gleichung dient die allgemeine Methode, die der folgende Paragraph bringen wird, und die, wenigstens theoretisch genommen, ihren Zweck nie verfehlt. Sie besteht darin, dass man zu der vorgelegten Gleichung, deren Ordnungszahl n heissen mag, noch alle diejenigen aufschreibt, die dieselbe Irrationalgrösse, jedoch in den verschiedenen ihr zukommenden analytischen Bedeutungen enthalten, z. B. Quadratwurzeln einmal mit dem Zeichen $+$, ein andermal mit dem Zeichen $-$, vierte Wurzeln mit dem Zeichen $+$, $-$, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, u. s. w., Bedeutungen so viele an der Zahl, als der Grad der rationalen algebraischen Gleichung, welche die in Rede stehende Irrationalgrösse in ihrer Vieldeutigkeit zu Wurzeln hat, Einheiten enthält, also r an der Zahl, wenn die besagte Algebraische vom r^{ten} Grade ist, dass man ferner diejenige Differentialgleichung bildet, versehen mit der Ordnungszahl nr, welche alle particulären Integrale der so aufgeschriebenen r Gleichungen als Genüge leistende Werthe in sich vereinigt, und eben, wie sie abzuleiten sei, zeigt der nächstfolgende Paragraph, zugleich die rationale Beschaffenheit ihrer Coefficienten nachweisend. Da nun aber mit dieser Rationalmachung zugleich eine Erhöhung der Ordnungszahl von n auf rn und zwar mit Hilfe mehr oder weniger weitläufiger Rechnungen verknüpft ist, so bleibt es an und für sich klar, dass dieses Mittel das letzte sei, zu welchem der Rechner erst dann seine Zuflucht nehmen wird, wenn ihn alle anderen verlassen.

Im zweiten Falle einer rationalen Gleichung mit particulären Integralen, die eine Irrationalgrösse complicirterer Art in sich enthalten, die sich als Wurzel einer algebraischen Gleichung des r^{ten} Grades erkennen oder vermuthen lässt, und wo wir auf r particuläre Integrale unter der Form

$e^{\int \varphi dx}$ den Schluss machen, deren verschiedene φ ebenfalls die Wurzeln einer rationalen algebraischen Gleichung des r^{ten} Grades sind, erkennt man das Bedürfniss einer Methode, welche diese Algebraische, unmittelbar aus der Differentialgleichung ableitet. Eine solche wird der folgende Abschnitt bringen, und wir können, mit diesen Hilfsmitteln ausgerüstet, jede, mit wie immer aussehenden, der ersten Functionsklasse angehörigen Coefficienten versehene Differentialgleichung als in den Bereich unserer Methode fallend ansehen.

S. 6.

Vereinigung mehrerer Differentialgleichungen in eine einzige und Zerlegung dieser Einen in mehrere.

Mehrere Differentialgleichungen in eine einzige vereinigen heisst hier: Eine Differentialgleichung bilden, welche die sämmtlichen particulären Integrale mehrerer gegebener solcher in sich vereinigt. Die zu bildende Gleichung muss der Natur der Sache nach eine höhere Ordnungszahl besitzen als die gegebenen, aus welchen sie abgeleitet wird, und namentlich gleicht in der Regel die Ordnungszahl der Ersteren der Summe aller Ordnungszahlen der Letzteren. Wir sagen: in der Regel, weil der Fall, wo mehrere gleiche particuläre Integrale in den verschiedenen gegebenen Gleichungen erscheinen, zu einer Herabsetzung der Ordnungszahl um eine oder mehrere Einheiten nöthigen kann, um die identisch der Nulle gleichen Coefficienten, die, wie wir wissen, eine Folge jener Gleichheit sind, zu vermeiden. Wir beginnen bei dem einfachsten der sich uns darbiethenden Fälle, bei dem nämlich, wo zwei bezüglich mit den Ordnungszahlen m und n versehene Differentialgleichungen gegeben sind, nämlich die:

$$(1, m)\, y^{(m)} + (1, m-1)\, y^{(m-1)} + \ldots\ldots\ldots + (1, 1)\, y' + (1, 0)\, y = P_1 = 0 \qquad (204)$$

$$(2, n)\, y^{(n)} + (2, n-1)\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + (2, 1)\, y' + (2, 0)\, y = P_2 = 0 \qquad (205)$$

wo sohin die gesuchte Gleichung, die sowol durch die m particulären Integrale der Ersteren, als auch durch die n vorhandenen der Letzteren identisch erfüllt wird, offenbar die Ordnungszahl $m+n$, und somit die Gestalt:

$$X_{m+n}\, y^{(m+n)} + X_{m+n-1}\, y^{(m+n-1)} + \ldots\ldots\ldots + X_1\, y' + X_0\, y = 0 \qquad (206)$$

tragen wird. Wir verstehen hier unter:

$$(1, m), \quad (1, m-1), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1, 1), \quad (1, 0)$$

die von x abhängigen, und gegebenen Coefficienten der ersten Gleichung, unter:

$$(2, n), \quad (2, n-1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2, 1), \quad (2, 0)$$

jene der zweiten, unter

$$X_{m+n}, \quad X_{m+n-1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad X_1, \quad X_0$$

aber die unbekannten Coefficienten der zu bildenden Differentialgleichung, um deren Werthe in x es sich eben handelt

Die particulären Integrale der (204), m an der Zahl, die wir mit $y_1, y_2, \ldots\ldots y_m$ bezeichnen können, müssen nun offenbar nicht nur der (204), sondern auch jeder anderen, die aus der (204) auf dem Wege des Differenzirens, wie des Combinirens durch Multiplication und Addition abgeleitet werden, und überdiess noch der gesuchten (206) Genüge leisten. Bilden wir daher aus der $P_1 = 0$ durch successives Differenziren die $P'_1 = 0$, $P''_1 = 0$, ... $P_1^{(n)} = 0$, die bezüglich den Ordnungen $m+1$, $m+2$, ... $m+n$ angehörig sind; so lassen sich aus ihnen und der (206), somit aus Gleichungen $n+2$ an der Zahl jedesmal die $n+1$ Differentialquotienten $y^{(m)}$, $y^{(m+1)}$, ... $y^{(m+n)}$ eliminiren, und es wird die erhaltene Eliminationsgleichung nur mehr die $y, y', \ldots y^{(m-1)}$ und zwar in linearer Form enthalten, also eine lineare Differentialgleichung der Ordnung $m-1$ darstellen, die aber doch nicht $m-1$ particuläre Integrale, sondern deren m an der Zahl, nämlich die sämmtlich von einander verschiedenen $y_1, y_2, \ldots y_m$ besitzen soll, was offenbar nur in dem einzigen Falle möglich ist, wenn alle ihre Coefficienten identisch der Nulle gleich werden. Diese sind aber aus den X_{m+n}, X_{m+n-1}, ... X_1, X_0 zusammengesetzt, und zwar abermals in linearer Form. Die Werthe dieser Letzteren müssen daher so beschaffen sein, dass die in Rede stehenden Coefficienten der Eliminationsgleichung, m an der Zahl, identisch verschwinden. Deuten wir diese Gleichung durch:

$$\mathfrak{X}_{m-1}\, y^{(m-1)} + \mathfrak{X}_{m-2}\, y^{(m-2)} + \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_1\, y' + \mathfrak{X}_0\, y = 0 \tag{207}$$

an, so muss die folgende Reihe von m identischen Gleichungen bestehen:

$$\mathfrak{X}_{m-1} = 0, \qquad \mathfrak{X}_{m-2} = 0, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \mathfrak{X}_1 = 0, \qquad \mathfrak{X}_0 = 0. \tag{208}$$

Sie sollen zur Bestimmung der X_0, X_1, X_2, ... X_{m+n} dienen, reichen aber hiezu der geringen Anzahl wegen nicht hin.

Man hätte aber auch eben so gut von der Gleichung $P_2 = 0$ ausgehen können, hätte aus ihr durch successives Differenziren die: $P'_2 = 0$, $P''_2 = 0$, ... $P_2^{(m)} = 0$ erhalten, denen bezüglich die Ordnungszahlen $m+1$, $m+2$, ... $m+n$ entsprechen, hätte ferner aus ihnen und der (206), die Differentialquotienten $y^{(m+n)}$, $y^{(m+n-1)}$, ... $y^{(n)}$ eliminirend, als Resultat eine Eliminationsgleichung von der Form:

$$\mathfrak{Y}_{n-1}\, y^{(n-1)} + \mathfrak{Y}_{n-2}\, y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{Y}_1\, y' + \mathfrak{Y}_0\, y = 0 \tag{209}$$

erhalten, der nun nothwendigerweise alle n particulären Integrale der $P_2 = 0$, die man mit y_{m+1}, y_{m+2}, ... y_{m+n} bezeichnen kann, Genüge leisten müssen, was offenbar nur dann möglich ist, wenn man identisch:

$$\mathfrak{Y}_{n-1} = 0, \qquad \mathfrak{Y}_{n-2} = 0, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \mathfrak{Y}_1 = 0, \qquad \mathfrak{Y}_0 = 0 \tag{210}$$

hat, und diese nach X_0, X_1, ... X_{m+n} linearen Gleichungen n an der Zahl in Verbindung mit den obigen (208) m an der Zahl, sind zur Bestimmung der $m+n+1$ Coefficienten der gesuchten (206), oder vielmehr der Relationen: $\frac{X_{m+n-1}}{X_{m+n}}, \ldots\ldots, \frac{X_1}{X_{m+n}}, \frac{X_0}{X_{m+n}}$ in der Regel hinreichend. Allfällige Ausnahmen, wie etwa Werthe der Unbekannten in der Form $\frac{0}{0}$ würden auf den Umstand hindeuten,

dass die beiden gegebenen Gleichungen (204) und (205) eines oder mehrere particuläre Integrale gemeinschaftlich besitzen, von welchen man sie dann zuvörderst zu befreien haben wird. Hiedurch biethet sich uns ganz natürlich die Frage: Wie entdeckt man die zweien Differentialgleichungen gemeinschaftlichen particulären Integrale zum Behufe der Befreiung von denselben? eine Frage, zu deren Beantwortung wir etwas später schreiten werden.

Der Leser, der vermuthlich von unserer praktischen Richtung des Forschens sich bereits etwas angeeignet haben wird, könnte sich hier leicht veranlasst finden zu fragen, ob und in welchen Fällen eine ähnliche Vereinigung mehrerer Differentialgleichungen in Eine von Nutzen sei. Wir wollen an diesem Orte nur darauf aufmerksam machen, dass sie ein Mittel an die Hand gebe, Differentialgleichungen mit irrationalen Coefficienten denjenigen Integrationsmethoden zu unterwerfen, die wir für rationale solche aufstellten. In der That stellen wir uns vor, es sei eine Differentialgleichung gegeben, in deren Coefficienten, allen oder einigen eine und dieselbe Quadratwurzel vorkommt, und die wir desshalb zu integriren ausser Stand sind. Sie heisse $P_1 = 0$. Schreiben wir zu ihr eine zweite hin, die sich von derselben nur in dem Zeichen dieser Quadratwurzel unterscheidet, sie heisse $P_2 = 0$; so ist jetzt die Gleichung, die der Ordnung $2m$ angehört, und die die particulären Integrale beider in sich vereinigt, durchaus mit rationalen Coefficienten versehen, denn es werden die Eliminationsgleichungen:

$$\mathfrak{X}_{m-1} = 0, \quad \mathfrak{X}_{m-2} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{X}_1 = 0, \quad \mathfrak{X}_0 = 0$$

$$\mathfrak{Y}_{m-1} = 0, \quad \mathfrak{Y}_{m-2} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{Y}_1 = 0, \quad \mathfrak{Y}_0 = 0,$$

jede unten von der unmittelbar ober ihr stehenden auch eben nur im Zeichen jener Quadratwurzel unterschieden sein, es werden also die Glieder mit der Quadratwurzel in jeder von ihnen je für sich Null geben müssen, und die Glieder ohne der Quadratwurzel wieder je für sich verschwinden, oder mit anderen Worten, man wird, die Eliminationsgleichungen paarweise durch Addition und Subtraction combinirend, ein anderes System von rationalen Gleichungen $2m$ an der Zahl erhalten, aus welchen dann offenbar nur rationale Werthe der Coefficienten X_0, X_1, ... X_{2m} hervorzugehen vermögen. Es ist nun freilich wahr, dass durch diese Art des Rationalmachens einer Differentialgleichung ihre Ordnungszahl auf das Doppelte erhöht, und die Integration entsprechend erschwert werde, dass man daher diesen Zweck lieber durch Änderung der unabhängigen Veränderlichen zu erreichen bemüht sein wird. Da jedoch diess nicht in allen Fällen angeht, so gebührt der hier zur Sprache gebrachten Art des Rationalmachens offenbar insoferne der Vorrang, als sie die Geltung einer allgemeinen Methode besitzt.

Genau auf dieselbe Weise nun, wie wir zwei gegebene Differentialgleichungen in eine einzige vereinigten, lässt sich auch die ähnliche Vereinigung bei mehreren bewerkstelligen, und diess zwar entweder auf Einmal oder auch allmälig, indem man damit anfängt zwei zu verbinden, und die übrigen der Reihe nach zuzusetzen. Zieht man es vor diese Verbindungsoperation auf Einmal durchzuführen, so geht sie folgenden Gang: Die gegebenen Differentialgleichungen, die etwa h an der Zahl sein mögen:

$$(211)\quad \begin{aligned} P_1 &= (1, m)\, y^{(m)} + (1, m-1)\, y^{(m-1)} + \dots\dots\dots\dots + (1, 1)\, y' + (1, 0)\, y = 0 \\ P_2 &= (2, n)\, y^{(n)} + (2, n-1)\, y^{(n-1)} + \dots\dots\dots\dots + (2, 1)\, y' + (2, 0)\, y = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_h &= (h, t)\, y^{(t)} + (h, t-1)\, y^{(t-1)} + \dots\dots\dots\dots + (h, 1)\, y' + (h, 0)\, y = 0, \end{aligned}$$

und die vereinigt offenbar zu einer neuen Gleichung vom Grade μ führen, wenn $\mu = m + n + \dots + t$ vorausgesetzt wird, etwa zur:

$$(212)\quad X_\mu\, y^{(\mu)} + X_{\mu-1}\, y^{(\mu-1)} + \dots\dots\dots\dots + X_1\, y' + X_0\, y = 0,$$

differenziren wir der Reihe nach bezüglich: $(\mu - m)$, $(\mu - n)$, ... $(\mu - t)$-mal, eliminiren sodann aus jeder derselben und ihren erhaltenen Differentialen, so wie der (212) die höchsten Differentialquotienten von y, gelangen auf diese Weise zu h Eliminationsgleichungen von der Form:

$$(213)\quad \begin{aligned} &[1, m-1]\, y^{(m-1)} + [1, m-2]\, y^{(m-2)} + \dots\dots\dots\dots + [1, 1]\, y' + [1, 0]\, y = 0 \\ &[2, n-1]\, y^{(n-1)} + [2, n-2]\, y^{(n-2)} + \dots\dots\dots\dots + [2, 1]\, y' + [2, 0]\, y = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &[h, t-1]\, y^{(t-1)} + [h, t-2]\, y^{(t-2)} + \dots\dots\dots\dots + [h, 1]\, y' + [h, 0]\, y = 0. \end{aligned}$$

Alle ihre Coefficienten, im Ganzen $m + n + \dots\dots + t = \mu$ an der Zahl, der Nulle gleichgesetzt, dienen nun zur Bestimmung von X_0, X_1, ... X_μ, oder vielmehr der Relationen:

$$\frac{X_0}{X_\mu}, \quad \frac{X_1}{X_\mu}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad \frac{X_{\mu-1}}{X_\mu},$$

allfällige Werthe von der Form $\frac{0}{0}$ aber deuten wieder auf mehreren der gegebenen Gleichungen gemeinschaftliche particuläre Integrale.

Von der hier in ihren Grundzügen kurz angedeuteten Vereinigungsmethode lässt sich nun wieder der Nutzen angeben, dass sie zur Wegschaffung von Irrationalgrössen dienlich sei. In der That stellen wir uns vor, es sei eine Differentialgleichung zu integriren, deren Coefficienten, alle oder nur einige dieselbe Irrationalgrösse I beherbergen. Man schreibe $I = \varphi$, schaffe durch Erhebungen zu Potenzen die Wurzelgrössen weg, so wird man zu einer höheren Gleichung in φ gelangen, etwa zu einer vom Grade h mit den Wurzeln φ_1, φ_2, ... φ_h, von welchen $\varphi_1 = I$ ist, während man die übrigen im Grunde nicht zu kennen braucht. Nun schreibe man zu der Gleichung $P_1 = 0$ noch diejenigen hin, die aus ihr hervorgehen, wenn man $\varphi_1 = I$ der nach in φ_2, φ_3, ... φ_h verwandelt, und die alle von der Ordnung m sind, und denke sie in eine einzige von der Ordnung hm vereinigt. Die in der Rechnung vorkommenden Eliminationsgleichungen, die jetzt, wie sie aus den (213) hervorgehen, sind:

. . . .

$$[h, m-1] = [h, m-2] = \ldots\ldots\ldots = [h, 1] = [h, 0] = 0$$

und werden eine gewisse Ähnlichkeit biethen, so zwar, dass alle zu einer und derselben verticalen Spalte gehörigen aus der obersten von ihnen dadurch hervorgehen, dass man φ_1 der Reihe nach in $\varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_h$ verwandelt. Eliminirt man nun aus diesen Gleichungen und sucht die Werthe von $X_0, X_1, \ldots X_{mh}$, so sind diess offenbar symmetrische Functionen der h Wurzeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_h$ einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten, sohin selbst rationale Functionen der unabhängigen Veränderlichen, was wir eben darzuthun beabsichtigten. Die so erhaltene rationale Gleichung wird sich nun den für solche bestehenden Integrationsmethoden unterwerfen lassen, und es wird offenbar nicht nöthig sein, alle ihre particulären Integrale zu berechnen; sondern nur diejenigen, die auch die gegebene Irrationale erfüllen. Es ist nicht schwer sie von den anderen zu unterscheiden, nachdem der bestehende Unterschied, der schon in den Assymptoten liegt, so zu sagen unmittelbar in die Augen fällt.

Wenn in den Coefficienten der vorgelegten Gleichung nicht eine und dieselbe, sondern mehrere verschiedene Irrationalgrössen vorkämen, die verschiedenen algebraischen Gleichungen als Wurzeln angehören, so würde man sie auf die hier auseinander gesetzte Weise entweder eine nach der andern, oder auch alle zugleich herausschaffen können, letzteres, indem man die Wurzeln dieser algebraischen Gleichungen unter einander auf alle möglichen Arten combinirt, und einer jeden Gruppe eine eigene Differentialgleichung entsprechen lässt, endlich alle die Differentialgleichungen in eine einzige vereinigt, deren Ordnungszahl dem Produkte gleichen wird aus der Ordnungszahl der vorgelegten Irrationalgleichung in die Gradzahlen sämmtlicher Algebraischen.

Schreiten wir jetzt zur Lösung der umgekehrten Aufgabe, die wir etwas allgemeiner auf folgende Art stellen wollen: Es sind zwei Differentialgleichungen gegeben, die eine (206) von der $(m+n)^{\text{ten}}$ Ordnung, die andere $P_1 = 0$ mit der Ordnungszahl m. Man weiss, dass gewisse particuläre Integrale, alle oder einige der letzteren auch die erstere erfüllen, und frägt jetzt: wie viel und welche sind die beiden gemeinschaftlichen Genüge leistenden Werthe, wie lassen sich die beiden Gleichungen von ihnen befreien und wie werden die anderen particulären Integrale aufgefunden? Wir werden bei der Auseinandersetzung der Integrationsmethoden sehen, dass eine solche Frage in der Rechnungspraxis vorkommen könne und das zwar oft genug. Da alle oder einige der particulären Integrale $y_1, y_2 \ldots y_m$ der $P_1 = 0$ auch der (206) Genüge leisten sollen; so werden eben diese gemeinschaftlichen offenbar nicht nur die $P_1 = P'_1 = \ldots\ldots = P_1^{(n)} = 0$, sondern auch die (206) identisch erfüllen, ja noch überdiess allen aus ihnen durch Multiplication und Addition erhaltenen genügen. Man wird sich nun die ersteren mit solchen x enthaltenden Factoren $\Xi_0, \Xi_1, \ldots\ldots \Xi_n$ multiplizirt und von der (206) subtrahirt denken können, dass die höchsten Differentialquotienten von y, nämlich $y^{(m+n)}, y^{(m+n-1)} \ldots y^{(m)}$ aus der Differenz herausfallen, und da man durch diese Elimination zu der kurz vorher aufgestellten Gleichung (207) gelangt, so hat man offenbar:

$$(215)\quad \begin{aligned} &X_{m+n}\, y^{(m+n)} + X_{m+n-1}\, y^{(m+n-1)} + \dots\dots\dots + X_1\, y' + X_0\, y \\ &- \Xi_n P_1^{(n)} - \dots\dots - \Xi_1 P_1' - \Xi_0 P_1 = \mathfrak{X}_{m-1} y^{(m-1)} + \mathfrak{X}_{m-2} y^{(m-2)} + \dots\dots + \mathfrak{X}_1 y' + \mathfrak{X}_0 y. \end{aligned}$$

Für den Fall, wo sämmtliche particuläre Integrale $y_1 \dots\dots y_m$ der $P_1 = 0$ auch die (206) erfüllen, und folglich auch den zweiten Theil der eben hingestellten Gleichung auf Null reduziren müssen, was, wie wir gesehen haben, nur dann angeht, wenn man identisch $\mathfrak{X}_{m-1} = \dots\dots = \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_0 = 0$ hat, erhalten wir:

$$(216)\quad X_{m+n} y^{(m+n)} + X_{m+n-1} y^{(m+n-1)} + \dots\dots + X_1 y' + X_0 y = \Xi_n P_1^{(n)} + \dots\dots + \Xi_1 P_1' + \Xi_0 P_1,$$

was sich auch so schreiben lässt:

$$X_{m+n}\, y^{(m+n)} + X_{m+n-1}\, y^{(m+n-1)} + \dots\dots\dots + X_1 y' + X_0 y =$$

$$\left[\Xi_n \frac{d^n}{dx^n} + \Xi_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots\dots\dots + \Xi_1 \frac{d}{dx} + \Xi_0\right] P_1.$$

So oft daher eine der Ordnungszahl nach höher gebaute Differentialgleichung, die (206), durch alle particulären Integrale einer niederen, der $P_1 = 0$, erfüllt wird, lässt sich das Gleichungspolynom der ersteren symbolisch zerlegen in zwei Factoren, von denen der eine P_1 ist. Sollte es mehrere niedriger gebaute Differentialgleichungen geben, die ihre Integrale mit der höheren gemeinschaftlich besitzen, so würde auch diese symbolische Zerlegung in zwei Factoren auf mehrere verschiedene Arten möglich sein. Sie erleichtert wesentlich die Integration der (206), weil man sich diese zuvörderst in der Gestalt:

$$\Xi_n\, P_1^{(n)} + \Xi_{n-1}\, P_1^{(n-1)} + \dots\dots\dots + \Xi_1\, P_1' + \Xi_0\, P_1 = 0$$

hinstellen, sodann integriren, und einen Werth wie:

$$P_1 = C_1\, \mathfrak{P}_1 + C_2\, \mathfrak{P}_2 + \dots\dots\dots + C_n\, \mathfrak{P}_n$$

als allgemeines Integral erhalten wird, und nun ersetzt man das Gleichungspolynom P_1 durch seinen Werth aus der (204), und erhält:

$$(1,m)\, y^{(m)} + (1, m-1)\, y^{(m-1)} + \dots\dots + (1,1)\, y' + (1,0)\, y = C_1 \mathfrak{P}_1 + C_2 \mathfrak{P}_2 + \dots\dots + C_n \mathfrak{P}_n,$$

eine Gleichung, die, wiewohl der niederern m^{ten} Ordnung angehörig, doch mit der höheren, die $(m+n)^{\text{ten}}$ Ordnungszahl biethenden (206) in Folge der darin erscheinenden willkührlichen Constanten $C_1, C_2, \dots\dots C_n$ dasselbe allgemeine Integral besitzt.

Wären nicht alle particulären Integrale der $P_1 = 0$ in der (206) enthalten, sondern nur einige, vielleicht in unbekannter Anzahl; so könnten sie offenbar die Gleichungen (207) erfüllen, ohne die mit $\mathfrak{X}$ bezeichneten Coefficienten derselben zum identischen Verschwinden zu nöthigen, denn da sie zur $m - 1^{\text{sten}}$ Ordnung gehört, so liegt auch ihrem Identischwerden für weniger als m von einander verschiedene Werthe kein Hinderniss im Wege und wir können nur sagen, dass die folgenden zwei Gleichungen:

$$(1, m)\, y^{(m)} + (1, m-1)\, y^{(m-1)} + \ldots\ldots\ldots + (1, 1)\, y' + (1, 0)\, y = P_1 = 0$$

$$\mathfrak{X}_{m-1} y^{(m-1)} + \mathfrak{X}_{m-2} y^{(m-2)} + \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_1\, y' + \mathfrak{X}_0\, y = 0$$

gemeinschaftliche Integrale besitzen, und dass für solche, anstatt y gesetzt, nicht nur sie, sondern auch alle durch Differenziren, Multipliziren und Addiren aus ihnen gewonnenen erfüllt werden müssen. Wir suchen nun wirklich aus ihnen der Ordnungszahl nach niedrigere zu gewinnen und zwar auf folgende Weise: Wir differenziren die zweite und eliminiren sodann aus ihr und der ersten den höchsten Differentialquotienten von y, nämlich $y^{(m)}$, und gewinnen so noch eine Differentialgleichung der $m-1^{\text{sten}}$ Ordnung; haben also jetzt deren zwei, und können aus ihnen $y^{(m-1)}$ eliminiren, wodurch sich eine Differentialgleichung der $m-2^{\text{ten}}$ Ordnung ergibt, welche differenzirt, und sodann mit einer der früheren beiden combinirt eine zweite der Art liefern wird u. s. w. So fortschreitend gelangen wir zu niederern stets und niederern Gleichungen, die alle durch die gemeinschaftlichen particulären Integrale identisch erfüllt werden müssen. Ist nun die Anzahl dieser letzteren auch nur um die Einheit grösser als die Ordnungszahl der durch den in Rede stehenden Eliminationsprocess erhaltenen Gleichung, so lässt sich diess ohne Widerspruch nur dann denken, wenn ihre sämmtlichen Coefficienten identisch der Nulle gleich werden, wonach ihnen jedes beliebige y genügt. Sollte es gar keine gemeinschaftlichen particulären Integrale geben, so wird der Eliminationsprocess auch durch gar kein Nullwerden der Gleichungscoefficienten unterbrochen, und man gelangt am Ende zu einer Gleichung des ersten Grades, aus der $y=0$ als einziger gemeinschaftlicher Werth hervorgeht, der jedoch kein particuläres Integral ist. Wären hingegen der gemeinschaftlichen Integrale s an der Zahl, so würde man auf zwei zusammenfallende Differentialgleichungen der s^{ten} Ordnung $Q=0$ stossen, die alle diese gemeinschaftlichen Werthe in sich vereinigt, und es würde somit jede der zwei auf diese Weise auf gemeinschaftliche Werthe untersuchten Gleichungen eine Zerlegung in zwei Factoren verstatten, von denen der eine Q, der andere aber ein symbolischer Differentialfactor wäre, sohin eine ähnliche Behandlung bezüglich der Herabsetzung um s Einheiten in der Ordnungszahl, wie die eben erwähnte, zulassen.

Die hier zur Sprache gebrachte Methode der Untersuchung zweier Differentialgleichungen auf gemeinschaftliche particuläre Integrale erscheint in ihrer analytischen Anlage wohl höchst einfach und biethet Ähnlichkeit mit der bekannten Eliminationsmethode mehrerer algebraischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, die darin besteht, dass man von einer derselben immer das höchste und das von x freie Glied eliminirt, um so zu Gleichungen von stets niederer Gradzahl zu gelangen. Sie ist auch andererseits nur höchst selten von weitläufigeren Rechnungsentwicklungen begleitet. Auch die Vereinigung mehrerer irrationaler Differentialgleichungen in eine einzige rationale biethet in den einfachsten Fällen, wo das Rationalmachen auch durch eine passende Substitution gelingt, selten besondere Schwierigkeiten. In all' denjenigen Fällen jedoch, wo man eben darum besondere Veranlassung hätte, zu dieser Methode wegen der Unzulänglichkeit aller übrigen Hilfsmittel zu greifen, wird man sich in undurchdringliche analytische Entwicklungen hineingezogen sehen, zu denen der Entschluss nur der grossen Wichtigkeit der wissenschaftlichen Untersuchungen, die zur irrationalen Differentialgleichung

geführt haben, entkeimen kann. Um von der Complication dieser in ihren Grundzügen so einfachen Rechnungen einen auch nur beiläufigen Begriff zu bekommen, kann man sich die bereits im vorhergehenden Paragraphe behandelte irrationale und alldort durch Einführung einer neuen abhängigen Veränderlichen rational gemachte Differentialgleichung vorlegen, nämlich die:

$$xy'' + ry'\sqrt{x^2 + a^2} - (x^2 - a^2)\,y = 0. \tag{217}$$

Zu ihr sollte, dem auseinandergesetzten Verfahren gemäss, noch jene andere geschrieben werden, die aus ihr hervorgeht dadurch, dass man das Zeichen $+$ von $\sqrt{x^2+a^2}$ in $-$ verwandelt, nämlich die:

$$xy'' - ry'\sqrt{x^2 + a^2} - (x^2 - a^2)\,y = 0. \tag{218}$$

Es liegen demnach zwei Gleichungen vor, die aber in der einzigen:

$$xy'' \pm ry'\sqrt{x^2 + a^2} - (x^2 - a^2)\,y = 0 \tag{219}$$

enthalten sind, und nun wäre diejenige, offenbar der vierten Ordnung angehörige Differentialgleichung zu bilden, welche die particulären Integrale der beiden obgenannten Differentialgleichungen in sich vereinigt. Sie sei:

$$X_4\,y^{IV} + X_3\,y''' + X_2\,y'' + X_1\,y' + X_0\,y = 0. \tag{220}$$

Nun hätte man die eine sowohl, wie auch die andere der in der (219) enthaltenen zweimal zu differenziren und sodann die höheren Differentialquotienten y^{IV}, y''', y'' aus ihnen und der vorausgesetzten (220) zu eliminiren. Beiderlei Eliminationsgeschäft kann offenbar hier mit Einem Schlage beendigt werden, indem man das Doppelzeichen $\pm$ des Radicales in der (219) durch den ganzen Verlauf der Rechnung beibehält und sodann im erhaltenen Resultate einmal das obere, dann ein andermal das unter den beiden Zeichen gelten lässt. Die (219) also zweimal differenzirend erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &xy''' + (1 \pm r\sqrt{x^2+a^2})\,y'' + \left(\pm\frac{rx}{\sqrt{x^2+a^2}} - (x^2-a^2)\right) y' - 2xy = 0 \\ &xy^{IV} + (2 \pm r\sqrt{x^2+a^2})\,y''' + \left(\pm\frac{2rx}{\sqrt{x^2+a^2}} - (x^2-a^2)\right) y'' + \end{aligned}\right\} \tag{221}$$

$$+\left(\mp\frac{rx^2}{\sqrt{(x^2+x^2)^3}} \pm \frac{r}{\sqrt{x^2+a^2}} - 4x\right) y' - 2y = 0. \tag{222}$$

Die Multiplicatoren, die beziehlich den Gleichungen (219), (220), (221) und (222) anzufügen sind, damit nach geschehener Addition die zu eliminirenden Differentialquotienten y^{IV}, y''', y'' die Nulle zum Coefficienten erhalten und wegfallen, findet man vermittelst einer höchst einfachen Untersuchung. Sie sind der Reihe nach:

$$X_2\, x^3\, (x^2+a^2)^2 - X_3 . x\, (x^2+a^2)^2\, (1 \pm r \sqrt{x^2+a^2}) +$$

$$+ X_4 \left[(x^2+a^2)^2 (1 \pm r \sqrt{x^2+a^2}) (2 \pm r \sqrt{x^2+a^2}) + x\, (x^2+a^2) \left[x^4 - a^4 \mp 2rx \sqrt{x^2+a^2}\right]\right],$$

$$X_3 . x^3\, (x^2+a^2) - X_4 . x\, (x^2+a^2)\, (2 \pm r \sqrt{x^2+a^2})$$

$$X_4 . x^3$$

$$- x^3\, (x^2+a^2)^2$$

und führen zu folgender Eliminationsgleichung, die nach y der ersten Ordnung angehört und eigentlich zwei solche vorstellt, die beide aus ihr hervorgehen, indem man einmal das obere, ein andermal das untere Zeichen des Radicales $\sqrt{x^2+a^2}$ walten lässt. Sie ist:

$$\left\{\begin{array}{l}
\qquad - X_1 . x^3\, (x^2+a^2)^2 \pm X_2\, rx^3\, (x^2+a^2)^2 + \\
+ X_3 \left[\mp rx\, (x^2+a^2)^2 (1 \pm r\sqrt{x^2+a^2}) \sqrt{x^2+a^2} - x^2 (x^2+a^2) \left[x^4 - a^4 \mp rx \sqrt{x^2+a^2}\right]\right] \\
+ X_4 \left[\begin{array}{l}
\pm (x^2+a^2)^2\, (2 \pm r \sqrt{x^2+a^2}) (1 \pm r \sqrt{x^2+a^2})\, r \sqrt{x^2+a^2} \pm \\
\pm rx \sqrt{x^2+a^2}\, (x^2+a^2)\, (x^4 - a^4 \mp 2rx \sqrt{x^2+a^2}) \pm \\
\pm x\, (x^2+a^2)\, (2 + r \sqrt{x^2+a^2})\, (x^4 - a^4 \mp rx \sqrt{x^2+a^2}) + \\
+ x^3 \left(\pm ra^2 \sqrt{x^2+a^2} - 4x\, (x^2+a^2)^2\right)
\end{array}\right]
\end{array}\right\} y' +$$

$$+ \left\{\begin{array}{l}
\qquad - X_0 . x^3\, (x^2+a^2)^2 - X_2\, x^3\, (x^2-a^2)\, (x^2+a^2)^2 + \\
+ X_3 \left[x\, (x^2-a^2)\, (x^2+a^2)^2\, (1 \pm r \sqrt{x^2+a^2}) - 2x^3\, (x^2+a^2)^2\right] + \\
+ X_4 \left[\begin{array}{l}
-(x^2-a^2)(x^2+a^2)^2 (1 \pm r \sqrt{x^2+a^2}) (2 \pm r \sqrt{x^2+a^2}) - \\
- x\, (x^4-a^4)\, (x^4 - a^4 \mp 2rx \sqrt{x^2+a^2}) + \\
+ 2x^3\, (x^2+a^2)^2\, (1 \pm r \sqrt{x^2+a^2})
\end{array}\right]
\end{array}\right\} y = 0$$

Ihr sollen jedesmal alle diejenigen Werthe von y Genüge leisten, die auch den (219), (220), (221) und (222), aus welchen sie abgeleitet ist, zukommen, also namentlich die zwei particulären Integrale der (219), wenn man die oberen Zeichen der Radicale gelten lässt, und die zwei particulären Integrale der (219), wenn die unteren Zeichen walten. Eines und das Andere ist nur dann möglich, wenn die Coefficienten von y' und y verschwinden, d. h. wenn beliebige Werthe für y gesetzt Genüge leisten, eben weil die Eliminationsgleichung, da sie nur dem ersten Grade angehört, den Fall verschwindender Coefficienten ausgenommen, nur einen einzigen Genüge leistenden Werth zulässt. Man setze also die in Rede stehenden Coefficienten von y' und y gleich Null und diess zwar einmal mit dem oberen, ein zweites Mal mit dem unteren Zeichen des darin enthaltenen Radicales, so erlangt man vier Gleichungen. Diese combinirt man zu zweien durch Addition und Subtraction, so gehen vier neue Gleichungen hervor, die man auch erhalten kann, wenn man die rationalen Glieder der Coefficienten von y und y' für sich, und die

mit dem Factor $\pm\sqrt{x^2+a^2}$ verbundenen ebenfalls für sich der Nulle gleichstellt. Sie sind mit Hinweglassung gewisser Factoren, durch die die Gleichungen getheilt werden können:

$$-x^3X_1+x\left[-r^2(x^2+a^2)-x(x^2-a^2)\right]X_3+\left[3r^2a^2-2x(x^2+a^2)\right]X_4=0$$

$$rx^2(x^2+a^2)^2X_2-ra^2x(x^2+a^2)X_3+\left[2rx(x^2+a^2)(x^4-a^4)+r^2(x^2+a^2)^2+3ra^2x^2+2ra^4\right]X_4=0$$

$$-x^3X_0-x^2(x^2-a^2)X_2-x(x^2+a^2)X_3+\left[-x(x^2-a^2)^2-r^2(x^4-a^4)+2a^2\right]X_4=0$$

$$x(x^4-a^4)X_3+(x^4+3a^4)X_4=0$$

und liefern, nach X_4, X_3, X_2, X_1, X_0 aufgelöst, unter der Bedingung, dass diese Unbekannten sämmtlich ganze algebraische Functionen sind, für dieselben folgende Werthe:

$$X_4=\quad x^2(x^2+a^2)^2(x^2-a^2)$$
$$X_3=-x(x^2+a^2)(x^4+3a^4)$$
$$X_2=-2x^9-r^2x^8-2r^2a^2x^6+4a^4x^5-4a^2x^4+(2r^2a^6+a^4)x^2-2a^8x+r^2a^8-a_8$$
$$X_1=\quad(x^2+a^2)\left[-x^6+r^2x^5-3a^2x^4+4r^2a^2x^3+5a^4x^2+3r^2a^4x-a^6\right]$$
$$X_0=x^{10}-a^2x^8+x^7-2a^4x^6+8a^2x^5+2a^6x^4+a^4x^3+a^8x^2+6a^8x-a^{10}$$

die dann in die (220) substituirt diejenige rationale Gleichung der vierten Ordnung ergeben werden, welcher die den irrationalen (217) und (218) zugehörigen particulären Integrale Genüge leisten.

Vergleicht man nun das erhaltene Resultat und die Rechnungen, die dazu geführt haben, mit dem im vorigen Paragraphe durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen in dieselbe Irrationalgleichung gewonnenen Resultate und mit den damit verknüpften Rechnungsentwicklungen; so sieht man bald, wie sehr die Änderung der unabhängigen Veränderlichen in allen Fällen, wo sie möglich ist, dem Zusammenfügen mehrerer Irrationalgleichungen in eine einzige rationale vorzuziehen sei, nachdem man bei letzterer nicht nur ein complicirteres Resultat durch viel weitläufigere Rechnungen gewinnt, sondern auch noch überdiess die erhaltene complicirtere Gleichung zu integriren und ihre Genüge leistenden Werthe in zwei Partieen zu sondern hat, diejenigen nämlich, die auch die vorgelegte erfüllen, und die anderen hinzugekommenen, die es nicht thun.

Unsere Transformationslehre könnte nun mit diesem sechsten Paragraphe als abgeschlossen betrachtet werden, weil darin alles enthalten ist, was wir als Vorbereitung zu den verschiedenen Integrationsmethoden brauchen, die der folgende Abschnitt bringt. Sollten künftighin noch andere Integrationsmethoden gefunden werden, so wird auch wahrscheinlicherweise die Transformationslehre eine entsprechende Erweiterung erfahren. Da indessen der Einfachheit der Darstellung wegen hie und da nur einfachere Fälle der Betrachtung unterzogen wurden, und da complicirtere vorkommen können, so achten wir für gut, hier noch die allgemeine Behandlung einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung, insofern sie bisher nicht gelehrt worden ist, auseinanderzusetzen, um dem Rechner die Mühe der Erfindung zu ersparen, und weil hiezu gewisse annoch wenig bekannte Formeln der Differentialrechnung benöthigt werden, so wird zunächst zu ihrer Ableitung zu schreiben sein.

§. 7.

Ableitung einiger allgemeinen Formeln der Differentialrechnung.

Die in den vorhergehenden sechs Paragraphen zur Sprache gebrachten Transformationsweisen behandeln grösstentheils nur einfachere Fälle. Es schien diess der Klarheit wegen erspriesslich, weil zu befürchten stand, dass bei alsogleich eingeleiteter allgemeinen Behandlung ein ganz einfaches Verfahren durch die damit verknüpften Rechnungsentwicklungen um so mehr überdeckt und verdunkelt werde, als die Resultate dieser Entwicklungen symbolische Formen sind, die nur für den mit ihnen zu arbeiten Gewohnten die nöthige Durchsichtigkeit besitzen. Nachdem es indess wünschenswerth ist, für alle die einfachen sowohl, als auch die complicirten Fälle ein geordnetes Verfahren bereit zu haben, das wo möglich auf dem kürzesten Wege und mit Sicherheit vor Fehlern zum Ziele führt, so wollen wir jetzt das Transformationsproblem allgemeiner erfassen, eine allgemeine Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung zum Vorwurf wählen, benöthigen aber zu diesem Zwecke gewisser allgemeiner im Gewande der combinatorischen Analysis erscheinender Formeln, die grösstentheils der Differentialrechnung angehören, mit deren Entwicklung sich der gegenwärtige Paragraph beschäftigen wird.

Die Jedermann bekannte Binomialformel, d. h. die:

$$(a+bx)^n = a^n + na^{n-1}bx + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2x^2 + \ldots\ldots + b^nx^n,$$

in der wir gegenwärtig unter n einen ganzen positiven Exponenten verstehen, wird in der Sprache der combinatorischen Analysis kürzer so dargestellt:

$$(a+bx)^n = \mathrm{S}\left[\frac{n!}{\alpha!\lambda!}a^\alpha b^\lambda x^\lambda\right] \qquad (223)$$
$$\alpha+\lambda=n.$$

$n!$ bedeutet hier die Factorielle $1.2.3\ldots n$, ähnlich $\alpha!$ und $\lambda!$, mit der hinzugefügten Bemerkung, dass $0!=1$ sei. Die durch das Zeichen S angedeutete Summirung ist auszudehnen auf alle ganzen und positiven Werthe von α und λ, die Nulle mit eingeschlossen, welche die Gleichung $\alpha+\lambda=n$ erfüllen, die auch desshalb der Binomialformel in ihrer combinatorischen Form, als die Bedeutung von S bestimmend, angehängt ist. Dieser Binomialformel entspricht eine ähnliche, gleichfalls Binomialcoefficienten bergende Formel der Infinitesimalanalysis, nämlich die:

$$\frac{d^n}{dx^n}(PQ) = P^{(n)}Q + nP^{(n-1)}Q' + \frac{n(n-1)}{2}P^{(n-2)}Q'' + \ldots\ldots + PQ^{(n)},$$

die im combinatorischen Kleide folgendermassen aussieht:

$$\frac{d^n}{dx^n}(PQ) = \mathrm{S}\left[\frac{n!}{\alpha!\lambda!}P^{(\alpha)}Q^{(\lambda)}\right] \qquad (224)$$
$$\alpha+\lambda=n$$

und in der nur noch zu bemerken kommt, dass $P^{(0)}=P$ und $Q^{(0)}=Q$ sei.

Aus der (223) lässt sich nun zunächst die Polynomialformel ableiten, während die (224) zu einem Ausdrucke führt, für den n^{ten} Differentialquotienten eines Produktes aus einer beliebigen Anzahl von Factoren, und zwar auf folgende Weise: Man schreibe in der (223), um zuvörderst die n^{te} Potenz des Trinomes:

$$a + a_1 x + bx^2,$$

in nach x aufsteigender Reihenform zu ermitteln, anstatt b den zweitheiligen Ausdruck $a_1 + bx$. so erhält man:

$$(a + a_1 x + bx^2)^n = \mathbf{S}\left[\frac{n!}{\alpha!\,\lambda!}\, a^\alpha\, (a_1 + bx)^\lambda\, x^\lambda\right]$$
$$\alpha + \lambda = n$$

Nun ist kraft der (223) selber:

$$(a_1 + bx)^\lambda = \mathbf{S}\left[\frac{\lambda!}{\beta!\,\mu!}\, a_1^\beta\, b^\mu\, x^\mu\right]$$
$$\beta + \mu = \lambda$$

ein Werth. der, in die vorhergehende Gleichung eingeführt, gibt:

$$(a + a_1 x + bx^2)^n = \mathbf{S}\left[\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\mu!}\, a^\alpha\, a_1^\beta\, b^\mu\, x^{\lambda+\mu}\right]$$
$$\alpha + \lambda = n\,, \qquad \beta + \mu = \lambda.$$

Hier ist die durch $\mathbf{S}$ angedeutete Summirung auf alle ganzen und positiven Werthe von α, λ, β und μ auszudehnen, die die beiden Bedingungsgleichungen erfüllen. Vermittelst der letzteren kann λ sowohl aus der ersten, als auch aus der combinatorischen Form weggeschafft werden. Man wird hiernach nur mehr die Werthe von α, β, μ zu suchen haben, die den zwei Bedingungsgleichungen genügen. Da diese nun dieselben sind, die auch der einzigen $\alpha + \beta + \mu = n$ Genüge leisten, und jene zwei Gleichungen genau dieselben Auflösungen in ganzen Zahlen zulassen, weder mehr noch weniger; so wird sich die eben erhaltene Formel auch mit einer einzigen Bedingungsgleichung auf folgende Weise schreiben lassen:

$$(a + a_1 x + bx^2)^n = \mathbf{S}\left[\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\mu!}\, a^\alpha\, a_1^\beta\, b^\mu\, x^{\beta+2\mu}\right]$$
$$\alpha + \beta + \mu = n.$$

Hieraus leitet man nun auf dieselbe Weise die Quadrinomialformel ab, indem man anstatt b das Binom $a_2 + bx$ einführt. Sie ist:

$$(a + a_1 x + a_2 x^2 + bx^3)^n = \mathbf{S}\left[\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\nu!}\, a^\alpha\, a_1^\beta\, a_2^\gamma\, b^\nu\, x^{\beta+2\gamma+3\nu}\right].$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \nu = n.$$

Der gleichförmige Gang dieser Entwicklungen lässt keinen Zweifel übrig, dass für die n^{te} Potenz einer ganzen Function von x vom Grade r die nachfolgende allgemeine Formel bestehe:

$$(227)\quad (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots a_{r+1} x^{r+1})^n = \mathbf{S}\left[\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots\,\varkappa!}\, a_1^\alpha\, a_2^\beta\, a_3^\gamma \ldots a_{r+1}^\varkappa\, x^{\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots+(r+1)\varkappa}\right]$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots\ldots\ldots+\varkappa=n$$

Die (225) sowohl, wie auch die (227) stellen die n^{te} Potenz eines Polynoms aufsteigend nach Potenzen von x geordnet dar. Es geschieht aber oft, dass man der absteigenden Entwicklung benöthigt. Sie braucht offenbar nicht eigens abgeleitet zu werden, weil man bei der Zerlegung der (225) selbst in ihre Bestandtheile ebenso gut bei dem höchsten, wie bei dem niedersten Exponenten von x anfangen kann; nur thut man gut, um die natürliche Rangordnung, in welcher die Buchstaben α, β, γ, δ, ... $\varkappa$ stehen, beibehalten zu können, die Glieder des Polynoms jetzt in umgekehrter Ordnung zu schreiben, wenn die Entwicklung absteigend erfolgen soll, d. h. man gibt der Polynomialformel die folgende von der (225) nicht wesentlich verschiedene Gestalt:

$$(228)\quad (a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a)^n = \mathbf{S}\left[\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\varkappa!}\, a_r^\alpha\, a_{r-1}^\beta \ldots a^\varkappa\, x^{r\alpha+(r-1)\beta+\cdots+\varkappa}\right]$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots\ldots\ldots+\varkappa=n.$$

Mit Hilfe dieser Formeln nun, und nach ihrem Muster, wollen wir jetzt einige andere der Differentialrechnung angehörige ableiten, die beim Transformationsgeschäfte gleichfalls von Nutzen sind, und namentlich zunächst diejenige, die den n^{ten} Differentialquotienten der Exponentialgrösse:

$$(229)\qquad R = e^{\int \varphi dx}$$

gibt, unter n eine beliebige ganze positive Zahl, und unter φ eine beliebige Function von x verstanden. Wir verwandeln, um dazu zu gelangen, in gegenwärtiger Gleichung die in φ, und somit auch in R vorkommende Variable x in $x+h$ und entwickeln dann φ sowohl, wie auch R nach aufsteigenden Potenzen von h vermittelst der Taylor'schen Formel, so ergibt sich die identische Gleichung:

$$R + R'\frac{h}{1!} + R''\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots + R^{(n)}\frac{h^n}{n!} + \ldots\ldots = e^{\int dx\left[\varphi+\varphi'\frac{h}{1!}+\varphi''\frac{h^2}{2!}+\cdots+\varphi^{(n)}\frac{h^n}{n!}+\cdots\right]}.$$

Weil hier:

$$\int \varphi'\, dx = \varphi,\qquad \int \varphi''\, dx = \varphi',\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\qquad \int \varphi^{(n)}\, dx = \varphi^{(n-1)},\qquad \ldots\ldots\ldots$$

ist, so wird man dieselbe auch so schreiben können:

$$R + R'\frac{h}{1!} + R''\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots + R^{(n)}\frac{h^n}{n!} + \ldots\ldots = e^{\int \varphi dx}\,.\,e^{\varphi\frac{h}{1!}+\varphi'\frac{h^2}{2!}+\cdots\cdots+\varphi^{(n-1)}\frac{h^n}{n!}+\cdots},$$

die Exponentialgrösse die als Factor von $e^{\int \varphi dx}$ im zweiten Theile der Gleichung erscheint, wäre aufsteigend nach Potenzen von h in eine Reihe zu entwickeln. Hierzu dient die wohlbekannte Reihenformel für die Exponentielle e^z, nämlich:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

in welcher z für den gegenwärtigen Fall die Bedeutung:

$$z = \varphi \frac{h}{1!} + \varphi' \frac{h^2}{2!} + \varphi'' \frac{h^3}{3!} + \dots\dots\dots + \varphi^{(n-1)} \frac{h^n}{n!} + \dots\dots\dots$$

hat. Dem gemäss verwandelt sich die vorliegende Gleichung in:

$$R + R' \frac{h}{1!} + R'' \frac{h^2}{2!} + \dots\dots\dots + R^{(n)} \frac{h^n}{n!} + \dots\dots\dots =$$

$$= e^{\int \gamma dx} \begin{cases} 1 \\ + \frac{1}{1!}\left[\varphi \frac{h}{1!} + \varphi' \frac{h^2}{2!} + \dots\dots\dots + \varphi^{(n-1)} \frac{h^n}{n!} + \dots\dots\right] + \\ + \frac{1}{2!}\left[\varphi \frac{h}{1!} + \varphi' \frac{h^2}{2!} + \dots\dots\dots + \varphi^{(n-1)} \frac{h^n}{n!} + \dots\dots\right]^2 + \\ + \frac{1}{3!}\left[\varphi \frac{h}{1!} + \varphi' \frac{h^2}{2!} + \dots\dots\dots + \varphi^{(n-1)} \frac{h^n}{n!} + \dots\dots\right]^3 + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \frac{1}{n!}\left[\varphi \frac{h}{1!} + \varphi' \frac{h^2}{2!} + \dots\dots\dots + \varphi^{(n-1)} \frac{h^n}{n!} + \dots\dots\right]^n + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Um den zweiten Theil dieser Gleichung aufsteigend nach h geordnet hinzustellen, entwickeln wir die successiven Potenzen des alldort ersichtlichen unendlichen Polynomes vermittelst der Polynomialformel, hiezu die Formel (227) erkiesend, in welcher den gegenwärtigen Umständen gemäss:

$$r = \infty, \quad a_1 = \frac{\varphi}{1!}, \quad a_2 = \frac{\varphi'}{2!}, \quad a_3 = \frac{\varphi''}{3!}, \quad \dots\dots\dots$$

gesetzt wird. Wir erhalten auf diese Weise in combinatorischer Sprache:

$$R + R' \frac{h}{1!} + R'' \frac{h^2}{2!} + \dots\dots\dots + R^{(n)} \frac{h^n}{n!} + \dots\dots\dots =$$

$$= e^{\int \gamma dx} \begin{cases} 1 + \\ + \frac{1}{1!} \mathbf{S}\left[\frac{1!}{\alpha!\beta!\gamma!\dots} \left(\frac{\varphi}{1!}\right)^\alpha \left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^\beta \left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^\gamma \dots\dots h^{\alpha+2\beta+3\gamma+\dots}\right] + \\ \qquad \alpha + \beta + \gamma + \dots\dots\dots = 1 \\ + \frac{1}{2!} \mathbf{S}\left[\frac{2!}{\alpha!\beta!\gamma!\dots} \left(\frac{\varphi}{1!}\right)^\alpha \left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^\beta \left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^\gamma \dots\dots h^{\alpha+2\beta+3\gamma+\dots}\right] + \\ \qquad \alpha + \beta + \gamma + \dots\dots\dots = 2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \frac{1}{n!} \mathbf{S}\left[\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\dots} \left(\frac{\varphi}{1!}\right)^\alpha \left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^\beta \left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^\gamma \dots\dots h^{\alpha+2\beta+3\gamma+\dots}\right] + \\ \qquad \alpha + \beta + \gamma + \dots\dots\dots = n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Bei allen Bestandtheilen des Multiplicators von $e^{\int \gamma dx}$ lässt sich der constante äussere Factor unter das Summenzeichen schreiben, worauf man eine kleine Abkürzung erzielt; sodann gewahrt man, dass all' diese Bestandtheile in der einzigen Form:

$$\mathbf{S}\left[\frac{1}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}\left(\frac{\varphi}{1!}\right)^{\alpha}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\beta}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\gamma}\ldots\ldots h^{\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots}\right]$$

enthalten seien, nur dass in ihnen der Reihe nach das Aggregat $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots$ beziehlich die Werthe 1, 2, 3, ... erhält. Der ganze Factor von $e^{\int \gamma dx}$ ist daher auch der vorliegenden Summe gleich, wenn man sich nur bemeldetes Aggregat als aller möglichen ganzen und positiven Werthe einschliesslich der Nulle fähig denkt, d. h. wenn man die Bedingungsgleichung weglässt, und nur dabei nicht vergisst, dass die Buchstaben α, β, γ, ... sämmtlich ganze und positive Zahlen andeuten. Unsere identische Gleichung ist daher kurzweg:

$$R + R'\frac{h}{1!} + R''\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + R^{(n)}\frac{h^n}{n!} + \ldots\ldots\ldots =$$

$$= e^{\int \gamma dx}\cdot\mathbf{S}\left[\frac{1}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}\left(\frac{\varphi}{1!}\right)^{\alpha}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\beta}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\gamma}\ldots\ldots\ldots h^{\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots}\right].$$

Ihrer Natur nach sind wir berechtigt, die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von h zur rechten und linken Seite einander gleichzusetzen. Thun wir diess bloss beziehlich des Coefficienten von h^n, so ergibt sich als solcher einerseits $\frac{R^{(n)}}{n!}$, andererseits aber eine Summe von mehreren Gliedern, von der Form des Eingeklammerten unter dem Zeichen $\mathbf{S}$, bei welchen allen jedoch $\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots=n$ sein muss. Diess führt zu:

$$\frac{R^{(n)}}{n!} = e^{\int \gamma dx}\,\mathbf{S}\left[\frac{1}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}\left(\frac{\varphi}{1!}\right)^{\alpha}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\beta}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\gamma}\ldots\ldots\ldots\right]$$
$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots\ldots\ldots = n,$$

oder mit $n!$ multiplizirend, und auf die Bedeutung von $R^{(n)}$ aus (229) Rücksicht nehmend, zur:

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{\int \gamma dx} = e^{\int \gamma dx}\,\mathbf{S}\left[\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}\left(\frac{\varphi}{1!}\right)^{\alpha}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\beta}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\gamma}\ldots\ldots\ldots\right] \tag{230}$$
$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots\ldots\ldots = n,$$

und diess ist die zum wiederholten Differenziren einer Exponentialgrösse dienende allgemeine Formel, deren bereits im I. Bande S. 257 Erwähnung geschah.

Nehmen wir jetzt die Ableitung einer anderen vor, derjenigen nämlich, die den allgemeinen n^{ten} Differentialquotienten gibt der r^{ten} Potenz einer Function P von x. Sie könnte allenfalls aus der zur Differentiation eines Produktes von r Factoren dienenden (226) dadurch abgeleitet werden, dass man in derselben $P_1 = P_2 = \ldots\ldots P_r = P$ annimmt. Da aber dadurch mehrere Glieder der im zweiten Theile enthaltenen Summe gruppenweise einander gleich werden, und ihre Zusammenziehung zu

complizirteren Betrachtungen nöthigt, halten wir es für angemessener, auf demselben Wege, auf welchem wir den allgemeinen Differentialquotienten der Exponentielle gefunden haben, auch jenen von:

$$R = P^r$$ (

zu suchen. Wir verwandeln nämlich in der vorliegenden identisch vorausgesetzten Gleichung x in $x + h$ und entwickeln P sowohl, als auch R aufsteigend nach Potenzen von h vermittelst der Taylor'schen Formel. Das nächste Ergebniss ist:

$$R + R'\frac{h}{1!} + R''\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots + R^{(n)}\frac{h^n}{n!} + \ldots\ldots = \left[P + P'\frac{h}{1!} + P''\frac{h^2}{2!} + \ldots + P^{(n)}\frac{h^n}{n!} + \ldots\right]^r$$

Die r^{te} Potenz des unendlichen Polynomes, die hier vorkommt, drücken wir durch die Polynomialformel in ihrer Gestalt (225) aus, indem wir:

$$r = \infty, \quad a = P, \quad a_1 = \frac{P'}{1!}, \quad a_2 = \frac{P''}{2!}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad n = r$$

setzen. Diess gibt:

$$R + R'\frac{h}{1!} + R''\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots + R^{(n)}\frac{h^n}{n!} + \ldots\ldots = \mathrm{S}\left[\frac{r!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots} P^\alpha \left(\frac{P'}{1!}\right)^\beta \left(\frac{P''}{2!}\right)^\gamma \ldots\ldots h^{\beta+2\gamma+\ldots}\right]$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots\ldots = r.$$

Diese identische Gleichung ist man berechtigt in eine Unzahl anderer zu zerlegen, die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von h auf der einen und anderen Seite einander gleichsetzend. Thut man diess nur mit jenen von h^n, so gewahrt man einerseits $\frac{R^{(n)}}{n!}$, andererseits aber eine Summe von Gliedern, bei denen allen $\beta + 2\gamma + \ldots = n$ sein muss. Man bekommt also:

$$\frac{R^{(n)}}{n!} = \mathrm{S}\left[\frac{r!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots} P^\alpha \left(\frac{P'}{1!}\right)^\beta \left(\frac{P''}{2!}\right)^\gamma \ldots\ldots\ldots\right]$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots\ldots = r$$
$$\beta + 2\gamma + \ldots\ldots\ldots = n,$$

oder wenn man mit $n!$ multiplizirt und zugleich die Bedeutung (231) von R berücksichtigt:

$$\frac{d^n}{dx^n}[P^r] = \mathrm{S}\left[\frac{r!\,n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots} P^\alpha \left(\frac{P'}{1!}\right)^\beta \left(\frac{P''}{2!}\right)^\gamma \ldots\ldots\ldots\right]$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots\ldots = r$$
$$\beta + 2\gamma + \ldots\ldots\ldots = n.$$ (

Auch von dieser allgemeinen Formel ist bereits im ersten Bande S. 261 Erwähnung geschehen. Sie erscheint insoferne von etwas anderer Natur als die unmittelbar früher für die Exponentielle entwickelte, weil die ganzen positiven Zahlen α, β, γ ... nicht eine, sondern zwei Bedingungsgleichungen zu erfüllen haben.

Schreiten wir jetzt zur Entwicklung einer dritten Formel, die der Einführung einer neuen

unabhängigen Veränderlichen in eine Differentialgleichung zu Grunde gelegt werden soll. Denken wir uns y als eine beliebige Function von x, etwa:

$$y = f(x),$$

ferner anstatt x eine neue Veränderliche $\mathfrak{x}$ eingeführt, deren Werth aus einer gegebenen Gleichung zwischen diesen beiden Variablen:

$$\varphi(x\mathfrak{x}) = 0 \tag{233}$$

hervorgeht; y verwandelt sich dadurch in eine Function von $\mathfrak{x}$ und die Aufgabe ist: Man soll jeden beliebigen n^{ten} Differentialquotienten von y nach x ausdrücken durch die Differentialquotienten desselben y nach $\mathfrak{x}$ genommen.

Verwandeln wir auch hier, um unseren Zweck zu erreichen, x in $x+h$, so wird, weil der durch die (233) ausgedrückte Zusammenhang zwischen x und $\mathfrak{x}$ besteht, auch $\mathfrak{x}$ als Function von x einen geänderten Werth erhalten, den wir durch $\mathfrak{x} + \Delta\mathfrak{x}$ andeuten wollen, so zwar, dass in Reihenform:

$$\Delta\mathfrak{x} = \frac{d\mathfrak{x}}{dx}\frac{h}{1!} + \frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3}\frac{h^3}{3!} + \dots\dots\dots \tag{234}$$

wird. Betrachtet man nun einmal y als Function von x, so geht sie durch das der Veränderlichen zugetheilte Increment h über in:

$$y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1!} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{3!} + \dots\dots\dots + \frac{d^ny}{dx^n}\frac{h^n}{n!} + \dots\dots\dots$$

Sieht man hingegen y als Function von $\mathfrak{x}$ an, so wird aus ihr durch das dem $\mathfrak{x}$ zukommende Increment $\Delta\mathfrak{x}$:

$$y + \frac{dy}{d\mathfrak{x}}\frac{\Delta\mathfrak{x}}{1!} + \frac{d^2y}{d\mathfrak{x}^2}\frac{\Delta\mathfrak{x}^2}{2!} + \frac{d^3y}{d\mathfrak{x}^3}\frac{\Delta\mathfrak{x}^3}{3!} + \dots\dots\dots + \frac{d^ny}{d\mathfrak{x}^n}\frac{\Delta\mathfrak{x}^n}{n!} + \dots\dots\dots$$

Ist nun $\Delta\mathfrak{x}$ der durch die Reihe (234) vorgestellte dem Incremente h von x entsprechende Zuwachs, so sind die beiden geänderten Functionswerthe von y offenbar einander identisch gleich. Man hat also:

$$y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1!} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{3!} + \dots\dots\dots + \frac{d^ny}{dx^n}\frac{h^n}{n!} + \dots\dots\dots =$$

$$\begin{aligned}
= \quad & y + \\
& + \frac{dy}{d\mathfrak{x}}\frac{1}{1!}\left[\frac{d\mathfrak{x}}{dx}\frac{h}{1!} + \frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3}\frac{h^3}{3!} + \dots\dots\dots\right] + \\
& + \frac{d^2y}{d\mathfrak{x}^2}\cdot\frac{1}{2!}\left[\frac{d\mathfrak{x}}{dx}\frac{h}{1!} + \frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3}\frac{h^3}{3!} + \dots\dots\dots\right]^2 + \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \frac{d^ny}{d\mathfrak{x}^n}\cdot\frac{1}{n!}\left[\frac{d\mathfrak{x}}{dx}\frac{h}{1!} + \frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3}\frac{h^3}{3!} + \dots\dots\dots\right]^n + \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Um nun den zweiten Theil dieser Gleichung nach aufsteigenden Potenzen von h wohlgeordnet hinzustellen, entwickeln wir die aufeinanderfolgenden Potenzen des unendlichen Polynomes vermittelst der Polynomialformel (227):

$$r = \infty\,, \qquad a_1 = \frac{d\mathfrak{r}}{dx}\frac{1}{1!}\,, \qquad a_2 = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2}\cdot\frac{1}{2!} + \ldots\ldots\ldots$$

setzend. Wir erhalten so in combinatorischer Ausdrucksweise:

$$y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1!} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{d^ny}{dx^n}\frac{h^n}{n!} + \ldots\ldots\ldots =$$

$$= y + \frac{dy}{d\mathfrak{r}}\cdot\frac{1}{1!}\,\mathbf{S}\left[\frac{1!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}\left(\frac{1}{1!}\frac{d\mathfrak{r}}{dx}\right)^\alpha\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2}\right)^\beta\left(\frac{1}{3!}\frac{d^3\mathfrak{r}}{dx^3}\right)^\gamma\ldots\ldots h^{\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots}\right]$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots\ldots = 1$$

$$+ \frac{d^2y}{d\mathfrak{r}^2}\cdot\frac{1}{2!}\,\mathbf{S}\left[\frac{2!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}\left(\frac{1}{1!}\frac{d\mathfrak{r}}{dx}\right)^\alpha\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2}\right)^\beta\left(\frac{1}{3!}\frac{d^3\mathfrak{r}}{dx^3}\right)^\gamma\ldots\ldots h^{\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots}\right]$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots\ldots = 2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d^ny}{d\mathfrak{r}^n}\cdot\frac{1}{n!}\,\mathbf{S}\left[\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}\left(\frac{1}{1!}\frac{d\mathfrak{r}}{dx}\right)^\alpha\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2}\right)^\beta\left(\frac{1}{3!}\frac{d^3\mathfrak{r}}{dx^3}\right)^\gamma\ldots\ldots h^{\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots}\right]$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots\ldots = n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

bewirken zunächst durch Hineinsetzen des äusseren Factors unter das Summenzeichen eine kleine Abkürzung und bemerken sodann, dass alle Glieder, die sich im zweiten Theile der Gleichung vorfinden, aus dem einzigen:

$$\mathbf{S}\left[\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}y}{d\mathfrak{r}^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}}\,\frac{1}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}\left(\frac{d\mathfrak{r}}{1!\,dx}\right)^\alpha\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{2!\,dx^2}\right)^\beta\left(\frac{d^3\mathfrak{r}}{3!\,dx^3}\right)^\gamma\ldots\ldots\ldots h^{\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots}\right]$$

hervorgehen, indem man das Aggregat $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots$ durch schickliche seinen Bestandtheilen ertheilte ganze und positive Werthe der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, ... bedeuten lässt. Der vorliegende Ausdruck, ohne alle Bedingungsgleichung hingeschrieben, stellt daher bereits diesen zweiten Theil der Gleichung vor, wenn man nur annimmt, dass $\frac{d^0y}{d\mathfrak{r}^0} = y$ sei. Wir haben also:

$$y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1!} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{d^ny}{dx^n}\frac{h^n}{n!} + \ldots\ldots\ldots =$$

$$= \mathbf{S}\left[\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}y}{d\mathfrak{r}^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}}\,\frac{1}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}\left(\frac{d\mathfrak{r}}{1!\,dx}\right)^\alpha\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{2!\,dx^2}\right)^\beta\left(\frac{d^3\mathfrak{r}}{3!\,dx^3}\right)^\gamma\ldots\ldots\ldots h^{\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots}\right].$$

Stellt man in dieser identischen Gleichung die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von h, und namentlich jene von h^n in beiden Theilen einander gleich, und multiplizirt noch überdiess die so erhaltene Formel mit $n!$; so erhält man den gesuchten Ausdruck des n^{ten} Differentialquotienten von y nach x in Function jener nach $\mathfrak{x}$:

$$(235) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \mathrm{S}\left[\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\,\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}y}{d\mathfrak{x}^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{1!\,dx}\right)^{\alpha}\left(\frac{d^2\mathfrak{x}}{2!\,dx^2}\right)^{\beta}\left(\frac{d^3\mathfrak{x}}{3!\,dx^3}\right)^{\gamma}\cdots\cdots\right]$$

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots\ldots\ldots = n.$$

Der Gebrauch der in den eben entwickelten Formeln vorkommenden combinatorischen Zeichen erleichtert sehr die Rechnungsentwicklungen, die ohne denselben beinahe nicht durchzuführen wären. Es ist zwar wahr, dass in einem jeden gegebenen Falle, und mindestens am Ende der Rechnung die combinatorischen Symbole in die ihnen gleichgeltenden Summen wirklich umgesetzt werden müssen. Diese Umsetzung bietet aber keine Schwierigkeiten und führt auch bei einer geordneten Weise vorzugehen keine Gefahr mit sich, Rechenfehler zu begehen. Ueber die Art und Weise, diese Symbole zu verwandeln in die ihnen gleichgeltenden Reihenentwicklungen, mögen hier noch einige erläuternde Worte am Platze sein.

Man überzeugt sich nach einiger Ueberlegung sehr bald, dass es bei der Bildung der in den Gleichungen (226), (230), (232) und (235) vorkommenden Summen nur darauf ankomme, alle möglichen Gruppen der einer einzigen gegebenen linearen Gleichung Genüge leistenden ganzen und positiven Werthe zu ermitteln durch ein Verfahren, aus dessen Natur man die volle Ueberzeugung ableitet, dass man weder eine solche Gruppe ausgelassen, noch eine wiederholt hingeschrieben habe. Bei der (230) z. B. kommt alles darauf an, dass man alle möglichen Auflösungen der linearen Gleichung:

$$(236) \qquad \alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \ldots\ldots\ldots = n$$

in ganzen und positiven Zahlen ermittelt habe. Man kann hier und in anderen ähnlichen Fällen vorgehen wie folgt: Man ordnet die Werthe von α, β, γ, ... tabellarisch, indem man die von α in eine erste, mit α überschriebene Spalte, die von β in eine zweite mit β überschriebene, die von γ in eine dritte u. s. w. trägt. Eine letzte Spalte kann dann das der Gruppe entsprechende Glied der Summe enthalten. Man setzt noch überdiess unter den Gruppen eine gewisse Rangordnung fest, indem man z. B. derjenigen einen höheren Rang beilegt, die als Zahl im arabischen Zahlensysteme gedacht, einen grösseren numerischen Werth ausweist, so dass man so zu sagen mit der Auflösung der Aufgabe beschäftigt ist, aus allen der Gleichung (236) Genüge leistenden Werthen als Ziffern alle möglichen Zahlen abzuleiten, von der grössten bis zur kleinsten. Ist n eine kleine, wenige Einheiten enthaltende Zahl, so sind auch der Genüge leistenden Gruppen von Werthen eine geringe Anzahl und sie sind nicht schwer zu übersehen. Wird hingegen n ein bedeutender Zahlenwerth, so kann man, um aller Auflösungen ordnungsmässig habhaft zu werden, so verfahren: Man ermittelt zuvörderst den

grössten aller Werthe, die α annehmen kann. Diess ist nie schwer, und im gegenwärtigen Falle wäre z. B. dieses grösste α gleich n. Von ihm geht man dann zu dem numerisch kleineren $n-1$, $n-2$, ... $2, 1, 0$ versuchsweise über, so jedoch, dass man diesen Uebergang zum nächst kleineren α nicht eher unternimmt, bevor man die dem angenommenen grösseren α entsprechenden Gruppen von Werthen für $\beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$ alle ermittelt, und alles gehörig in die Tabelle eingetragen hat, oder mit anderen Worten, bevor man die Gleichung:

$$2\beta + 3\gamma + 4\delta + \ldots\ldots\ldots = n - \alpha$$

in ganzen positiven Zahlen vollständig aufgelöst hat. Sollten sich alle Auflösungen dieser Letzteren ihrer grösseren Anzahl wegen noch nicht leicht mit einem einzigen Blicke überschauen lassen, so verfährt man mit β ebenso, wie zuvor mit α. Man sucht zuvörderst das grösste β und geht von demselben dann zu dem je um die Einheit niedereren versuchsweise über, so jedoch, dass man diesen Übergang nicht eher macht, als nachdem man alle zu einem bestimmten β gehörigen Gruppen von Werthen für $\gamma, \delta, \ldots\ldots$ ermittelt und in die Tabelle eingetragen hat, oder mit anderen Worten, nachdem man die Gleichung:

$$3\gamma + 4\delta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = n - \alpha - 2\beta$$

für das erwählte α und β vollständig aufgelöst hat. Sollten auch hier die bestehenden ganzen Auflösungen sich noch nicht überschauen lassen, was bei einem beträchtlichen n und bei geringen dem α und β ertheilten Werthen der Fall sein wird, so wird man auch noch das Glied 3γ hinübertragen und die ganzen und positiven Auflösungen der Gleichung:

$$4\delta + 5\varepsilon + \ldots\ldots\ldots = n - \alpha - 2\beta - 3\gamma$$

zu ermitteln suchen u. s. w. Man kann sich den ganzen Vorgang durch ein Beispiel verdeutlichen. Entwickeln wir, um ein solches zu haben, den 7. Differentialquotienten der Exponentiellen $e^{\int \varphi dx}$ auf die angedeutete Weise, so geschieht diess vermittelst der folgenden Tabelle, die in ihren Spalten nach dem Range geordnet alle Gruppen von Werthen und die ihnen entsprechenden Summenglieder enthält, welche die lineare Gleichung:

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + 5\varepsilon + 6\varkappa + 7\lambda = 7 \qquad (2$$

erfüllen. Mehr griechische Buchstaben, als die hier ersichtlichen, kommen darin nicht vor, wiewohl im Allgemeinen die Reihe derselben als eine unendliche betrachtet werden muss, weil schon der nächste etwa ω den Coefficienten 8 erhalten würde und dem zufolge keinen anderen Werth anzunehmen vermöchte, als Null, indem bereits schon der nächst grössere $\omega = 1$ einen der vorangehenden, α nämlich, zwingen würde einen negativen Werth anzunehmen, was gegen die Natur desselben ist.

(238)

α	β	γ	δ	ε	$\varkappa$	λ	$\frac{7!}{\alpha!\beta!\,.....\,\gamma!}\left(\frac{\varphi}{1!}\right)^{\alpha}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\beta}\,..........\,\left(\frac{\varphi^{VI}}{7!}\right)$
7	0	0	0	0	0	0	$+ \varphi^7$
5	1	0	0	0	0	0	$+ 21\,\varphi^5\,\varphi'$
4	0	1	0	0	0	0	$+ 35\,\varphi^4\,\varphi''$
3	2	0	0	0	0	0	$+ 105\,\varphi^3\,\varphi'^2$
3	0	0	1	0	0	0	$+ 35\,\varphi^3\,\varphi'''$
2	1	1	0	0	0	0	$+ 210\,\varphi^2\,\varphi'\,\varphi''$
2	0	0	0	1	0	0	$+ 21\,\varphi^2\,\varphi^{IV}$
1	3	0	0	0	0	0	$+ 105\,\varphi\,\varphi'^3$
1	1	0	1	0	0	0	$+ 105\,\varphi\,\varphi'\,\varphi'''$
1	0	2	0	0	0	0	$+ 70\,\varphi\,\varphi''^2$
1	0	0	0	0	1	0	$+ 7\,\varphi\,\varphi^{V}$
0	2	1	0	0	0	0	$+ 105\,\varphi'^2\,\varphi''$
0	1	0	0	1	0	0	$+ 21\,\varphi'\,\varphi^{IV}$
0	0	1	1	0	0	0	$+ 35\,\varphi''\,\varphi'''$
0	0	0	0	0	0	1	$+ \varphi^{VI}$

Der auf diese Weise ermittelte 7. Differentialquotient ist daher:

$$\frac{d^7}{dx^7}\,e^{\int \varphi dx} = e^{\int \varphi dx}\left[\begin{array}{l} \varphi^7 + 21\varphi^5\,\varphi' + 35\varphi^4\,\varphi'' + 105\varphi^3\,\varphi'^2 + 35\varphi^3\,\varphi''' + 210\varphi^2\,\varphi'\,\varphi'' + \\ + 21\varphi^2\,\varphi^{IV} + 105\varphi\varphi'^3 + 105\varphi\varphi'\,\varphi''' + 70\varphi\varphi''^2 + 7\varphi\varphi^{V} + \\ + 105\varphi'^2\varphi'' + 21\varphi'\,\varphi^{IV} + 35\varphi''\,\varphi''' + \varphi^{VI}. \end{array}\right] \tag{239}$$

Wäre die Bedeutung der Summe nicht durch eine, sondern durch mehrere Bedingungsgleichungen bestimmt, wie in der Formel (232), die den Werth gibt von $\frac{d^n}{dx^n}\,P^r$, so bliebe gleichwohl das Verfahren dasselbe. Man ermittelt nämlich, nachdem man die Tabelle gebildet, zuvörderst den grösstmöglichen Werth von α, der beide Gleichungen, hier die:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \,.........\, = r; \quad \beta + 2\gamma + 3\delta + \,..........\, = n$$

erfüllt, und geht von demselben versuchsweise zu den nächst kleineren über, so jedoch, dass dieser Übergang erst dann erfolgt, wenn man alle dem angenommenen α entsprechenden Gruppen von Werthen für β, γ, δ, ... bereits gefunden und eingetragen hat, oder mit anderen Worten, nach vollbrachter Auflösung in ganzen Zahlen der linearen Gleichungen:

$$\beta + \gamma + \delta + \,..........\, = r - \alpha; \quad \beta + 2\gamma + 3\delta + \,..........\, = n.$$

Sollten sich die Gruppen von Werthen, welche diesen Genüge leisten, nicht unmittelbar überschauen

lassen, so verfährt man ebenso mit β. Man ermittelt nämlich seinen grösstmöglichen Werth und übergeht von demselben versuchsweise zum nächst niedrigeren über, Letzteres aber erst, nachdem man die dem grösseren entsprechenden Gruppen von Werthen für $\gamma, \delta, \ldots$ gefunden und eingetragen hat, u. s. f. bis man zu einem Paare von Gleichungen gelangt, von dem die in geringerer Anzahl vorhandenen Auflösungen sich mit einem einzigen Blicke überschauen lassen. Um auch hier ein erläuterndes Beispiel zu haben, suchen wir den 7. Differentialquotienten von P^5. Unsere zwei linearen Gleichungen sind in diesem Falle:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \varkappa + \lambda + \mu = 5, \quad \beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + 5\varkappa + 6\lambda + 7\mu = 7 \qquad (240)$$

und die Tabelle:

α	β	γ	δ	ε	$\varkappa$	λ	μ	$\frac{5!7!}{\alpha!\beta!\ldots\mu!} P^\alpha \left(\frac{P'}{1!}\right)^\beta \ldots \left(\frac{P^{VII}}{7!}\right)^\mu$
4	0	0	0	0	0	0	1	……… $5 P^4 P^{VII}$
3	1	0	0	0	0	1	0	……… $140 P^3 P' P^{VI}$
3	0	1	0	0	1	0	0	……… $420 P^3 P'' P^{V}$
3	0	0	1	1	0	0	0	……… $700 P^3 P''' P^{IV}$
2	2	0	0	0	1	0	0	……… $1260 P^2 P'^2 P^{V}$
2	1	1	0	1	0	0	0	……… $6300 P^2 P' P'' P^{IV}$
2	1	0	2	0	0	0	0	……… $4200 P^2 P' P'''^2$
2	0	2	1	0	0	0	0	……… $6300 P^2 P''^2 P'''$
1	3	0	0	1	0	0	0	……… $4200 P P'^3 P^{IV}$
1	2	1	1	0	0	0	0	……… $25200 P P'^2 P'' P'''$
1	1	3	0	0	0	0	0	……… $12600 P P' P''^3$
0	4	0	1	0	0	0	0	……… $4200 P'^4 P'''$
0	3	2	0	0	0	0	0	……… $12600 P'^3 P''^2$

(241)

Mithin der Werth des 7. Differentialquotienten von P^5:

$$\begin{aligned} P^5 = \; & 5P^4 P^{VII} + 140P^3 P' P^{VI} + 420P^3 P'' P^{V} + 700P^3 P''' P^{IV} + 1260P^2 P'^2 P^{V} + \\ & + 6300P^2 P' P'' P^{IV} + 4200P^2 P' P'''^2 + 6300P^2 P''^2 P''' + 4200PP'^3 P^{IV} + \\ & + 25200PP'^2 P'' P''' + 12600PP' P''^3 + 4200P'^4 P''' + 12600P'^3 P''^2. \end{aligned} \qquad (242)$$

Es trifft sich nicht selten, dass man mehr noch als zwei Bedingungsgleichungen, die die Bedeutung der Summe $\mathfrak{S}$ bestimmen, zu berücksichtigen hat. Sie treten z. B. hinzu, wenn man nicht den ganzen Werth des combinatorischen Symbols, sondern nur einen bestimmten Theil desselben in entwickelter Form darzustellen hat. Auch in solchen Fällen braucht das Verfahren kein anderes zu

sein und es ist ganz klar, dass man desto weniger Summenglieder erhalten wird, je mehr Bedingungsgleichungen bestehen, indem jede derselben die Anzahl der ganzen und positiven Auflösungen beschränkt und sollte diess zufällig bei einer von ihnen nicht geschehen, so wie diess selbst bei unserer Entwicklung der Polynomialformel vorgekommen ist, so ist die betreffende Gleichung eine unmittelbare Folge der übrigen, sohin überflüssig und kann gestrichen werden. Es fällt aber auch andererseits in die Augen, dass die Auflösung der Bedingungsgleichungen bei zunehmender Anzahl derselben sich in der Regel nicht vereinfacht. Man könnte sich daher veranlasst sehen, eine andere Behandlungsweise solcher Probleme zu versuchen, bestehend darin, dass man aus sämmtlichen gegebenen Bedingungsgleichungen so viele Grössen α, β, γ, ... eliminirt, als man kann und zugleich ihre Werthe in Function der übrigen sucht, sodann aber die erhaltene Eliminationsgleichung in ganzen und positiven Zahlen auflöst. Hiebei ist jedoch nicht zu übersehen, dass man alle erhaltenen Gruppen von Auflösungen als mit den Voraussetzungen im Widerspruche wegzuwerfen hat, die für die anfänglichen α, β, γ, ... negative oder gebrochene Werthe geben.

Der Rechner kann übrigens anstatt des hier beschriebenen, jedes andere wohlgeordnete Verfahren anwenden. Unter den vielen, die sich dem momentanen Bedürfnisse gemäss darbiethen, ist z. B. dasjenige unmittelbar in die Augen fallend, das wir in Folgendem darstellen werden: Man sucht aus den Bedingungsgleichungen, die die extensive Bedeutung der Summe $\mathbf{S}$ bestimmen, diejenige heraus, die die geringste Anzahl von Auflösungen in ganzen Zahlen zu besitzen scheint. Sie ist vom Ansehen zumeist die complicirteste und verschafft sich auch alle diese Auflösungen. Man untersucht ferner, welche von ihnen zugleich irgend einer nach Belieben gewählten zweiten der Bedingungsgleichungen Genüge leistet, bezeichnet diese und lässt die andere ausser Acht. Sodann forscht man, welche von diesen bezeichneten Auflösungen auch zugleich noch eine dritte der vorhandenen Bedingungsgleichungen erfüllt, bezeichnet dieselbe abermals und verwirft die übrigen u. s. f., bis man zur letzten der Bedingungsgleichungen angelangt ist. Unstreitig hat dieses Verfahren den Nachtheil, dass man sehr viele Auflösungen sucht und die Mehrzahl zu verwerfen genöthigt ist, dem aber einerseits der Vortheil einer grossen Sicherheit entgegensteht, während andererseits die Mühe, überflüssige Auflösungen zu bilden, sich theilweise dadurch umgehen lässt, dass man von solchen Bedingungsgleichungen, deren häufiges Vorkommen aus der Erfahrung bekannt ist, alle Auflösungen ein für alle Mal ermittelt und tabellarisch zusammenstellt. Eine solche Gleichung wäre die einer jeden der Formeln, welche der gegenwärtige Paragraph gebracht hat, angehängte und eben desshalb auch in allen Formeln der Transformationslehre vorkommende:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots\dots\dots + n\alpha_n = n \tag{243}$$

Wir bieten desshalb hier eine Tabelle der ganzen positiven Werthe für α_1, α_2, α_3, ... α_n, die diese Gleichung erfüllen, spaltenweise geordnet und so weit fortgesetzt, dass man vermittelst derselben die Transformationen aller Differentialgleichungen bis zur 12. Ordnung vornehmen kann. Sie ist ohne jede weitere Auseinandersetzung wohl Jedermann verständlich. Eine jede Horizontalreihe darin enthaltener Zahlen liefert nämlich eine Gruppe Genüge leistender Werthe derjenigen Buchstaben, die der

Spalten, in der die Zahl steht, überschrieben sind. Die letzte Spalte aber enthält das entsprechende Glied des in sehr vielen Rechnungen der Transformationslehre vorkommenden n^{ten} Differentialquotienten von $e^{\int\varphi dx}$.

Tabelle

der ganzen positiven Auflösungen der Gleichung (243) und der Glieder von $\frac{d^n}{dx^n}\cdot e^{\int\varphi dx}$. (244)

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	$\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots}\left(\frac{\varphi}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\alpha_3}\ldots\ldots\ldots$
n	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \varphi^n$
$n-2$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \binom{n}{2}\varphi^{n-2}\varphi'$
$n-3$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \binom{n}{3}\varphi^{n-3}\varphi''$
$n-4$	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\varphi^{n-4}\varphi'^2$
$n-4$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \binom{n}{4}\varphi^{n-4}\varphi'''$
$n-5$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \binom{n}{2}\binom{n-2}{3}\varphi^{n-5}\varphi'\varphi''$
$n-5$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \binom{n}{5}\varphi^{n-5}\varphi^{IV}$
$n-6$	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \frac{1}{3!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\varphi^{n-6}\varphi'^3$
$n-6$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \binom{n}{2}\binom{n-2}{4}\varphi^{n-6}\varphi'\varphi'''$
$n-6$	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \frac{1}{2!}\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}\varphi^{n-6}\varphi''^2$
$n-6$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	$+\ \binom{n}{6}\varphi^{n-6}\varphi^{V}$
$n-7$	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{3}\varphi^{n-7}\varphi'^2\varphi''$
$n-7$	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \binom{n}{2}\binom{n-2}{5}\varphi^{n-7}\varphi'\varphi^{IV}$
$n-7$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \binom{n}{3}\binom{n-3}{4}\varphi^{n-7}\varphi''\varphi'''$
$n-7$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	$+\ \binom{n}{7}\varphi^{n-7}\varphi^{VI}$
$n-8$	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \frac{1}{4!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{2}\varphi^{n-8}\varphi'^4$
$n-8$	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\ \frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{4}\varphi^{n-8}\varphi'^2\varphi'''$

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	$\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots}\left(\frac{\varphi}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\alpha_3}\ldots\ldots\ldots$
$n-8$	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}\binom{n-5}{3}\quad\varphi^{n-8}\varphi'\varphi''^2$
$n-8$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{6}\quad\varphi^{n-8}\varphi'\varphi^{V}$
$n-8$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{3}\binom{n-3}{5}\quad\varphi^{n-8}\varphi''\varphi^{IV}$
$n-8$	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{4}\binom{n-4}{4}\quad\varphi^{n-8}\varphi'''^2$
$n-8$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	$+\binom{n}{8}\quad\varphi^{n-8}\varphi^{VII}$
$n-9$	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{3!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{3}\quad\varphi^{n-9}\varphi'^3\varphi''$
$n-9$	2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{5}\quad\varphi^{n-9}\varphi'^2\varphi^{IV}$
$n-9$	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}\binom{n-5}{4}\quad\varphi^{n-9}\varphi'\varphi''\varphi'''$
$n-9$	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{7}\quad\varphi^{n-9}\varphi'\varphi^{VI}$
$n-9$	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{3!}\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}\binom{n-6}{3}\quad\varphi^{n-9}\varphi''^3$
$n-9$	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{3}\binom{n-3}{6}\quad\varphi^{n-9}\varphi''\varphi^{V}$
$n-9$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{4}\binom{n-4}{5}\quad\varphi^{n-9}\varphi'''\varphi^{IV}$
$n-9$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	$+\binom{n}{9}\quad\varphi^{n-9}\varphi^{VIII}$
$n-10$	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{5!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{2}\binom{n-8}{2}\quad\varphi^{n-10}\varphi'^5$
$n-10$	3	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{3!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{4}\quad\varphi^{n-10}\varphi'^3\varphi^{IV}$
$n-10$	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{3}\binom{n-7}{3}\quad\varphi^{n-10}\varphi'^2\varphi''^2$
$n-10$	2	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{6}\quad\varphi^{n-10}\varphi'^2\varphi^{V}$
$n-10$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}\binom{n-5}{5}\quad\varphi^{n-10}\varphi'\varphi''\varphi^{IV}$
$n-10$	1	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{4}\binom{n-6}{4}\quad\varphi^{n-10}\varphi'\varphi'''^2$
$n-10$	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{8}\quad\varphi^{n-10}\varphi'\varphi^{VII}$

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	$\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots}\left(\frac{\varphi}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\alpha_3}\ldots\ldots\ldots$	
$n-10$	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}\binom{n-6}{4}$	$\varphi^{n-10}\,\varphi''^{2}\,\varphi'''$
$n-10$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{3}\binom{n-3}{7}$	$\varphi^{n-10}\,\varphi''\,\varphi^{VI}$
$n-10$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{4}\binom{n-4}{6}$	$\varphi^{n-10}\,\varphi'''\,\varphi^{V}$
$n-10$	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{5}\binom{n-5}{5}$	$\varphi^{n\ 10}\,\varphi^{IV^2}$
$n-10$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	$+\binom{n}{10}$	$\varphi^{n-10}\,\varphi^{IX}$
$n-11$	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{4!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{2}\binom{n-8}{3}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi'^{4}\,\varphi''$
$n-11$	3	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{3!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{5}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi'^{3}\,\varphi^{IV}$
$n-11$	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{3}\binom{n-7}{4}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi'^{2}\,\varphi''\,\varphi'''$
$n-11$	2	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{7}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi'^{2}\,\varphi^{VI}$
$n-11$	1	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{3!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}\binom{n-5}{3}\binom{n-8}{3}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi'\,\varphi''^{3}$
$n-11$	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}\binom{n-5}{6}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi'\,\varphi''\,\varphi^{V}$
$n-11$	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{4}\binom{n-6}{5}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi'\,\varphi'''\,\varphi^{IV}$
$n-11$	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{9}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi'\,\varphi^{VIII}$
$n-11$	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}\binom{n-6}{5}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi''^{2}\,\varphi^{IV}$
$n-11$	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{3}\binom{n-3}{4}\binom{n-7}{4}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi''\,\varphi'''^{2}$
$n-11$	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	$+\binom{n}{3}\binom{n-3}{8}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi''\,\varphi^{VII}$
$n-11$	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{4}\binom{n-4}{7}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi'''\,\varphi^{VI}$
$n-11$	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{5}\binom{n-5}{6}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi^{IV}\,\varphi^{V}$
$n-11$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	$+\binom{n}{11}$	$\varphi^{n-11}\,\varphi^{X}$
$n-12$	6	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{6!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{2}\binom{n-8}{2}\binom{n-10}{2}$	$\varphi^{n-12}\,\varphi'^{6}$

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	$\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots}\left(\frac{\varphi}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\alpha_3}\ldots\ldots$
$n-12$	4	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{4!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{2}\binom{n-8}{4}\ \varphi^{n-12}\varphi'^{4}\varphi'''$
$n-12$	3	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{3!2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{3}\binom{n-9}{3}\ \varphi^{n-12}\varphi'^{3}\varphi''^{2}$
$n-12$	3	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{3!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{6}\ \varphi^{n-12}\varphi'^{3}\varphi^{V}$
$n-12$	2	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{3}\binom{n-7}{5}\ \varphi^{n-12}\varphi'^{2}\varphi''\varphi^{IV}$
$n-12$	2	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{4}\binom{n-8}{4}\ \varphi^{n-12}\varphi'^{2}\varphi'''^{2}$
$n-12$	2	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{8}\ \varphi^{n-12}\varphi'^{2}\varphi^{VII}$
$n-12$	1	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}\binom{n-5}{3}\binom{n-8}{4}\ \varphi^{n-12}\varphi'\varphi''^{2}\varphi'''$
$n-12$	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}\binom{n-5}{7}\ \varphi^{n-12}\varphi'\varphi''\varphi^{VI}$
$n-12$	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{4}\binom{n-6}{6}\ \varphi^{n-12}\varphi'\varphi'''\varphi^{V}$
$n-12$	1	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{5}\binom{n-7}{5}\ \varphi^{n-12}\varphi'\varphi^{IV\,2}$
$n-12$	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	$+\binom{n}{2}\binom{n-2}{10}\ \varphi^{n-12}\varphi'\varphi^{IX}$
$n-12$	.	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{4!}\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}\binom{n-6}{3}\binom{n-9}{3}\ \varphi^{n-12}\varphi''^{4}$
$n-12$	.	2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}\binom{n-6}{6}\ \varphi^{n-12}\varphi''^{2}\varphi^{V}$
$n-12$	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{3}\binom{n-3}{4}\binom{n-7}{5}\ \varphi^{n-12}\varphi''\varphi'''\varphi^{I}$
$n-12$	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	$+\binom{n}{3}\binom{n-3}{9}\ \varphi^{n-12}\varphi''\varphi^{VIII}$
$n-12$	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{3!}\binom{n}{4}\binom{n-4}{4}\binom{n-8}{4}\ \varphi^{n-12}\varphi'''^{3}$
$n-12$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	$+\binom{n}{4}\binom{n-4}{8}\ \varphi^{n-12}\varphi'''\varphi^{VII}$
$n-12$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	$+\binom{n}{5}\binom{n-5}{7}\ \varphi^{n-12}\varphi^{IV}\varphi^{VI}$
$n-12$	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	$+\frac{1}{2!}\binom{n}{6}\binom{n-6}{6}\ \varphi^{n-12}\varphi^{V\,2}$
$n-12$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	$+\binom{n}{12}\ \varphi^{n-12}\varphi^{XI}$

§. 8.

Sonderung eines Factors von der Form $(x-\alpha)^h$ oder $(x-\alpha)^h \log^s (x-\alpha)$.

Es hat sich aus unseren bisherigen Untersuchungen ergeben, dass es sehr oft erspriesslich sei, von irgend einem der particulären Integrale einen gewissen entweder bekannten oder erst zu bestimmenden Factor zu sondern, sei es, dass man die Befreiung von einem Nenner, oder auch die Herabsetzung des betreffenden Integrales von der zweiten zur ersten Classe im Sinne hat. Es geschieht diess bekanntlich immer durch Einführung einer neuen abhängigen Veränderlichen etwa z anstatt der vorhandenen y vermittelst einer Substitution wie:

$$y = uz. \tag{245}$$

Sie ist uns bereits vorgekommen und ihr Resultat befindet sich unter (6) Seite 6 des II. Bandes in entwickelter Gestalt. Nachdem wir aber an diesem Orte der Kürze wegen von combinatorischen Symbolen Gebrauch machen, so ziehen wir es vor, anstatt die (6) in ein solches zusammenzuziehen, lieber von vorne herein von dem Gebrauche solcher Zeichen auszugehen, indem wir die gegebene allgemeine Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung schon, d. h. die:

$$\mathfrak{X}_n y^{(n)} + \mathfrak{X}_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + \mathfrak{X}_1 y' + \mathfrak{X}_0 y = 0 \tag{246}$$

wiedergeben im Kleide der Combinationslehre, sie hinstellend, wie folgt:

$$\underset{\alpha+\omega=n.}{\mathrm{S}}\left[\mathfrak{X}_\alpha y^{(\alpha)}\right] = 0 \tag{247}$$

Die angehängte Bedingungsgleichung, in der man sich α und ω als ganze und positive Zahlen zu denken hat, besagt bei der völligen Abwesenheit von ω unter dem Summenzeichen nur, dass α alle möglichen ganzen und positiven Werthe von Null bis n anzunehmen habe, wodurch eben die identische Übereinstimmung der (246) und (247) erzielt wird. Führen wir jetzt in die Letztere durch die obangeführte Substitution (245) die neue abhängige Variable z ein, so benöthigen wir hiezu des α^{ten} Differentialquotienten des Produktes uz. Diesen gibt aber die bekannte Formel (224) des vorhergehenden Paragraphes, nämlich:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(uz) = \underset{\lambda+\mu=\alpha}{\mathrm{S}}\left[\frac{\alpha!}{\lambda!\,\mu!}\, u^{(\lambda)} z^{(\mu)}\right] \tag{248}$$

Diesen führen wir in die gegebene Differentialgleichung (247) ein und bekommen:

$$\underset{\alpha+\omega=n}{\mathrm{S}}\left[\mathfrak{X}_\alpha y^{(\alpha)}\right] = \underset{\substack{\lambda+\mu=\alpha\\ \alpha+\omega=n}}{\mathrm{S}}\left[\frac{\alpha!}{\lambda!\,\mu!}\,\mathfrak{X}_\alpha\, u^{(\lambda)} z^{(\mu)}\right] = 0 \tag{249}$$

Die zwei der letzten Summe angehängten Bedingungsgleichungen lassen sich in eine einzige zusammenziehen, wenn man α ganz eliminirt, indem man es durch $\lambda + \mu$ ersetzt. Diese Einzige ist:

$$\lambda + \mu + \omega = n.$$

Sie führt aufgelöst zu denselben Gruppen von Werthen für λ, μ, ω in ganzen Zahlen, wie jene zwei Gleichungen, nicht mehr und nicht weniger. Man gewinnt daher:

$$(250) \qquad \underset{\lambda + \mu + \omega = n.}{\mathrm{S}} \left[\frac{(\lambda + \mu)!}{\lambda ! \mu !} \mathfrak{X}_{\lambda+\mu} u^{(\lambda)} z^{(\mu)}\right] = 0$$

Denkt man sich dieses Substitutionsresultat nach Differentialquotienten von z absteigend geordnet, d. h. der Reihe nach:

$$\begin{array}{lccccccc} \mu = n, & n-1, & n-2, & \ldots\ldots\ldots & 2, & 1, & 0 \\ \lambda + \omega = 0, & 1, & 2, & \ldots\ldots\ldots & n-2, & n-1, & n \end{array}$$

gesetzt, und die entsprechenden Glieder summirt, so bekommt man:

$$(251) \qquad \begin{aligned} & z^{(n)} \cdot \underset{\lambda+\omega=0}{\mathrm{S}} \left[\frac{(\lambda+n)!}{\lambda ! n !} \mathfrak{X}_{\lambda+n} u^{(\lambda)}\right] + z^{(n-1)} \underset{\lambda+\omega=1}{\mathrm{S}} \left[\frac{(\lambda+n-1)!}{\lambda !(n-1)!} \mathfrak{X}_{\lambda+n-1} u^{(\lambda)}\right] + \ldots\ldots\ldots \\ & + z' \cdot \underset{\lambda+\omega=n-1}{\mathrm{S}} \left[\frac{(\lambda+1)!}{\lambda ! 1 !} \mathfrak{X}_{\lambda+1} u^{(\lambda)}\right] + z \cdot \underset{\lambda+\omega=n}{\mathrm{S}} \left[\frac{\lambda !}{\lambda ! 0 !} \mathfrak{X}_{\lambda} u^{(\lambda)}\right] = 0, \end{aligned}$$

eine Gleichung, die mit der (6) des §. 1 übereinstimmt, wie man sich leicht durch Entwicklung der in derselben vorkommenden Summen überzeugen kann. Sie liegt der Mehrzahl der Transformationsweisen, die die Integration der Differentialgleichungen erheischt, zu Grunde, eben weil die Mehrzahl auf der Abscheidung eines gewissen Factors u aus dem particulären Integrale beruht. Da indess diese Abscheidung erst nach gewissen Anzeichen unternommen wird, die nur in einigen Coefficienten, gewöhnlich in den ersten und nicht in den folgenden ersichtlich sind, so richten sich auch die Rechnungen in ihrem ganzen Verlaufe nach eben diesen Anzeichen und die Coefficienten kommen in denselben der Behandlung nach, die sie erfahren, in zwei Gruppen vor. Eine gewisse Anzahl von Anfangscoefficienten nämlich bildet die erste, der Rest derselben die zweite Gruppe. Wenn z. B. aus einem particulären Integrale ein vorhandener Divisor $(x-\alpha)^k$ durch einen angehängten Factor dieser Art wegzuheben ist, so ist es mindestens ein einziger Factor des ersten Coefficienten $\mathfrak{X}_n$, der zu einer solchen Transformation die Veranlassung gibt; es können aber auch nicht weniger als r, $r-1$, $r-2$, ... 2, 1, 0 Factoren $x-\alpha$ der Anfangscoefficienten: $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{X}_{n-1}$, $\mathfrak{X}_{n-2}$, ... $\mathfrak{X}_{n-r}$ darauf hinweisen. Hier zerfallen also die Coefficienten in zwei Abtheilungen: die erste ist:

$$(252) \qquad \mathfrak{X}_n = \underset{n}{\mathfrak{X}} (x-\alpha)^r, \quad \mathfrak{X}_{n-1} = \underset{n-1}{\mathfrak{X}} (x-\alpha)^{r-1}, \quad \mathfrak{X}_{n-2} = \underset{n-2}{\mathfrak{X}} (x-\alpha)^{r-2}, \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{X}_{n-r} = \underset{n-r}{\mathfrak{X}}$$

die zweite hingegen besteht aus den späteren Coefficienten: $\mathfrak{X}_{n-r-1}$, $\mathfrak{X}_{n-r-2}$, ... $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_0$, die den Factor $x-\alpha$ entweder gar nicht besitzen oder in Bezug auf die Ergebnisse der Rechnung unwesentlich ist. Die Differentialgleichung selbst muss man sich also, wenn man den analytischen Bedürfnissen Rücksicht tragen will, denken in folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^r \underset{n}{\mathfrak{X}} y^{(n)} + (x-\alpha)^{r-1} \underset{n-1}{\mathfrak{X}} y^{(n-1)} + (x-\alpha)^{r-2} \underset{n-2}{\mathfrak{X}} y^{(n-2)} + \ldots + (x-\alpha) \underset{n-r+1}{\mathfrak{X}} y^{(n-r+1)} + \underset{n-r}{\mathfrak{X}} y^{(n-r)} + \\ + \mathfrak{X}_{n-r-1}\, y^{(n-r-1)} + \mathfrak{X}_{n-r-2}\, y^{(n-r-2)} + \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_2\, y'' + \mathfrak{X}_1\, y' + \mathfrak{X}_0\, y = 0.\end{aligned} \tag{253}$$

und will man von den bequemen analytisch-combinatorischen Symbolen hier Gebrauch machen, so lässt sich der erste Theil dieser Gleichung nicht mehr eingliedrig, wohl aber zweigliedrig darstellen, wie folgt:

$$\underset{\alpha+\omega=r}{\mathbf{S}} \left[(x-\alpha)^\alpha \underset{n-r+\alpha}{\mathfrak{X}} y^{(n-r+\alpha)}\right] + \underset{\alpha+\omega=n-r-1}{\mathbf{S}} \left[\mathfrak{X}_\alpha\, y^{(\alpha)}\right] = 0 \tag{254}$$

und in dieser Gleichung hat man jetzt die Substitution: $y=uz$ durchzuführen. Sie gelingt ebenso, wie bei der früheren und gibt, weil:

$$y^{(n-r+\alpha)} = \underset{\lambda+\mu=n-r+\alpha}{\mathbf{S}} \left[\frac{(n-r+\alpha)!}{\lambda!\,\mu!}\, u^{(\lambda)}\, z^{(\mu)}\right], \quad y^{(\alpha)} = \underset{\lambda+\mu=\alpha}{\mathbf{S}} \left[\frac{\alpha!}{\lambda!\,\mu!}\, u^{(\lambda)}\, z^{(\mu)}\right] \tag{255}$$

ist, folgendes Substitutionsresultat:

$$\underset{\substack{\lambda+\mu=n-r+\alpha \\ \alpha+\omega=r}}{\mathbf{S}} \left[\frac{(n-r+\alpha)!}{\lambda!\,\mu!} (x-\alpha)^\alpha \underset{n-r+\alpha}{\mathfrak{X}} u^{(\lambda)}\, z^{(\mu)}\right] + \underset{\substack{\lambda+\mu=\alpha \\ \alpha+\omega=n-r-1,}}{\mathbf{S}} \left[\frac{\alpha!}{\lambda!\,\mu!} \mathfrak{X}_\alpha\, u^{(\lambda)}\, z^{(\mu)}\right] \tag{256}$$

in welchem sich wieder die zwei angehängten Bedingungsgleichungen der zweiten Summe durch Substitution des Werthes von α in die zweite sowohl, als auch in die Differentialgleichung, zusammenziehen lassen in eine einzige, wonach das Resultat folgendermassen aussieht:

$$\underset{\substack{\lambda+\mu+\omega=n \\ \alpha+\omega=r.}}{\mathbf{S}} \left[\frac{(\lambda+\mu)!}{\lambda!\,\mu!} (x-\alpha)^{r-\omega} \underset{\lambda+\mu}{\mathfrak{X}} u^{(\lambda)}\, z^{(\mu)}\right] + \underset{\lambda+\mu+\omega=n-r-1}{\mathbf{S}} \left[\frac{(\lambda+\mu)!}{\lambda!\,\mu!} \mathfrak{X}_{\lambda+\mu}\, u^{(\lambda)}\, z^{(\mu)}\right] = 0 \tag{257}$$

In der ersten Summe kann man die zweite Bedingungsgleichung nicht auslassen, denn sie besagt, dass α aller ganzen und positiven Werthe von 0 bis r fähig sei, negative hingegen von $\alpha=r-\omega$ unzulässig seien. Liesse man sie aus, so würde man die Bedeutung der Summe auch auf negative Werthe dieses Exponenten ausdehnen, die in der Gleichung nicht vorhanden sind.

Den Vorschriften der Formenlehre entnimmt man nun den passenden Werth des Factors u, der auszusondern ist aus einem particulären Integrale. Er trägt die Gestalt:

$$u = (x - \alpha)^{-k}. \tag{258}$$

und gibt λ-mal differenzirt:

$$u^{(\lambda)} = (-1)^{\lambda}\, k\,(k+1)\,(k+2) \,\ldots\ldots\ldots\, (k+\lambda-1)\,(x-\alpha)^{-k-\lambda}, \tag{259}$$

oder auch:

$$u^{(\lambda)} = (-1)^{\lambda}\, \frac{(k+\lambda-1)!}{(k-1)!}\,(x-\alpha)^{-k-\lambda}. \tag{260}$$

Substituirt man ihn in die obige Differentialgleichung und lässt den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor $(x-\alpha)^{-k}$ aus, so erhält man zunächst:

$$\underset{\substack{\lambda+\mu+\omega=n\\ \alpha+\omega=r}}{\mathrm{S}}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+\mu)!}{(k-1)!\lambda!\mu!}(x-\alpha)^{r-\omega-\lambda}\,\mathfrak{X}_{\lambda+\mu}\,z^{(\mu)}\right]+\underset{\lambda+\mu+\omega=n-r-1}{\mathrm{S}}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+\mu)!}{(k-1)!\lambda!\mu!}(x-\alpha)^{-\lambda}\mathfrak{X}_{\lambda+\mu}\,z^{(\mu)}\right]=0, \tag{261}$$

und multiplizirt man üderdiess, um die negativen Exponenten von $x-\alpha$ wegzuschaffen, mit $(x-\alpha)^{n-r}$ so wird:

$$\underset{\substack{\lambda+\mu+\omega=n\\ \alpha+\omega=r.}}{\mathrm{S}}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+\mu)!}{(k-1)!\lambda!\mu!}(x-\alpha)^{\mu}\,\mathfrak{X}_{\lambda+\mu}\,z^{(\mu)}\right]+\underset{\lambda+\mu+\omega=n-r-1}{\mathrm{S}}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+\mu)!}{(k-1)!\lambda!\mu!}(x-\alpha)^{\mu+\omega+1}\mathfrak{X}_{\lambda+\mu}\,z^{(\mu)}\right]=0 \tag{262}$$

und diese ist die zum Transformationsgeschäfte überhaupt und insbesondere zur Ermittlung der Werthe von k und darangeknüpften Entwicklung des Integrales in Reihen gecignete Gleichung. Ordnen wir ihr Polynom nach Potenzen von $x-\alpha$ und thun wir diess zwar abgesondert mit einer jeden der beiden Summen, aus denen das Polynom zusammengesetzt ist, was in der ersten von ihnen dadurch bewerkstelligt wird, dass beziehungsweise:

$$\begin{array}{rcccccc} \mu = n, & n-1, & n-2, & \ldots\ldots\ldots & 2, & 1, & 0 \\ \lambda+\omega = 0, & 1, & 2, & \ldots\ldots\ldots & n-2, & n-1, & n \end{array}$$

gesetzt wird, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned} &\underset{\substack{\lambda+\mu+\omega=n\\ \alpha+\omega=r}}{\mathrm{S}}\left[(-1)^{\lambda}\,\frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+\mu)!}{(k-1)!\,\lambda!\,\mu!}\,(x-\alpha)^{\mu}\,\mathfrak{X}_{\lambda+\mu}\,z^{(\mu)}\right] = \\ &= z^{(n)}\,(x-\alpha)^{n}\,.\,\underset{\substack{\lambda+\omega=0\\ \alpha+\omega=r}}{\mathrm{S}}\left[(-1)^{\lambda}\,\frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+n)!}{(k-1)!\,\lambda!\,n!}\,\mathfrak{X}_{\lambda+n}\right]+ \end{aligned} \tag{263}$$

$$+ z^{(n-1)} (x-\alpha)^{n-1} \,.\, \mathrm{S}\left[(-1)^{\lambda} \frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+n-1)!}{(k-1)!\,\lambda!\,(n-1)!}\, \mathfrak{X}_{\lambda+n-1}\right] +$$
$$\lambda+\omega=1$$
$$\alpha+\omega=r$$

....

$$+ z' \quad (x-\alpha) \,.\, \mathrm{S}\left[(-1)^{\lambda} \frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+1)!}{(k-1)!\,\lambda!\,1!}\, \mathfrak{X}_{\lambda+1}\right] +$$
$$\lambda+\omega=n-1$$
$$\alpha+\omega=r$$

$$+ z \quad . \quad \mathrm{S}\left[(-1)^{\lambda} \frac{(k+\lambda-1)!}{(k-1)!}\, \mathfrak{X}_{\lambda}\right]$$
$$\lambda+\omega=n$$
$$\alpha+\omega=r$$

Auf dieselbe Weise zerlegen wir auch die zweite der in (262) vorkommenden Summen in ihre Bestandtheile, indem wir der Reihe nach anstatt μ und $\lambda+\omega$ die folgenden Werthe substituiren:

$$\mu = n-r-1,\; n-r-2,\; \ldots\ldots\ldots\; 2,\; 1,\; 0$$
$$\lambda+\omega = 0,\; 1,\; \ldots\ldots\ldots\; n-r-3,\; n-r-2,\; n-r-1.$$

Es führt diess zu:

$$\mathrm{S}\left[(-1)^{\lambda} \frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+\mu)!}{(k-1)!\,\lambda!\,\mu!} (x-\alpha)^{\mu+\omega+1}\, \mathfrak{X}_{\lambda+\mu}\, z^{(\mu)}\right] =$$
$$\lambda+\mu+\omega=n-r-1$$

$$= z^{(n-r-1)} \,.\, (x-\alpha)^{n-r}\; \mathrm{S}\left[(-1)^{\lambda} \frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+n-r-1)!}{(k-1)!\,\lambda!\,(n-r-1)!} (x-\alpha)^{\omega}\, \mathfrak{X}_{\lambda+n-r-1}\right] +$$
$$\lambda+\omega=0$$

$$+ z^{(n-r-2)} \,.\, (x-\alpha)^{n-r-1}\; \mathrm{S}\left[(-1)^{\lambda} \frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+n-r-2)!}{(k-1)!\,\lambda!\,(n-r-2)!} (x-\alpha)^{\omega}\, \mathfrak{X}_{\lambda+n-r-2}\right] + \quad (264)$$
$$\lambda+\omega=1$$

....

$$+ z' \quad .\, (x-\alpha)^{2}\; \mathrm{S}\left[(-1)^{\lambda} \frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+1)!}{(k-1)!\,\lambda!\,1!} (x-\alpha)^{\omega}\, \mathfrak{X}_{\lambda+1}\right] +$$
$$\lambda+\omega=n-r-2$$

$$+ z \quad .\, (x-\alpha)\; \mathrm{S}\left[(-1)^{\lambda} \frac{(k+\lambda-1)!}{(k-1)!} (x-\alpha)^{\omega}\, \mathfrak{X}_{\lambda}\right]$$
$$\lambda+\omega=n-r-1.$$

Addirt man nun die beiden Gleichungen, um die Transformirte in z zu erhalten, so gewahrt man augenscheinlich in den Coefficienten dieser letzteren, so lange k unbestimmt gelassen wird, Factoren $x-\alpha$ beziehlich: $n, n-1, n-2, \ldots 2, 1, 0$ was auch ganz richtig ist, weil durch Abscheiden eines Factors, wie der (258) ist, so lange k unbestimmt bleibt, alle particulären Integrale in den Ausnahmszustand des Unstetigwerdens für $x=\alpha$ gerathen können. Will man aber durch schickliche Wahl von k eines der für $x=\alpha$ unstetigen particulären Integrale diesem Zustande entreissen, so hat man lediglich k dermassen zu bestimmen, dass die transformirte Differentialgleichung in z durch $x-\alpha$ theilbar wird. Es zieht diess in den Coefficienten an solchen Factoren beziehlich:

$$n-1, \quad n-2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1, \quad 0, \quad 0$$

nach sich, eine Anordnung, die auf ein einziges für $x=\alpha$ stetig bleibende particuläre Integral hinweist. Nun ist von den zwei in Summenform erscheinenden Bestandtheilen des Gleichungspolynomes in z der zweite augenscheinlich durch $x-\alpha$ theilbar; der erste aber wird es dann, wenn sein letztes Glied, d. h. die Summe:

$$\text{(265)} \qquad \mathrm{S}\left[(-1)^{\lambda} \frac{(k+\lambda-1)!}{(k-1)!} \mathfrak{X}_{\lambda}\right] \quad \begin{array}{l} \lambda+\omega=n \\ \alpha+\omega=r, \end{array}$$

für $x=\alpha$ verschwindet. Bezeichnet man daher diejenigen constanten Werthe, welche die Coefficienten:

$$\mathfrak{X}_{n}, \quad \mathfrak{X}_{n-1}, \quad \mathfrak{X}_{n-2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{X}_{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{X}_{n-r}$$

für $x=\alpha$ annehmen, beziehlich mit:

$$\mathrm{X}_{n}, \quad \mathrm{X}_{n-1}, \quad \mathrm{X}_{n-2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{X}_{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{X}_{n-r}$$

so ist offenbar das geforderte Verschwinden der letzten Summe erzielt für solche k, die die algebraische Gleichung:

$$\text{(266)} \qquad \mathrm{S}\left[(-1)^{\lambda} \frac{(k+\lambda-1)!}{(k-1)!} \mathrm{X}_{\lambda}\right]=0 \quad \begin{array}{l} \lambda+\omega=n \\ \alpha+\omega=r \end{array}$$

erfüllen. Schreibt man sie in entwickelter Gestalt, nicht vergessend, dass das allenthalben vorkommende Symbol:

$$(-1)^{\lambda} \frac{(k+\lambda-1)!}{(k-1)!}$$

kraft der Annahme, die in die Gleichung (260) niedergelegt ist, nur eine abgekürzte Schreibweise sei für die Factorenfolge:

$$(-1)^{\lambda}\, k\,(k+1)\,(k+2) \ldots\ldots\ldots (k+\lambda-1)$$

in (259), welche zu gelten hat für beliebige k, so gelangt man zu:

$$\begin{aligned} 0 = (-1)^n \,.\, k\,(k+1)\,(k+2) \,\ldots\ldots\ldots\, (k+n-r-1) \times \\ \times \left[\begin{array}{l} (k+n-r)(k+n-r+1)\ldots(k+n-1)\,\underset{n}{\mathrm{X}} - (k+n-r)(k+n-r+1)\ldots(k+n-2)\underset{n-1}{\mathrm{X}} + \\ + (k+n-r)(k+n-r+1)\ldots(k+n-3)\underset{n-2}{\mathrm{X}} - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^r \underset{n-r}{\mathrm{X}} \end{array}\right] \end{aligned} \tag{267}$$

einer bereits aus der Formenlehre wohlbekannten und auch später in §. 1 der Transformationslehre ihrer Bedeutung nach besprochenen Gleichung. Um nun für ein solches k, welches ihr Genüge leistet, die bereits durch $x-\alpha$ getheilte transformirte Gleichung in z bequemer aufstellen zu können, machen wir noch die nachfolgenden Substitutionen, diese jedoch nur in dem letzten Gliede der einen Summe (263):

$$\begin{aligned} \underset{n}{\mathfrak{X}} &= \underset{n}{\mathrm{X}} + (x-\alpha)\,.\,\overset{n}{\mathfrak{X}} \\ \underset{n-1}{\mathfrak{X}} &= \underset{n-1}{\mathrm{X}} + (x-\alpha)\,.\,\overset{n-1}{\mathfrak{X}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underset{n-r}{\mathfrak{X}} &= \underset{n-r}{\mathrm{X}} + (x-\alpha)\,.\,\overset{n-r}{\mathfrak{X}} \end{aligned} \tag{268}$$

wornach diese Transformirte in z folgendermassen aussieht:

$$\begin{aligned} 0 = \; & z^{(n)}\,.\,(x-\alpha)^{n-1}\,.\underset{\substack{\lambda+\omega=0 \\ \alpha+\omega=r}}{\mathrm{S}}\left[(-1)^\lambda \frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+n)!}{(k-1)!\,\lambda!\,n!}\,\underset{\lambda+n}{\mathfrak{X}}\right] + \\ & + z^{(n-1)}\,.\,(x-\alpha)^{n-2}\,.\underset{\substack{\lambda+\omega=1 \\ \alpha+\omega=r}}{\mathrm{S}}\left[(-1)^\lambda \frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+n-1)!}{(k-1)!\,\lambda!\,(n-1)!}\,\underset{\lambda+n-1}{\mathfrak{X}}\right] + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + z^{(n-r)}\,.\,(x-\alpha)^{n-r-1}\,.\underset{\substack{\lambda+\omega=r \\ \alpha+\omega=r}}{\mathrm{S}}\left[(-1)^\lambda \frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+n-r)!}{(k-1)!\,\lambda!\,(n-r)!}\,\underset{\lambda+n-r}{\mathfrak{X}}\right] + \\ & + z^{(n-r-1)}\,.\,(x-\alpha)^{n-r-2}\,.\left[\begin{array}{l} \underset{\substack{\lambda+\omega=r+1 \\ \alpha+\omega=r}}{\mathrm{S}}\left[(-1)^\lambda \frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+n-r-1)!}{(k-1)!\,\lambda!\,(n-r-1)!}\,\underset{\lambda+n-r-1}{\mathfrak{X}}\right] + \\ + \underset{\lambda+\omega=0}{\mathrm{S}}\left[(-1)^\lambda \frac{(k+\lambda-1)!\,(\lambda+n-r-1)!}{(k-1)!\,\lambda!\,(n-r-1)!}\,(x-\alpha)^{\omega+1}\,\mathfrak{X}_{\lambda+n-r-1}\right] \end{array}\right] \end{aligned} \tag{269}$$

$$+ z^{(n-r-2)}.(x-\alpha)^{n-r-2}.\left[\begin{array}{c} \underset{\substack{\lambda+\omega=r+2\\ \alpha+\omega=r}}{S}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+n-r-2)!}{(k-1)!\lambda!(n-r-2)!}\overset{\omega}{\mathfrak{X}}_{\lambda+n-r-2}\right]+ \\ +\underset{\lambda+\omega=1}{S}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+n-r-2)!}{(k-1)!\lambda!(n-r-2)!}(x-\alpha)^{\omega+1}\mathfrak{X}_{\lambda+n-r-2}\right]\end{array}\right]$$

....

$$+ z'.\left\{\underset{\substack{\lambda+\omega=n-1\\ \alpha+\omega=r}}{S}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+1)!}{(k-1)!\lambda!1!}\overset{\omega}{\mathfrak{X}}_{\lambda+1}\right]+\underset{\lambda+\omega=n-r-2}{S}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+1)!}{(k-1)!\lambda!}(x-\alpha)^{\omega+1}\mathfrak{X}_{\lambda+1}\right]\right\}$$

$$+ z.\left\{\underset{\substack{\lambda+\omega=n\\ \alpha+\omega=r}}{S}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!}{(k-1)!}\overset{\lambda}{\mathfrak{X}}\right]+\underset{\lambda+\omega=n-r-1}{S}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!}{(k-1)!}(x-\alpha)^{\omega}\mathfrak{X}_{\lambda}\right]\right\}$$

Wünschte man sie nicht nach Differentialquotienten von z, sondern auf irgend eine andere Weise geordnet zu haben, oder überhaupt in der kürzesten combinatorischen Gestalt, so könnte man die Summen, die das Gleichungspolynom enthält, zusammenziehen in drei verschiedene. Von ihnen gehen zwei aus der Summe (263) hervor dadurch, dass man ihren letzten mit dem Factor z verbundenen Bestandtheil abgesondert hinstellt und Alles durch $x-\alpha$ dividirt. Diese zwei Bestandtheile sind:

$$\frac{1}{x-\alpha}.\underset{\substack{\lambda+\mu+\omega=n\\ \alpha+\omega=r}}{S}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+\mu)!}{(k-1)!\lambda!\mu!}(x-\alpha)^{\mu}\overset{\omega}{\mathfrak{X}}_{\lambda+\mu}z^{(\mu)}\right]=$$

(270)
$$=\underset{\substack{\lambda+\mu+\omega=n-1\\ \alpha+\omega=r}}{S}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+\mu+1)!}{(k-1)!\lambda!(\mu+1)!}(x-\alpha)^{\mu}\overset{\omega}{\mathfrak{X}}_{\lambda+\mu+1}z^{(\mu+1)}\right]+$$

$$+z.\underset{\substack{\lambda+\omega=n\\ \alpha+\omega=r.}}{S}\left[(-1)^{\lambda}\frac{(k+\lambda-1)!}{(k-1)!}\overset{\lambda}{\mathfrak{X}}\right]$$

Die dritte aber ist die (264) selbst, nur durch $x-\alpha$ getheilt und die solchergestalt zusammengezogene Differentialgleichung trägt jetzt die folgende Gestalt:

$$z^{(n-r-3)}.(x-\alpha)^{n-r-3}.\left[\begin{array}{l} \mathbf{S}\left[(-1)^\lambda \dfrac{(k+\lambda-1)!(\lambda+n-r-2)!}{(k-1)!\lambda!(n-r-2)!}\, \mathfrak{X}_{\lambda+n-r-2}\right] + \\ \qquad\qquad \lambda+\omega=r+2 \\ \qquad\qquad \alpha+\omega=r \\ +\,\mathbf{S}\left[(-1)^\lambda \dfrac{(k+\lambda-1)!(\lambda+n-r-2)!}{(k-1)!\lambda!(n-r-2)!}(x-\alpha)^{\omega+1}\mathfrak{X}_{\lambda+n-r-3}\right] \\ \qquad\qquad \lambda+\omega=1 \end{array}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \mathbf{S}\left[(-1)^\lambda \frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+1)!}{(k-1)!\lambda!}(x-\alpha)^{\omega+1}\mathfrak{X}_{\lambda+1}\right]$$
$$\lambda+\omega=n-r-2$$

$$+\,z'.\left\{\mathbf{S}\left[(-1)^\lambda \frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+1)!}{(k-1)!\lambda!1!}\,\mathfrak{X}_{\lambda+1}\right] + \mathbf{S}\left[(-1)^\lambda \frac{(k+\lambda-1)!}{(k-1)!}(x-\alpha)^{\omega}\mathfrak{X}_{\lambda}\right]\right\}$$
$$\lambda+\omega=n-1 \qquad\qquad \lambda+\omega=n-r-1$$
$$\alpha+\omega=r$$

$$+\,z.\left\{\mathbf{S}\left[(-1)^\lambda \frac{(k+\lambda-1)!}{(k-1)!}\,\overset{\lambda}{\mathfrak{X}}\right] + \ldots\right.$$
$$\lambda+\omega=n$$
$$\alpha+\omega=r$$

Wünschte man sie nicht nach Differentialquotienten von z, sondern auf irgend ei[n]
Weise geordnet zu haben, oder überhaupt in der kürzesten combinatorischen Gestalt, so k[...]
die Summen, die das Gleichungspolynom enthält, zusammenziehen in drei verschiedene.
gehen zwei aus der Summe (263) hervor dadurch, dass man ihren letzten mit dem Fact[or]
denen Bestandtheil abgesondert hinstellt und Alles durch $x-\alpha$ dividirt. Diese zwei Besta[ndtheile ...]

$$\frac{1}{x-\alpha}.\mathbf{S}\left[(-1)^\lambda \frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+\mu)!}{(k-1)!\lambda!\mu!}(x-\alpha)^{\mu}\mathfrak{X}_{\lambda+\mu}\, z^{(\alpha)}\right] =$$
$$\lambda+\mu+\omega=n$$
$$\alpha+\omega=r$$

$$(270)\qquad = \mathbf{S}\left[(-1)^\lambda \frac{(k+\lambda-1)!(\lambda+\mu+1)!}{(k-1)!\lambda!(\mu+1)!}(x-\alpha)^{\mu}\mathfrak{X}_{\lambda+\mu+1}\, z^{(\alpha)}\ldots\right.$$
$$\lambda+\mu+\omega=n-1$$
$$\alpha+\omega=r$$

$$+\,z.\mathbf{S}\left[(-1)^\lambda \frac{(k+\lambda-1)!}{(k-1)!}\,\overset{\lambda}{\mathfrak{X}}\right]$$
$$\lambda+\omega=n$$
$$\alpha+\omega=r.$$

Die dritte aber ist die (264) selbst, nur durch $x-\alpha$ getheilt und die
zogene Differentialgleichung trägt jetzt die folgende Gestalt:

Wir beginnen also wieder mit der vorbereitenden Substitution: $y = uz$ in die (254), gelangen so zuvörderst zur (257), lassen aber darauf die von (258) durch den logarithmischen Factor sich unterscheidende Substitution:

$$u = (x-\alpha)^h \log^s (x-\alpha) \tag{274}$$

folgen. Es fällt in die Augen, dass es hiebei auf den λ^{ten} Differentialquotienten $u^{(\lambda)}$ ankomme. Um diesen in combinatorischer Form zu erhalten, sehen wir u an als Produkt aus zwei Factoren:

$$P = (x-\alpha)^h, \qquad Q = \log^s (x-\alpha) \tag{275}$$

so ergibt sich uns zunächst kraft der Gleichung (224) des §. 7:

$$u^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}[PQ] = \mathbf{S}\left[\frac{\lambda!}{\nu!\,\omega!}P^{(\nu)}Q^{(\omega)}\right] \qquad \nu + \omega = \lambda. \tag{276}$$

Ferner ist:

$$P^{(\nu)} = \frac{d^\nu P}{dx^\nu} = \frac{h!}{(h-\nu)!}(x-\alpha)^{h-\nu}. \tag{277}$$

Es erübrigt daher zur vollständigen Bildung des Werthes $u^{(\lambda)}$ nur noch einen combinatorischen Ausdruck für $Q^{(\omega)}$ aufzufinden. Zu diesem Zwecke betrachten wir Q als die ρ^{te} Potenz der Function $\log(x-\alpha)$ und setzen demgemäss die Formel (232) des §. 7 in Anwendung:

$$P = \log(x-\alpha), \qquad r = s, \qquad n = \omega$$

in dieselbe einführend. Da gegenwärtig:

$$\frac{P'}{1!} = \frac{1}{x-\alpha}, \qquad \frac{P''}{2!} = \frac{-1}{2(x-\alpha)^2}, \qquad \frac{P'''}{3!} = \frac{1}{3(x-\alpha)^3}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist, so ergibt sich alsbald:

$$Q^{(\omega)} = \frac{d^\omega}{dx^\omega}[\log^s(x-\alpha)] = \mathbf{S}\left[\frac{s!\,\omega!\,(-1)^{\delta+\varkappa+\cdots\cdots}}{\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!\,\varkappa!\ldots 1^\gamma.2^\delta.3^\varepsilon.4^\varkappa\ldots}\log^\beta(x-\alpha).(x-\alpha)^{-\omega}\right]$$
$$\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\varkappa+\ldots\ldots\ldots\ldots = s \tag{278}$$
$$\gamma+2\delta+3\varepsilon+4\varkappa+\ldots\ldots\ldots\ldots = \omega.$$

Diese Werthe von $P^{(\nu)}$ und $Q^{(\omega)}$ in die Gleichung (276) substituirt, geben nun:

$$u^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left[(x-\alpha)^h \log^s(x-\alpha)\right] =$$
$$= \mathbf{S}\left[\frac{\lambda!\,h!\,s!\,(-1)^{\delta+\varkappa+\cdots\cdots}}{\nu!\,(h-\nu)!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!\,\varkappa!\ldots\ldots 1^\gamma.2^\delta.3^\varepsilon.4^\varkappa\ldots\ldots}(x-\alpha)^{h-\lambda}\log^\beta(x-\alpha)\right]$$
$$\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\varkappa+\ldots\ldots\ldots\ldots = s \tag{279}$$
$$\gamma+2\delta+3\varepsilon+4\varkappa+\ldots\ldots\ldots\ldots = \omega$$
$$\nu+\omega = \lambda.$$

Eine der beiden Bedingungsgleichungen kann man entrathen, indem man ω vermittelst der dritten derselben aus der zweiten sowohl, wie aus der Summenformel eliminirt. Thut man diess und setzt dann den gewonnenen Werth von $u^{(\lambda)}$ in die Differentialgleichung (257), so gewinnt man die folgende Transformirte in z:

$$\mathbf{S}\left[\frac{(-1)^{\delta+\varkappa+\cdots\cdots}\, h!\, s!\, (n-\omega)!}{\mu!\,\nu!\,(h-\nu)!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!\,\varkappa!\,\ldots\ldots\,1^{\gamma}.2^{\delta}.3^{\varepsilon}.4^{\varkappa}\ldots\ldots}\,\mathfrak{X}_{n-\omega}\,(x-\alpha)^{h+r-n+\rho}\, log^{s}\,(x-\alpha).z^{(\rho)}\right]+$$
$$\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\varkappa+\ldots\ldots\ldots\ldots=s$$
$$\nu+\gamma+2\delta+3\varepsilon+4\varkappa+\ldots\ldots\ldots\ldots=\lambda$$
$$\lambda+\mu+\omega=n$$
$$\alpha+\omega=r \qquad (280)$$

$$+\,\mathbf{S}\left[\frac{(-1)^{\delta+\varkappa+\cdots\cdots}\, h!\, s!\, (\lambda+\mu)!}{\mu!\,\nu!\,(h-\nu)!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!\,\varkappa!\,\ldots\ldots\,1^{\gamma}.2^{\delta}.3^{\varepsilon}.4^{\varkappa}\ldots\ldots}\,\mathfrak{X}_{\lambda+\rho}\,(x-\alpha)^{h-}\, log^{s}\,(x-\alpha).z^{(\rho)}\right]=0$$
$$\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\varkappa+\ldots\ldots\ldots\ldots=s$$
$$\nu+\gamma+2\delta+3\varepsilon+4\varkappa+\ldots\ldots\ldots\ldots=\lambda$$
$$\lambda+\mu+\omega=n-r-1.$$

Die dritte der Bedingungsgleichungen könnte man hier als überflüssig weglassen, sie zur zweiten addirend und zugleich λ aus der letzten Summenformel eliminirend. Das dadurch erhaltene combinatorische Resultat ist folgendes:

$$\mathbf{S}\left[\frac{(-1)^{\delta+\varkappa+\cdots\cdots}\, h!\, s!\, (n-\omega)!}{\mu!\,\nu!\,(h-\nu)!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!\,\varkappa!\,\ldots\ldots\,1^{\gamma}.2^{\delta}.3^{\varepsilon}.4^{\varkappa}\ldots\ldots}\,\mathfrak{X}_{n-\omega}\,(x-\alpha)^{h+r-n+\rho}\, log^{s}\,(x-\alpha)\,.\,z^{(\rho)}\right]+$$
$$\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\varkappa+\ldots\ldots\ldots\ldots=s$$
$$\mu+\omega+\nu+\gamma+2\delta+3\varepsilon+4\varkappa+\ldots\ldots\ldots\ldots=n$$
$$\alpha+\omega=r \qquad (281)$$

$$+\,\mathbf{S}\left[\frac{(-1)^{\delta+\varkappa+\cdots\cdots}\, h!\, s!\, (n-r-\omega-1)!}{\mu!\,\nu!\,(h-\nu)!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!\,\varkappa!\ldots1^{\gamma}.2^{\delta}.3^{\varepsilon}.4^{\varkappa}\ldots}\,\mathfrak{X}_{n-r-\omega-1}\,(x-\alpha)^{h-n+r-\rho-\omega+1} log^{s}(x-\alpha).z^{(\rho)}\right]=0$$
$$\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\varkappa+\ldots\ldots\ldots\ldots=s$$
$$\mu+\omega+\nu+\gamma+2\delta+3\varepsilon+4\varkappa+\ldots\ldots\ldots\ldots=n-r-1.$$

Weil das Resultat der allgemeinen Substitution (274) in die Differentialgleichung sich auf Null reduziren muss, so zwar, dass die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $log\,(x-\alpha)$ je für sich der Nulle gleich werden, so ist es erspriesslich, die gewonnenen Formeln, die (279) sowohl als auch die (281) nach Potenzen dieser Grösse $log\,(x-\alpha)$ geordnet hinzustellen. Thun wir diess zuerst mit den Ersteren, so haben wir β der Reihe nach zu verwandeln in:

$$s,\quad s-1,\quad s-2,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad 2,\quad 1,\quad 0.$$

Hiedurch zerlegt sich aber der Werth von $u^{(\lambda)}$ wie folgt in seine Bestandtheile höchstens $s+1$ an der Zahl:

$$u^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left[(x-\alpha)^h \log^s (x-\alpha)\right] =$$

(282) $$= (x-\alpha)^{h-\lambda}.\left[\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,0} \log^s (x-\alpha) + s.\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,1} \log^{s-1} (x-\alpha) + s(s-1)\,\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,2} \log^{s-2} (x-\alpha) + \right.$$
$$\left. + s(s-1)(s-2)\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,3} \log^{s-3}(x-\alpha) + \ldots\ldots + s(s-1)(s-2)\ldots\ldots 2.1\,\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,s}\right].$$

Hier bedeuten die mit dem Buchstaben $\mathfrak{A}$ bezeichneten Coefficienten die folgenden in Summenform erscheinenden Functionen von λ und h, die gar kein s mehr enthalten:

(283) $$\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,0} = \frac{h!}{(h-\lambda)!} = h\,(h-1)\,(h-2)\,\ldots\ldots\ldots\,(h-\lambda+1)$$

$$\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,1} = \mathsf{S}\left[\frac{h!\,\lambda!\,(-1)^{\delta+\kappa+\cdots\cdots}}{\nu!\,(h-\nu)!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!\,\kappa!\,\ldots\ldots\,1^\gamma.2^\delta.3^\varepsilon.4^\kappa\,\ldots\ldots}\right]$$
$$\gamma + \delta + \varepsilon + \kappa + \ldots\ldots\ldots\ldots = 1$$
$$\nu + \gamma + 2\delta + 3\varepsilon + 4\kappa + \ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda$$

$$\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,2} = \mathsf{S}\left[\frac{h!\,\lambda!\,(-1)^{\delta+\kappa+\cdots\cdots}}{\nu!\,(h-\nu)!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!\,\kappa!\,\ldots\ldots\,1^\gamma.2^\delta.3^\varepsilon.4^\kappa\,\ldots\ldots}\right]$$
$$\gamma + \delta + \varepsilon + \kappa + \ldots\ldots\ldots\ldots = 2$$
$$\nu + \gamma + 2\delta + 3\varepsilon + 4\kappa + \ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda$$

$$\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,3} = \mathsf{S}\left[\frac{h!\,\lambda!\,(-1)^{\delta+\kappa+\cdots\cdots}}{\nu!\,(h-\nu)!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!\,\kappa!\,\ldots\ldots\,1^\gamma.2^\delta.3^\varepsilon.4^\kappa\,\ldots\ldots}\right]$$
$$\gamma + \delta + \varepsilon + \kappa + \ldots\ldots\ldots\ldots = 3$$
$$\nu + \gamma + 2\delta + 3\varepsilon + 4\kappa + \ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda$$

....

$$\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,s} = \mathsf{S}\left[\frac{h!\,\lambda!\,(-1)^{\delta+\kappa+\cdots\cdots}}{\nu!\,(h-\nu)!\,\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!\,\kappa!\,\ldots\ldots\,1^\gamma.2^\delta.3^\varepsilon.4^\kappa\,\ldots\ldots}\right]$$
$$\gamma + \delta + \varepsilon + \kappa + \ldots\ldots\ldots\ldots = s$$
$$\nu + \gamma + 2\delta + 3\varepsilon + 4\kappa + \ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda$$

Diese Coefficienten stehen in sehr einfacher Abhängigkeit von einander, die aber aus ihrer hier angeführten Summengestalt nicht bequem ersichtlich ist. Um daher zu denjenigen Relationen zwischen ihnen zu gelangen, die uns in der Folge beim Rechnen mit diesen Grössen nützlich werden und zugleich vorkommenden Falles die numerische Werthbestimmung derselben erleichtern, differenziren wir die Gleichung (282) nach x und erhalten:

(284) $$u^{(\lambda+1)} = (x-\alpha)^{h-\lambda-1}.\left[\begin{array}{l} \log^s (x-\alpha).\ (h-\lambda)\,\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,0} + \\ + s\log^{s-1}(x-\alpha).\left[(h-\lambda)\,\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,1} + \mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,0}\right] + \\ + s(s-1)\log^{s-2}(x-\alpha).\left[(h-\lambda)\,\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,2} + \mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,1}\right] + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + s!\ \left[(h-\lambda)\,\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,s} + \mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,s-1}\right] \end{array}\right.$$

Wir können aber auch die (282) als allgemein für jedes ganze und positive λ giltige Formel auffassen und demgemäss in derselben λ überall, wo es erscheint, explicit sowohl, als auch in den Coefficienten durch $\lambda+1$ ersetzen. Hiedurch ergibt sich ein zweiter Werth für $u^{(\lambda+1)}$, nämlich:

$$u^{(\lambda+1)} = (x-\alpha)^{h-\lambda-1}.\Big[\mathfrak{A}^{(\lambda+1)}_{h,0} \log^s (x-\alpha) + s.\mathfrak{A}^{(\lambda+1)}_{h,1} \log^{s-1}(x-\alpha) + s(s-1)\mathfrak{A}^{(\lambda+1)}_{h,2} \log^{s-2}(x-\alpha) + \\ + s(s-1)(s-2)\mathfrak{A}^{(\lambda+1)}_{h,3} \log^{s-3}(x-\alpha) + \ldots + s(s-1)(s-2)\ldots 2.1\,\mathfrak{A}^{(\lambda+1)}_{h,s}\Big]. \tag{285}$$

Er muss dem Ersteren Glied für Glied identisch gleich sein. Man hat daher:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{(\lambda+1)}_{h,0} &= (h-\lambda)\, \mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,0} \\ \mathfrak{A}^{(\lambda+1)}_{h,1} &= (h-\lambda)\, \mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,1} + \mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,0} \\ \mathfrak{A}^{(\lambda+1)}_{h,2} &= (h-\lambda)\, \mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,2} + \mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{A}^{(\lambda+1)}_{h,s} &= (h-\lambda)\, \mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,s} + \mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,s-1} \end{aligned} \tag{286}$$

Von diesen Gleichungen würde die erste zur Bestimmung von $\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,0}$ dienen, wenn uns dieser Werth nicht bereits bekannt wäre; die zweite aber führt zu $\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,1}$ und zwar auf folgendem Wege: Man schreibt anstatt λ in derselben der Reihe nach: $\lambda-1$, $\lambda-2$, ... 2, 1 und erhält folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,1} &= (h-\lambda+1)\, \mathfrak{A}^{(\lambda-1)}_{h,1} + \mathfrak{A}^{(\lambda-1)}_{h,0} \\ \mathfrak{A}^{(\lambda-1)}_{h,1} &= (h-\lambda+2)\, \mathfrak{A}^{(\lambda-2)}_{h,1} + \mathfrak{A}^{(\lambda-2)}_{h,0} \\ \mathfrak{A}^{(\lambda-2)}_{h,1} &= (h-\lambda+3)\, \mathfrak{A}^{(\lambda-3)}_{h,1} + \mathfrak{A}^{(\lambda-3)}_{h,0} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{A}''_{h,1} &= (h-1)\quad \mathfrak{A}'_{h,1} + \mathfrak{A}'_{h,0} \\ \mathfrak{A}'_{h,1} &= h\quad \mathfrak{A}_{h,1} + \mathfrak{A}_{h,0}. \end{aligned} \tag{287}$$

Nun multiplizirt man diese Gleichungen der Reihe nach: die erste mit 1, die zweite mit $(h-\lambda+1)$, die dritte mit dem Producte aus zwei Factoren: $(h-\lambda+1)\,(h-\lambda+2)$ u. s. w. und die λ^{te} und letzte mit dem Producte aus Factoren $\lambda-1$ an der Zahl:

$$(h-\lambda+1)\,(h-\lambda+2)\,(h-\lambda+3)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(h-1)$$

und addirt sie dann, so bekommt man:

$$\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,1} = (h-\lambda+1)\,(h-\lambda+2)\,(h-\lambda+3)\ldots\ldots\ldots\,(h-1)\,\mathfrak{A}_{h,1} + \\ + \mathfrak{A}^{(\lambda-1)}_{h,0} + (h-\lambda+1)\,\mathfrak{A}^{(\lambda-2)}_{h,0} + (h-\lambda+1)\,(h-\lambda+2)\,\mathfrak{A}^{(\lambda-3)}_{h,0} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots + (h-\lambda+1)\,(h-\lambda+2)\,(h-\lambda+3)\ldots\ldots\,(h-1)\,\mathfrak{A}_{h,0} \tag{288}$$

Bemerkt man jetzt, dass $\mathfrak{A}_{h,1}$ als zweites Glied des 0ten Differentialquotienten des wohlbekannten logarithmischen Productes offenbar gleich Null ist, und die übrigen $\mathfrak{A}$ genannten Coefficienten durch die Formel (283) gegeben seien, so ergibt sich für $\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,1}$ ein Werth, der kurz so geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,1} = h\,(h-1)\,\ldots\ldots\ldots\,(h-\lambda+1)\left[\frac{1}{h} + \frac{1}{h-1} + \frac{1}{h-2} + \ldots\ldots + \frac{1}{h-\lambda+1}\right] \tag{289}$$

etwaige Mangel erst im Verlaufe der Rechnung kund wird, so hat man, wie sich im folgenden Abschnitte ergeben soll, nur eines der logarithmischen Glieder nach dem anderen einzuführen in die Rechnung, daher denn die eben gebrachte Fundamentalformel unseren Zwecken vollkommen entspricht.

§. 9.

Befreiung von einem Factor zweiter Classe, wie $e^{\int \varphi dx}$.

Die Differentialgleichungen mit algebraischen oder, um bestimmter zu sprechen, mit Coefficienten der ersten Classe können, wie wir wissen, particuläre Integrale der ersten und zweiten Functionsclasse besitzen. Man kann daher einen jeden Genüge leistenden Werth ansehen als ein Produkt zweier Functionen, deren erste der zweiten, die zweite der ersten Classe angehörig ist. Schon die Asymptoten dieser Factoren werden auf verschiedene Weise bestimmt, daher denn auch die Integrationsmethoden für diese zwei Sorten von Functionen andere sein müssen. Der Factor zweiter Classe, der einem particulären Integrale anhängt, kann immer in der Form $e^{\int \varphi dx}$ vorausgesetzt werden. Man befreit sohin von demselben durch die Substitution:

$$y = e^{\int \varphi dx} \,.\, z, \tag{298}$$

unter φ einen passend gewählten Functionswerth erster Classe verstanden. Wir haben diese Befreiung in §. 2 und §. 3 der Transformationslehre in einer gewissen Anzahl specieller Fälle durchgeführt und wollen gegenwärtig dasselbe für die allgemeine Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung leisten. Da nun aber die gegenwärtige Substitutionsgleichung in der (245) des vorigen Paragraphes, d. h. in der:

$$y = uz \tag{299}$$

enthalten ist als specieller Fall, der:

$$u = e^{\int \varphi dx} \tag{300}$$

nämlich, so wird auch das Resultat der Substitution (298) aus jenem (250) des vorigen Paragraphes zu haben sein, indem man u durch die erwähnte Exponentielle ersetzt. Man benöthigt zu diesem Zwecke des λ^{ten} Differentialquotienten von u, den die Formel (230) von §. 7 gibt:

$$u^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} e^{\int \varphi dx} = e^{\int \varphi dx} \,.\, \mathrm{S}\left[\frac{\lambda!}{\beta!\gamma!\delta!\ldots}\left(\frac{\varphi}{1!}\right)^\beta\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^\gamma\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^\delta\ldots\ldots\ldots\right] \tag{301}$$
$$\beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots = \lambda$$

Er liefert, eingeführt in die (250), nach Weglassung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Factors $e^{\int \varphi dx}$, der nicht Null sein kann:

$$0 = \mathrm{S}\left[\frac{(\lambda+\mu)!}{\mu!\beta!\gamma!\delta!\ldots\ldots}\mathfrak{X}_{\lambda+\mu}\, z^{(\mu)}\left(\frac{\varphi}{1!}\right)^\beta\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^\gamma\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^\delta\ldots\ldots\ldots\right] \tag{302}$$
$$\lambda + \mu + \omega = n$$
$$\beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots\ldots = \lambda$$

Da diese Transformationsweise bei den meisten Differentialgleichungen vorzunehmen ist, und da sie überdiess in den meisten Fällen auch ganz bis zur ausführlichen Darstellung der Transformirten durchgeführt werden muss, so dürfte es erspriesslich sein, sie an diesem Orte, wenigstens in Bezug auf Differentialgleichungen bis zur sechsten Ordnung etwa wirklich durchzunehmen und das Ergebniss hinzustellen in entwickelter Gestalt. Es folgen also hier die Differentialgleichungen mit annoch unbestimmt gelassenen Coefficienten von der zweiten bis zur sechsten Ordnung in unmittelbarer Begleitung ihrer durch die Substitution (298) Transformirten.

(306)
$$0 = z'' \mathfrak{X}_2 + z' \mathfrak{X}_1 + z\mathfrak{X}_0$$
$$0 = z'' . \mathfrak{X}_2 + z' \left[2\mathfrak{X}_2 \varphi + \mathfrak{X}_1\right] + z \left[\mathfrak{X}_2 \varphi^2 + \mathfrak{X}_1 \varphi + \mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_2 \varphi'\right]$$

(307)
$$0 = z''' . \mathfrak{X}_3 + z'' \mathfrak{X}_2 + z' \mathfrak{X}_1 + z\mathfrak{X}_0$$
$$0 = z''' . \mathfrak{X}_3 + z'' \left[3\mathfrak{X}_3 \varphi + \mathfrak{X}_2\right] + z' \left[3\mathfrak{X}_3 \varphi^2 + 2\mathfrak{X}_2 \varphi + \mathfrak{X}_1 + 3\mathfrak{X}_3 \varphi'\right] +$$
$$+ z . \left[\mathfrak{X}_3 \varphi^3 + \mathfrak{X}_2 \varphi^2 + \mathfrak{X}_1 \varphi + \mathfrak{X}_0 + (3\mathfrak{X}_3 \varphi + \mathfrak{X}_2) \varphi' + \mathfrak{X}_3 \varphi''\right]$$

(308)
$$0 = z^{IV} \mathfrak{X}_4 + z''' \mathfrak{X}_3 + z'' \mathfrak{X}_2 + z' \mathfrak{X}_1 + z\mathfrak{X}_0$$
$$0 = z^{IV} . \mathfrak{X}_4 + z''' \left[4\mathfrak{X}_4 \varphi + \mathfrak{X}_3\right] + z'' \left[6\mathfrak{X}_4 \varphi^2 + 3\mathfrak{X}_3 \varphi + \mathfrak{X}_2 + 6\mathfrak{X}_4 \varphi'\right] +$$
$$+ z' \left[4\mathfrak{X}_4 \varphi^3 + 3\mathfrak{X}_3 \varphi^2 + 2\mathfrak{X}_2 \varphi + \mathfrak{X}_1 + (12\mathfrak{X}_4 \varphi + 3\mathfrak{X}_3) \varphi' + 4\mathfrak{X}_4 \varphi''\right] +$$
$$+ z \left[\mathfrak{X}_4 \varphi^4 + \mathfrak{X}_3 \varphi^3 + \mathfrak{X}_2 \varphi^2 + \mathfrak{X}_1 \varphi + \mathfrak{X}_0 + (6\mathfrak{X}_4 \varphi^2 + 3\mathfrak{X}_3 \varphi + \mathfrak{X}_2) \varphi' +\right.$$
$$\left. + (4\mathfrak{X}_4 \varphi + 3\mathfrak{X}_3) \varphi'' + 3\mathfrak{X}_4 \varphi'^2 + \mathfrak{X}_4 \varphi'''\right]$$

(309)
$$0 = z^{V} \mathfrak{X}_5 + + z^{IV} \mathfrak{X}_4 + z''' \mathfrak{X}_3 + z'' \mathfrak{X}_2 + z' \mathfrak{X}_1 + z\mathfrak{X}_0$$
$$0 = z^{V} . \mathfrak{X}_5 + z^{IV} \left[5\mathfrak{X}_5 \varphi + \mathfrak{X}_4\right] + z''' \left[10\mathfrak{X}_5 \varphi^2 + 4\mathfrak{X}_4 \varphi + \mathfrak{X}_3 + 10\mathfrak{X}_5 \varphi'\right] +$$
$$+ z'' \left[10\mathfrak{X}_5 \varphi^3 + 6\mathfrak{X}_4 \varphi^2 + 3\mathfrak{X}_3 \varphi + \mathfrak{X}_2 + (30\mathfrak{X}_5 \varphi + 6\mathfrak{X}_4) \varphi'\right] +$$
$$+ z' \left[5\mathfrak{X}_5 \varphi^4 + 4\mathfrak{X}_4 \varphi^3 + 3\mathfrak{X}_3 \varphi^2 + 2\mathfrak{X}_2 \varphi + \mathfrak{X}_1 + (30\mathfrak{X}_5 \varphi^2 + 12\mathfrak{X}_4 \varphi + 3\mathfrak{X}_3) \varphi' +\right.$$
$$\left. + (20\mathfrak{X}_5 \varphi + 4\mathfrak{X}_4) \varphi'' + 15\mathfrak{X}_5 \varphi'^2 + 5\mathfrak{X}_5 \varphi'''\right] +$$
$$+ z \left[\mathfrak{X}_5 \varphi^5 + \mathfrak{X}_4 \varphi^4 + \mathfrak{X}_3 \varphi^3 + \mathfrak{X}_2 \varphi^2 + \mathfrak{X}_1 \varphi + \mathfrak{X}_0 +\right.$$
$$+ (10\mathfrak{X}_5 \varphi^3 + 6\mathfrak{X}_4 \varphi^2 + 3\mathfrak{X}_3 \varphi + \mathfrak{X}_2) \varphi' + (10\mathfrak{X}_5 \varphi^2 + 4\mathfrak{X}_4 \varphi + \mathfrak{X}_3) \varphi'' +$$
$$\left. + (15\mathfrak{X}_5 \varphi + 3\mathfrak{X}_4) \varphi'^2 + (5\mathfrak{X}_5 \varphi + \mathfrak{X}_4) \varphi''' + 10\mathfrak{X}_5 \varphi' \varphi'' + \mathfrak{X}_5 \varphi^{IV}\right]$$

(310)
$$0 = z^{VI} \mathfrak{X}_6 + z^{V} \mathfrak{X}_5 + z^{IV} \mathfrak{X}_4 + z''' \mathfrak{X}_3 + z'' \mathfrak{X}_2 + z' \mathfrak{X}_1 + z\mathfrak{X}_0$$
$$0 = z^{VI} . \mathfrak{X}_6 + z^{V} . \left[6\mathfrak{X}_6 \varphi + \mathfrak{X}_5\right] + z^{IV} . \left[15\mathfrak{X}_6 \varphi^2 + 5\mathfrak{X}_5 \varphi + \mathfrak{X}_4 + 15\mathfrak{X}_6 \varphi'\right] +$$
$$+ z''' . \left[20\mathfrak{X}_6 \varphi^3 + 10\mathfrak{X}_5 \varphi^2 + 4\mathfrak{X}_4 \varphi + \mathfrak{X}_3 + (60\mathfrak{X}_6 \varphi + 10\mathfrak{X}_5) \varphi' + 20\mathfrak{X}_6 \varphi''\right] +$$
$$+ z'' . \left[15\mathfrak{X}_6 \varphi^4 + 10\mathfrak{X}_5 \varphi^3 + 6\mathfrak{X}_4 \varphi^2 + 3\mathfrak{X}_3 \varphi + \mathfrak{X}_2 + (90\mathfrak{X}_6 \varphi^2 + 30\mathfrak{X}_5 \varphi + 10\mathfrak{X}_4) \varphi' +\right.$$
$$\left. + (60\mathfrak{X}_6 \varphi + 10\mathfrak{X}_5) \varphi'' + 45\mathfrak{X}_6 \varphi'^2 + 15\mathfrak{X}_6 \varphi'''\right] +$$

werden nämlich offenbar die Glieder ohne φ, die durch den Act des Differenzirens wegfallen, im Vorhinein schon ausgeschlossen. Man kann also die letzte Gleichung auch folgendermassen hinstellen:

$$\frac{1}{1!}\frac{d\mathfrak{X}}{d\varphi} = \mathbf{S}\left[\frac{\lambda!}{1!\beta!\gamma!\delta!\dots}\,\mathfrak{X}_\lambda \left(\frac{\varphi}{1!}\right)^\beta \left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^\gamma \left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^\delta \dots\dots\dots\right] \tag{313}$$
$$\omega + \beta + 2\gamma + 3\delta + \dots\dots\dots\dots = n - 1$$
$$(\beta + 2\gamma + 3\delta + \dots\dots\dots\dots = \lambda - 1)$$

Der Buchstabe λ steht hier nur der Kürze wegen, um nämlich das Schreiben seines polynomischen Werthes zu vermeiden. Wir können ihn, unbeschadet der Bedeutung der Summenformeln, auch verwandeln in $\lambda + 1$. Thun wir diess, so ergibt sich:

$$\frac{1}{1!}\frac{d\mathfrak{X}}{d\varphi} = \mathbf{S}\left[\frac{(\lambda+1)!}{1!\beta!\gamma!\delta!\dots}\,\mathfrak{X}_{\lambda+1} \left(\frac{\varphi}{1!}\right)^\beta \left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^\gamma \left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^\delta \dots\dots\dots\right] \tag{314}$$
$$\omega + \beta + 2\gamma + 3\delta + \dots\dots\dots\dots = n - 1$$
$$(\beta + 2\gamma + 3\delta + \dots\dots\dots\dots = \lambda)$$

und das ist eben der vorletzte Coefficient, der von z' nämlich, wie zu beweisen war. Man kann aber auch ganz allgemein darthun, dass der Coefficient von $z^{(r)}$ gleich $\frac{1}{r!}\frac{d^r\mathfrak{X}}{d\varphi^r}$ sei, d. h. dass man:

$$\frac{1}{r!}\frac{d^r\mathfrak{X}}{d\varphi^r} = \mathbf{S}\left[\frac{(\lambda+r)!}{r!\beta!\gamma!\delta!\dots}\,\mathfrak{X}_{\lambda+r} \left(\frac{\varphi}{1!}\right)^\beta \left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^\gamma \left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^\delta \dots\dots\dots\right] \tag{315}$$
$$\omega + \beta + 2\gamma + 3\delta + \dots\dots\dots\dots = n - r$$
$$(\beta + 2\gamma + 3\delta + \dots\dots\dots\dots = \lambda)$$

habe. Differenziren wir zu diesem Behufe die Formel (311) r-Mal partiell nach φ, nachdem wir zuvörderst alle Glieder, die mit niedrigeren als der r^{ten} Potenz von φ verknüpft sind, und die durch den Act des Differenzirens wegfallen, dadurch ausgeschlossen haben, dass wir β ersetzen durch $\beta + r$. Das Ergebniss ist:

$$\frac{1}{r!}\frac{d^r\mathfrak{X}}{d\varphi^r} = \mathbf{S}\left[\frac{\lambda!}{r!\beta!\gamma!\delta!\dots}\,\mathfrak{X}_\lambda \left(\frac{\varphi}{1!}\right)^\beta \left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^\gamma \left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^\delta \dots\dots\dots\right] \tag{316}$$
$$\omega + \beta + 2\gamma + 3\delta + \dots\dots\dots\dots = n - r$$
$$(\beta + 2\gamma + 3\delta + \dots\dots\dots\dots = \lambda - r)$$

Verwandeln wir hier noch λ in $\lambda + r$, so erhalten wir genau die vorhergehende Gleichung und sehen somit, dass sich die Transformirte in z auch auf folgende Weise schreiben lasse:

$$\mathfrak{X}.z + \frac{1}{1!}\frac{d\mathfrak{X}}{d\varphi}.z' + \frac{1}{2!}\frac{d^2\mathfrak{X}}{d\varphi^2}.z'' + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}\mathfrak{X}}{d\varphi^{n-1}}.z^{(n-1)} + \frac{1}{n!}\frac{d^n\mathfrak{X}}{d\varphi^n}.z^{(n)} = 0. \tag{317}$$

Ihre Bildung wäre hiemit wesentlich erleichtert, da sie abhängig gemacht ist von einem einzigen, nämlich dem letzten Coefficienten. Allein auch dieser lässt sich ableiten aus einem weit einfacheren Polynome, demjenigen nämlich, welches man erhält, in der vorgelegten Differentialgleichung in y die

Anstatt des Polynoms $\beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots$ könnte man der Kürze wegen auch einen einzigen Buchstaben λ schreiben, wodurch sich die Summe, die im zweiten Theile dieser Gleichung vorfindig ist, augenscheinlich auf den letzten Coefficienten $\mathfrak{J}$ zurückzieht. Wir haben also:

$$\mathfrak{J} = \mathrm{S}\left[\frac{1}{\gamma!\,\delta!\ldots\ldots}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\delta}\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}}\right] \tag{323}$$
$$\beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots\ldots\ldots = n$$

Die wesentlichen Vortheile, die wir durch Aufstellung dieser Formel errungen haben, sind: **erstens** die Summirung nach ω ist bereits geschehen und **zweitens** die nach den übrigen in der Bedingungsgleichung vorhandenen griechischen Buchstaben einzuleitende ist durch die Tabelle für $\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\int\varphi dx}\right]$, die sich Seite 143 im §. 7 vorfindet, und sämmtliche Auflösungen in ganzen Zahlen dieser Gleichung enthält, als erledigt anzusehen, und zwar ist diess nicht nur der Fall bei den letzten Coefficienten $\mathfrak{J}$, sondern auch bei allen übrigen namentlich bei dem allgemeinen unter ihnen $\frac{1}{r!}\frac{d^r\mathfrak{J}}{d\varphi^r}$. In der That kömmt in der letzterzielten Formel φ lediglich in Q vor. Man hat daher:

$$\frac{1}{r!}\frac{d^r\mathfrak{J}}{d\varphi^r} = \mathrm{S}\left[\frac{1}{r!\,\gamma!\,\delta!\ldots\ldots}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\delta}\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{d^{n-\beta+r}Q}{d\varphi^{n-\beta+r}}\right] \tag{324}$$
$$\beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots\ldots\ldots = n$$

Zudem ist Q ein Polynom von n Dimensionen nach φ, welches, einer Anzahl von $n+1$ oder $n+2$ u. s. w., oder endlich $n+r$ Differentiationen unterworfen, jedesmal die Nulle zum Resultate gibt. Wir sehen also, dass für $\beta = 0, 1, 2, \ldots\ldots r-1$ gar keine von der Nulle verschiedenen zur Summe gehörigen Glieder zu haben seien. Wir sind daher berechtigt, diese Reihe von Werthen für β gleich im Vorhinein dadurch auszuschliessen, dass wir $\beta + r$ anstatt β setzen, wodurch sich ergibt:

$$\frac{1}{r!}\frac{d^r\mathfrak{J}}{d\varphi^r} = \mathrm{S}\left[\frac{1}{r!\,\gamma!\,\delta!\ldots\ldots}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\delta}\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}}\right]$$
$$\beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots\ldots\ldots = n - r$$

Kraft dieser Formel nun lässt sich die transformirte Differentialgleichung hinstellen, wie folgt:

$$\begin{aligned} 0 = \;& \mathfrak{z}\cdot\mathrm{S}\left[\frac{1}{0!\gamma!\delta!\ldots}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\delta}\ldots\ldots\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}}\right] + \mathfrak{z}'\cdot\mathrm{S}\left[\frac{1}{1!\gamma!\delta!\ldots}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\delta}\ldots\ldots\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}}\right] + \\ & \qquad \beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots = n \qquad\qquad \beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots = n-1 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \mathfrak{z}^{(n-1)}\mathrm{S}\left[\frac{1}{(n-1)!\gamma!\delta!\ldots}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\delta}\ldots\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}}\right] + \mathfrak{z}^{(n)}\cdot\mathrm{S}\left[\frac{1}{n!\gamma!\delta!\ldots}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\delta}\ldots\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}}\right] \\ & \qquad \beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots = 1 \qquad\qquad \beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots = 0 \end{aligned} \tag{325}$$

und diese Formel ist es, von der wir jetzt Gebrauch machen wollen in den zwei Hauptfällen, die die §. 1 und §. 2 der Transformationslehre in einzelnen Beispielen behandeln.

Die Function φ in dem der zweiten Classe angehörigen Factor $e^{\int \varphi dx}$ vermag zweierlei Bestandtheile zu enthalten, nämlich erstens solche, die mit der Veränderlichen x ins Unendliche wachsen, — die Gradzahlen dieser Bestandtheile werden uns aus jenen der Gleichungscoefficienten kund vermittelst eines den Bau derselben umspannenden Polygones — und zweitens solche, die ins Unendliche wachsen, wenn die Veränderliche x gegen eine bestimmte Constante α convergirt, — sie sind im Factorenbaue der Coefficienten abgebildet. Die Bestandtheile von φ der ersten Art haben wir im §. 2 nach Potenzen von x absteigend geordnet, die der zweiten Art sind im §. 3 aufsteigend geordnet worden. Ihre Auffindung kann daher, wie alldort nachgewiesen, nicht bewerkstelligt werden durch einen und denselben Rechnungsact, es ist vielmehr nothwendig, dass man eine eigene Rechnung einleite behufs der Sonderung desjenigen Factors der zweiten Klasse, der sich in den Gradzahlen der Coefficienten kennzeichnet und zur Auffindung und Sonderung des andern, den die Zusammensetzung derselben aus einfachen Factoren verräth. Sprechen wir also zunächst von dem Ersteren.

Die nach den Vorschriften der Formenlehre gehörig repartirten Unterschiede zwischen den Gradzahlen der Coefficienten sind zugleich die Gradzahlen der verschiedenen φ in den einzelnen particulären Integralen in absteigender Ordnung und die hier angestrebte Allgemeinheit der Behandlung scheint es zu erheischen, dass man sie von einander verschieden annehme. Gleich wären sie alle nur in dem einzigen speciellen Falle, wo vom ersten auf den letzten Gleichungscoefficienten die grösste auf das Paar entfallende Steigung oder der geringste Abfall stattfindet. Deutet man daher die verschiedenen Functionen φ in den einzelnen particulären Integralen der Reihe nach durch $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ an und sind ihre Gradzahlen $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$, so schiene auf den ersten Blick, dass man sie alle möglicherweise untereinander verschieden, positiv oder negativ, ganz oder gebrochen anzunehmen habe. Sie könnten im Uebrigen absteigend geordnet sein, so dass:

$$r_1 > r_2 > r_3 > \ldots\ldots\ldots\ldots > r_n$$

ist. Bei näherer Beleuchtung jedoch ergibt sich mit Rücksicht auf die in §. 2 und §. 3 in einfacheren Fällen gemachten Erfahrungen ein etwas anderer Sachverhalt.

Zuvörderst muss bemerkt werden, dass die Berechnung eines φ mit gebrochener Gradzahl keineswegs so ordentlich und übersichtlich von Statten gehe, wie die eines anderen mit ganzer Anzahl von Dimensionen, noch auch zu einer so handsamen transformirten Gleichung führe, in der sich vielmehr irrationale Coefficienten zeigen werden. Diess macht, dass man, um nicht den Faden der Rechnung zu verlieren, in der Regel nicht das ganze φ, sondern nur das erste Glied entwickelt, und nachdem man diess gethan, erst noch genöthigt ist, zur Weghebung der Irrationalgrössen die Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen folgen zu lassen.

Man wird es daher in den meisten Fällen und abgesehen von einigen sehr speciellen Beispielen vorziehen, diese Einführung einer neuen Veränderlichen als erste Transformation, voranzuschicken und die gruppenweise vorkommenden gebrochenen Repartitionszahlen r wenigstens im Bereiche

einer Seite des normalen Polygones, d. h. in einer Gruppe in ganze zu verwandeln. Man ersieht hieraus, dass die Substitution (298), um welche es sich hier handelt, meistentheils stattfinden werde mit solchen φ, denen eine ganze Zahl von Dimensionen zusteht. Ferner kann man einem jeden Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung oder auch aus ihr durch Transformation abgeleiteten eine beliebige Anzahl von Gliedern hinzufügen mit höheren Potenzen von x und mit dem Factor Null. Dadurch werden ihre Gradzahlen scheinbar erhöht, was man so einrichten kann, dass scheinbar ein und dieselbe Steigung von Coefficienten zu Coefficienten vom ersten bis zum letzten derselben stattfindet, diejenige nämlich, die einer beliebig gewählten Polygonseite angehört. Es folgt hieraus, dass man unbeschadet der Allgemeinheit der analytischen Entwicklungen von der Voraussetzung einer gemeinsamen, auf alle Coefficientenpaare entfallenden Steigung von r Einheiten ausgehen könne, unter r eine ganze positive Zahl verstanden, weil man jedesmal durch Nullsetzen gewisser Anfangscoefficienten zur Annahme ungleicher grösserer oder kleinerer Steigungen den Weg findet.

Fassen wir daher eine Differentialgleichung ins Auge, die allgemeine (246) nämlich, deren Coefficienten $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{X}_{n-1}$, $\mathfrak{X}_{n-2}$ ....., $\mathfrak{X}_0$ beziehlich die Gradzahlen aufweisen:

$$m, \quad m+r, \quad m+2r, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad m+nr;$$

was darauf hindeutet, dass alle φ vom Grade r sind. r soll, wie gesagt, eine ganze Zahl sein und es ist nicht nothwendig, dass diese regelmässige Ansteigung um r Einheiten in der Differentialgleichung wirklich vorhanden sei, wenn sie nur an irgend einer Polygonseite stattfindet, d. h. in den Coefficienten können Anfangsglieder in beliebiger Anzahl auch verschwinden, nur darf diess nicht bei allen der Fall sein, mindestens zwei müssen ausgenommen bleiben. Es sei also:

$$\varphi = [r]x^r + [r-1]x^{r-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + [1]x + [0] = \underset{\rho+\sigma=r}{\mathbf{S}}\left[[\rho]\; x^\rho\right]$$

$$\varphi' = r[r]x^{r-1} + (r-1)\;[r-1]x^{r-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + [1] = \underset{\rho+\sigma=r}{\mathbf{S}}\left[\rho\;[\rho]\; x^{\rho-1}\right]$$

$$(326)\quad \varphi'' = r(r-1)[r]x^{r-2} + (r-1)(r-2)[r-1]x^{r-3} + \ldots\ldots + 2[2] = \underset{\rho+\sigma=r}{\mathbf{S}}\left[\rho(\rho-1)[\rho]x^{\rho-2}\right]$$

....

$$\varphi^{(s)} = r(r-1)\;\ldots\ldots\;(r-s+1)[r]\,x^{r-s} + (r-1)(r-2)\;\ldots\ldots\;(r-s)[r-1]x^{r-s-1} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \underset{\rho+\sigma=r}{\mathbf{S}}\left[\rho\,(\rho-1)\;\ldots\ldots\;(\rho-s+1)\;[\rho]\;x^{\rho-s}\right] = \underset{\rho+\sigma=r}{\mathbf{S}}\left[\frac{\rho!}{(\rho-s)!}\;[\rho]\;x^{\rho-s}\right]$$

....

Verschwinden der $r+1$ Anfangsglieder des letzten Coefficienten geschehen kann. Man wird daher die annoch unbekannten Grössen $r+1$ an der Zahl:

$$[r],\quad [r-1],\quad [r-2],\quad \ldots\ldots\quad [1],\quad [0]$$

wo möglich so zu wählen haben, dass die $r+1$ Anfangsglieder des letzten Coefficienten wegfallen. So wird ein aus demselben zusammengesetztes φ zu einem exponentiellen Factor $e^{\int \varphi dx}$ führen, dessen Sonderung aus irgend einem particulären Integrale dasselbe in Bezug seines Einflusses auf die Gradzahlen der Gleichungscoefficienten zur ersten Classe herunterbringt. Findet man solcher φ mehrere, die dasselbe leisten, so hat man auch die Factoren zweiter Classe mehrerer Genüge leistender Werthe ermittelt. Mehr als n an der Zahl wird man natürlich bei der Gleichung der n^{ten} Ordnung nicht finden können, wohl aber weniger. Wir hätten somit den oft erwähnten letzten Coefficienten, der durch die (323) gegeben ist, absteigend nach x zu ordnen und die Factoren der höchsten Potenzen von x, d. h. von x^{m+nr}, x^{m+nr-1}, x^{m+nr-2}, ... $x^{m+(n-1)r}$ je der Nulle gleich zu setzen, die so erhaltenen Gleichungen aber zur Bestimmung von: $[r]$, $[r-1]$, $[r-2]$, ... $[1]$, $[0]$ zu benützen.

Fassen wir jetzt den Ausdruck für $\mathfrak{J}$ schärfer ins Auge und werfen zugleich einen Blick auf die Anfangsglieder der Tabelle (244) Seite 143 §. 7, so gewahren wir alsobald, dass die ersten Bestandtheile von $\mathfrak{J}$ die folgenden seien:

$$Q + \frac{d^2Q}{d\varphi^2}\frac{\varphi'}{2!} + \frac{d^3Q}{d\varphi^3}\frac{\varphi''}{3!} + \ldots\ldots\ldots \tag{328}$$

Nun ist Q vorausgesetztermassen nach φ vom Grade n also nach x vom Grade $m+nr$; der zweite Differentialquotient davon ist nach φ vom Grade $n-2$ nach x vom Grade $m+nr-2r$; der dritte ebenso vom Grade $m+nr-3r$ nach x. Ferner trägt φ' die Gradzahl $r-1$, φ'' aber die $r-2$, wenigstens so lange r von Null verschieden bleibt. Sohin sind die drei vorliegenden Anfangsglieder beziehlich mit den Gradzahlen $m+nr$, $m+nr-r-1$, $m+nr-2r-2$ versehen. Die Anfangsglieder des absteigend nach x geordneten letzten Coefficienten $r+1$ an der Zahl, also gerade so viele, als zur Bestimmung der gesuchten Grössen hinreichen, sind sämmtlich zu Q gehörig. Wenn man dahere Q absteigend nach x entwickelt und die $r+1$ Anfangsglieder dieser Entwicklung der Nulle gleich setzt, so hat man zu gleicher Zeit die Wurzeln der algebraischen Gleichung $Q=0$ in ihren ersten $r+1$ Bestandtheilen und die Werthe von φ in den unter der Form $e^{\int \varphi dx}$ gedachten particulären Integralen der vorgelegten Differentialgleichung in derselben Ausdehnung, in $r+1$ Anfangsgliedern nämlich. Es wird daher vor allem anderen erspriesslich sein, das Polynom Q für den unter (326) verfindigen Werth von φ und für die unter (327) für die Coefficienten $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{X}_{n-1}$, $\mathfrak{X}_{n-2}$, ... $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_0$ angenommenen Ausdrücke zu entwickeln und absteigend nach x geordnet hinzustellen. Hieraus wollen wir aber dann suchen, die Coefficienten der transformirten Differentialgleichung in eben der Form vollständig zu ermitteln. Zu diesem Zwecke ist aber, wie der Anblick von (318) lehrt, zuvörderst ein Ausdruck für die β^{te} Potenz von φ, dann aber behufs der vollständigen Construction der Gleichungscoefficienten auch für die Potenzen γ, δ, ε, ... von φ', φ'', φ''', ... vonnöthen. Die Polynomialformel (228) führt dazu: Sie gibt:

$$\varphi^{\beta} = \mathbf{S}\left[\frac{\beta!}{\beta_1!\,\beta_2!\,\beta_3!\ldots\beta_{r+1}!}\,[r]^{\beta_1}\,[r-1]^{\beta_2}\,[r-2]^{\beta_3}\,\ldots\ldots\,[0]^{\beta_{r+1}}\,x^{r\beta_1+(r-1)\beta_2+(r-2)\beta_3+\ldots+\beta_r}\right]$$
$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\beta_r+\beta_{r+1}=\beta$$

$$\varphi^{\gamma} = \mathbf{S}\left[\frac{\gamma!}{\gamma_1!\gamma_2!\gamma_3!\ldots\gamma_r!}\,r^{\gamma_1}(r-1)^{\gamma_2}(r-2)^{\gamma_3}\ldots[r]^{\gamma_1}[r-1]^{\gamma_2}[r-2]^{\gamma_3}\ldots[1]^{\gamma_r}x^{(r-1)\gamma_1+(r-2)\gamma_2+(r-3)\gamma_3+\ldots+\gamma_{r-1}}\right]$$
$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\gamma_{r-1}+\gamma_r=\gamma$$

$$\varphi^{\delta} = \mathbf{S}\left[\frac{\delta!}{\delta_1!\,\delta_2!\,\delta_3!\ldots\delta_{r-1}!}\,r^{\delta_1}\,(r-1)^{\delta_1+\delta_2}\,(r-2)^{\delta_2+\delta_3}\,\ldots\,[r]^{\delta_1}\,[r-1]^{\delta_2}\,[r-2]^{\delta_3}\ldots[2]^{\delta_{r-1}}\times\right.$$
$$\left.\times\, x^{(r-2)\delta_1+(r-3)\delta_2+\ldots\ldots+\delta_{r-2}}\right] \tag{329}$$
$$\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\delta_{r-2}+\delta_{r-1}=\delta$$

$$\varphi^{\varepsilon} = \mathbf{S}\left[\frac{\varepsilon!}{\varepsilon_1!\varepsilon_2!\varepsilon_3!\ldots\varepsilon_{r-2}!}\,r^{\varepsilon_1}(r-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(r-2)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}(r-3)^{\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}\ldots[r]^{\varepsilon_1}[r-1]^{\varepsilon_2}[r-2]^{\varepsilon_3}\ldots[3]^{\varepsilon_{r-2}}\times\right.$$
$$\left.\times\, x^{(r-3)\varepsilon_1+(r-4)\varepsilon_2+\ldots\ldots+\varepsilon_{r-3}}\right]$$
$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\varepsilon_{r-3}+\varepsilon_{r-2}=\varepsilon$$

. . . .

Hiezu gehört noch der Werth von $\mathfrak{X}_\beta$ oder, da kraft einer angehängten Bedingungsgleichung $\beta = n - \omega$ ist, der von $\mathfrak{X}_{n-\omega}$. Er ist den kurz zuvor gemachten Annahmen gemäss:

$$\mathfrak{X}_\beta = \mathfrak{X}_{n-\omega} = \mathbf{S}\left[[n-\omega,\theta]\,x^{\theta}\right]$$
$$\theta+\tau=m+\omega r \tag{330}$$

Diese Werthe nun für $\mathfrak{X}_\beta$ und φ^{β} führen wir zunächst in die (318) ein, und erhalten:

$$Q = \mathbf{S}\left\{\frac{\beta!}{\beta_1!\beta_2!\beta_3!\ldots\beta_{r+1}!}\,[r]^{\beta_1}[r-1]^{\beta_2}[r-2]^{\beta_3}\ldots\ldots[0]^{\beta_{r+1}}\,[n-\omega,\theta]\,x^{\theta+r\beta_1+(r-1)\beta_2+(r-2)\beta_3+\ldots+\beta_r}\right\}$$
$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\beta_r+\beta_{r+1}=\beta$$
$$\theta+\tau=m+\omega r \tag{331}$$
$$\beta+\omega=n$$

Eine der drei Bedingungsgleichungen kann man entrathen, β vermittelst der letzten aus der ersten sowohl, wie aus der Summenformel eliminirend. Es ist jedoch bequemer, den Buchstaben β anstatt des ihm gleichgeltenden Polynomes mindestens in der combinatorischen Form stehen zu lassen. Das Polynom Q lässt sich daher auch folgendermassen darstellen:

$$Q = \mathbf{S}\left\{\frac{\beta!}{\beta_1!\beta_2!\beta_3!\ldots\beta_{r+1}!}\,[r]^{\beta_1}[r-1]^{\beta_2}[r-2]^{\beta_3}\ldots\ldots[0]^{\beta_{r+1}}\,[n-\omega,\theta]\,x^{\theta+r\beta_1+(r-1)\beta_2+(r-2)\beta_3+\ldots+\beta_r}\right\}$$
$$\omega+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\beta_r+\beta_{r+1}=n$$
$$\theta+\tau=m+\omega r \tag{332}$$
$$(\beta=\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\beta_r+\beta_{r+1})$$

und wäre jetzt absteigend nach x zu ordnen. Die höchste Potenz dieser Variablen hat, wie schon früher nachgewiesen worden ist, den Exponenten $m+nr$. Um den Coefficienten derselben zu ermitteln, lassen wir:

$$\theta + r\beta_1 + (r-1)\beta_2 + (r-2)\beta_3 + \dots\dots\dots + \beta_r = m + nr$$

sein, fügen also diese Gleichung zu den übrigen zwei der Summe bereits anhängenden und gewahren alsobald, dass ihnen nur für verschwindende $\beta_2, \beta_3, \dots\dots \beta_{r+1}$, r Genüge geleistet werden könne, und zwar durch die folgenden zusammengehörigen Werthe für ω, β_1, θ:

$$(333)\quad \begin{array}{lllllll} \omega & = 0, & 1, & 2, & 3, & \dots\dots\dots & n \\ \beta_1 & = n, & n-1, & n-2, & n-3, & \dots\dots\dots & 0 \\ \theta & = m, & m+r, & m+2r, & m+3r, & \dots\dots\dots & m+nr \end{array}$$

Stellen wir uns jetzt die Coefficienten der transformirten Gleichung, und namentlich den letzten unter ihnen in der Gestalt, in welcher die der vorgelegten Differentialgleichung unter (327) vorkommen und ausgedrückt durch ähnliche Symbole vor, namentlich:

$$(334)\quad \mathfrak{F} = \Big[[0,m+nr]\Big]\,x^{m+nr} + \Big[[0,m+nr-1]\Big]\,x^{m+nr-1} + \dots\dots + \Big[[0,0]\Big] = \mathbf{S}\left\{\Big[[0,\theta]\Big]\,x^{\theta}\right\}$$
$$\theta + \tau = m + nr$$

so sind, wie schon gesagt, die Anfangsglieder $r+1$ an der Zahl diesem $\mathfrak{F}$ und dem Q gemeinschaftlich, es heissen somit die Gleichungen, aus denen $[r]$, $[r-1]$, $[r-2]$, ... $[0]$ hervorzugehen haben:

$$(335)\quad \begin{array}{r} \Big[[0,m+nr]\Big] = 0 \\ \Big[[0,m+nr-1]\Big] = 0 \\ \Big[[0,m+nr-2]\Big] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ \Big[[0,m+nr-r]\Big] = 0 \end{array}$$

und es sieht die erste unter ihnen, in entwickelter Gestalt hingeschrieben, aus, wie folgt:

$$(336)\quad 0 = \Big[[0,m+nr]\Big] = [n,m]\,[r]^n + [n-1,m+r]\,[r]^{n-1} + [n-2,m+2r]\,[r]^{n-2} + \dots\dots + [0,m+nr]$$

Sie dient zur Bestimmung von $[r]$ und gibt dafür im Allgemeinen Werthe n an der Zahl, die den n verschiedenen particulären Integralen der Differentialgleichung offenbar angehörig sind. Sie ist ferner gebaut aus den ersten mit den höchsten Potenzen von x verknüpften Bestandtheilen der Glieder des Differentialgleichungspolynomes und geht aus ihnen hervor durch Hinweglassung dieser Potenzen und Verwandlung von $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, ... y beziehlich in $[r]^n$, $[r]^{n-1}$, $[r]^{n-2}$, ... 1. Angeleitet durch die in speciellen Fällen in §. 2 und §. 3 der Transformationslehre gemachten Erfahrungen, bilden wir auch aus den zweiten, dritten, vierten und folgenden Bestandtheilen eben derselben Glieder folgende Polynome:

x^{m+nr-1}, x^{m+nr-2}, x^{m+nr-3}, ... x^{i+nr} ....

beziehlich die folgenden Glieder noch gehörig seien:

$$[r-1]\,A'_m,\quad [r-1]\,A'_{m-1},\quad [r-1]\,A'_{m-2},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [r-1]\,A'_{i+1}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Gehen wir jetzt über zur dritten der Gleichungen (335), von deren Polynome uns bereits zwei Glieder kund geworden sind, nämlich: A_{m-2} und $[r-1]\,A'_{m-1}$. Nebst ihnen lassen sich noch zwei Glieder erhalten, deren eines der Annahme $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = \beta_4 = \ldots\ldots = \tau = 0$ entspricht, das andere aber gewonnen wird mit den Werthen: $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \ldots\ldots = \tau = 0$. Ersterem entsprechen die folgenden Auflösungen für ω, β_1 und θ in ganzen Zahlen:

$$\text{(341)}\qquad \begin{array}{lllllll} \omega & = & 0, & 1, & 2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & n-2, \\ \beta_1 & = & n-2, & n-3, & n-4, & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \theta & = & m, & m+r, & m+2r, & \ldots\ldots\ldots\ldots & m+(n-2)\,r \end{array}$$

und hiezu gehört eine Gliederreihe als Bestandtheil der Summe, wie folgt:

$$\text{(342)}\qquad \begin{gathered} \frac{1}{2}\,[r-1]^2 \Big\{ n(n-1)[n,m][r]^{n-2} + (n-1)(n-2)[n-1,m+r][r]^{n-3} + (n-2)(n-3)[n-2,m+2r][r]^{n-4} + \ldots \\ + 2\,\Big[2,m+(n-2)\,r\Big]\Big\} = \frac{1}{2}\,[r-1]^2\,\frac{d^2 A_m}{d\,[r]^2} = \frac{1}{2}\,[r-1]^2\,A''_m. \end{gathered}$$

Ein zweites Glied aber geht aus dem folgenden Systeme von Werthen für ω, β_1, θ hervor:

$$\text{(343)}\qquad \begin{array}{lllllll} \omega & = & 0, & 1, & 2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & n-1, \\ \beta_1 & = & n-1, & n-2, & n-3, & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \theta & = & m & m+r, & m+2r, & \ldots\ldots\ldots\ldots & m+(n-1)\,r \end{array}$$

Es ist zusammengesetzt aus den Bestandtheilen:

$$\text{(344)}\quad [r-2]\Big\{n[n,m][r]^{n-1} + (n-1)[n-1,m+r][r]^{n-2} + (n-2)[n-2,m+2r][r]^{n-3} + [1,m+nr-r]\Big\} = [r-2]\,A'_m$$

Mehr Glieder als diese sind zum Coefficienten von x^{m+nr-2} nicht zu finden. Dieser ist daher:

$$\text{(345)}\qquad \Big[[0,m+nr-2]\Big] = A_{m-2} + [r-1]\,A'_{m-1} + \frac{1}{2}\,[r-1]^2\,A''_m + [r-2]\,A'_m = 0.$$

Er liefert, der Nulle gleich gesetzt, wie eben geschehen, eine Gleichung, aus der sich $[r-2]$ bestimmen lässt. Hätte man aber, anstatt $\tau = 0$ zu erkiesen, der Reihe nach: $\tau = 1, 2, 3, \ldots\, m+nr$ gesetzt, so würde man zu ähnlichen Bestandtheilen der Coefficienten der folgenden Potenzen von x gelangt sein:

x^{m+nr-3}, x^{m+nr-4}, ... x^{i+nr}

Sie sind beziehlich:

$$\frac{1}{2}[r-1]^2 A''_{m-1} + [r-2]A'_{m-1},\quad \frac{1}{2}[r-1]^2 A''_{m-2} + [r-2]A'_{m-2},\quad \ldots\ldots\quad \frac{1}{2}[r-1]^2 A''_{i+2} + [r-2]A'_{i+2}$$

Schon die bis hieher gediehene Untersuchung zeigt auf das Klarste: **erstens**, dass ein jeder bereits entwickelte Coefficient von irgend einer beliebigen Potenz von x nicht nur zu dem nächst darauffolgenden, sondern auch zu allen übrigen Bestandtheile liefere, die aus eben demselben hervorgehen, indem man ohne sonstige Veränderung bloss die Stellenzeiger des Buchstaben A vermindert, um die Zahlen: 1, 2, 3, ... und **zweitens**, dass der Zusatz, der hinzukommen muss, um den folgenden Coefficienten vollständig zu bilden, einzig und allein eine Function von A_m und seinen nach $[r]$ genommenen Differentialquotienten sei. Da man aber in der Regel eine successive Bildung dieser einzelnen Coefficienten einen um den anderen in der Rechnungspraxis vornehmen wird, so ist es wichtig anzugeben, wie, wenn der nächstvorangehende bereits bekannt ist, der nächstfolgende zu bilden sei. Man überzeugt sich leicht, dass diess auf folgende Weise geschehe: **Erstens** man verringert alle dem A angehängten Stellenzeiger um die Einheit, so hat man von ihm einen Bestandtheil. **Zweitens** um zu einem Verfahren zu gelangen, welches besagt, wie der Rest zu erhalten sei, stellt man folgende Betrachtungen an: Gesetzt der Coefficient, zu dem man diesen Rest zu rechnen hat, sei der: $\left[[0, m + nr - \varkappa]\right]$, unter $\varkappa$ eine Zahl verstanden, die man sich zwar zwischen 0 und r liegend denken kann, wenn man die Gruppe der $r+1$ der Nulle gleichzusetzenden Coefficienten, die unter (335) vorliegt, im Auge hat, die aber auch zwischen Null und $m+nr$ enthalten sein mag, wenn man sich etwa vornähme, alle Glieder des mit Q bezeichneten Polynomes zu bilden, was ohnehin nöthig ist, wenn man die transformirte Differentialgleichung vollständig aufzustellen im Sinne hat. Die Potenz von x, zu der er gehört, ist offenbar: $x^{m+n-\varkappa}$. Vergleicht man ihren Exponenten mit dem in der Summenformel enthaltenen, so hat man:

$$\theta + r\beta_1 + (r-1)\beta_2 + (r-2)\beta_3 + \dots\dots\dots + \beta_r = m + nr - \varkappa. \tag{346}$$

Zudem gibt die dieser Summenformel angehängte erste der Bedingungsgleichungen mit r multiplizirt:

$$r\beta_1 + r\beta_2 + r\beta_3 + \dots\dots\dots + r\beta_r + r\beta_{r+1} = nr - \omega r. \tag{347}$$

Statuirt man überdiess $\tau = 0$, weil für den gesuchten Zusatz τ keinen anderen Werth annimmt, so hat man aus der zweiten dieser Bedingungsgleichungen:

$$\theta = m + \omega r. \tag{348}$$

Demzufolge geht aber die Gleichung (346) über in:

$$\varkappa = \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + \dots\dots\dots + r\beta_{r+1}. \tag{349}$$

Da nun das $\varkappa$ den Coefficienten characterisirt, so bekommt man offenbar den in Rede stehenden Zusatz, wenn man alle Auflösungen in ganzen Zahlen der letztaufgestellten Gleichung für ein seinem Werthe nach festgestelltes $\varkappa$ aufsucht und darnach die Summenglieder bildet. Diese Auflösungen sind aber bereits enthalten in der §. 7, Seite 143 gebrachten Tabelle (244). Man fasse irgend eine derselben ins Auge und es sei für eben diese eine:

$$\sigma = \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \dots\dots\dots + \beta_{r+1}, \tag{350}$$

so entsprechen ihr kraft der Bedingungsgleichungen die im folgenden Schema enthaltenen Werthe von ω, β_1, θ:

$$
\begin{array}{llllll}
 & \omega = 0, & 1, & 2, & \dots\dots\dots & n-\sigma \\
(351) & \beta_1 = n-\sigma, & n-\sigma-1, & n-\sigma-2, & \dots\dots\dots & 0 \\
 & \theta = m, & m+r, & m+2r, & \dots\dots\dots & m+(n-\sigma)\,r
\end{array}
$$

und diese liefern wieder zu der Summe (332) die folgenden, in Eines zusammenzuziehenden Glieder:

$$
(352)\quad \frac{[r-1]^{\beta_2}[r-2]^{\beta_3}\dots[0]^{\beta_{r+1}}}{\beta_2!\,\beta_3!\,\dots\dots\,\beta_{r+1}!}\left\{\frac{n!}{(n-\sigma)!}[n,m]\,[r]^{n-\sigma}+\frac{(n-1)!}{(n-\sigma-1)!}[n-1,m+r]\,[r]^{n-\sigma-1}+\right.
$$
$$
\left.\dots\dots\dots\dots + (n-\sigma)!\,[\sigma,m+(n-\sigma)\,r]\right\} =
$$
$$
=\frac{[r-1]^{\beta_2}[r-2]^{\beta_3}\dots[0]^{\beta_{r+1}}}{\beta_2!\,\beta_3!\,\dots\dots\,\beta_{r+1}!}\left[\begin{array}{l} n\,(n-1)\,(n-2)\,\dots\dots\dots\,(n-\sigma+1)\,[n,m]\,[r]^{n-\sigma}+\\ +(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\dots\dots\,(n-\sigma)\,[n-1,m+r]\,[r]^{n-\sigma-1}+\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ +(n-\sigma)\,(n-\sigma-1)\,(n-\sigma-2)\,\dots\dots\,1\,[\sigma,m+(n-\sigma)r]\end{array}\right]=
$$
$$
=\frac{[r-1]^{\beta_2}\,[r-2]^{\beta_3}\,\dots\dots\,[0]^{\beta_{r+1}}}{\beta_2!\,\beta_3!\,\dots\dots\,\beta_{r+1}!}\,A^{(\sigma)}_m.
$$

Solch' ein Glied wie dieses gibt aber eine jede der Auflösungen der Gleichung (349). Der ganze gesuchte Zusatz ist daher in combinatorischer Ausdrucksweise eine Summe aller so geformten Glieder, aussehend folgendermassen:

$$
(353)\quad \begin{array}{c} \mathbf{S}\left[\dfrac{[r-1]^{\beta_2}\,[r-2]^{\beta_3}\,\dots\dots\,[0]^{\beta_{r+1}}}{\beta_2!\,\beta_3!\,\dots\dots\,\beta_{r+1}!}\,A^{(\sigma)}_m\right] \\ \beta_2+2\beta_3+3\beta_4+\dots\dots+r\beta_{r+1}=\kappa \\ (\sigma=\beta_2+\beta_3+\beta_4+\dots\dots+\beta_{r+1}). \end{array}
$$

Hätte man anstatt $\tau=0$ zu setzen dafür irgend einen der Werthe adoptirt aus der natürlichen Zahlenreihe: $1, 2, 3, \dots\dots \tau$, so hätte man der Reihe nach Bestandtheile erhalten der Coefficienten folgender Potenzen von x in der Entwicklung des Polynomes Q:

$$
x^{m+nr-\kappa-1},\quad x^{m+nr-\kappa-2},\quad \dots\dots\dots\dots\quad x^{m+nr-\kappa-\tau},
$$

und es würde allgemein der zu $x^{m+nr-\kappa-\tau}$ gehörige so aussehen:

$$
(354)\quad \begin{array}{c} \mathbf{S}\left[\dfrac{[r-1]^{\beta_2}\,[r-2]^{\beta_3}\,\dots\dots\,[0]^{\beta_{r+1}}}{\beta_2!\,\beta_3!\,\dots\dots\,\beta_{r+1}!}\,A^{(\sigma)}_{m-\tau}\right] \\ \beta_2+2\beta_3+3\beta_4+\dots\dots+r\beta_{r+1}=\kappa \\ (\sigma=\beta_2+\beta_3+\beta_4+\dots\dots+\beta_{r+1}). \end{array}
$$

Die bisherigen Untersuchungen genügen vollständig zur Ermittlung sämmtlicher Gleichungen (335), von welchen bereits drei fertig vorliegen; den Zusatz nämlich, der zur vierten von ihnen nothwendig ist, erhält man alle Auflösungen der Gleichung:

$$
\beta_2+2\beta_3+3\beta_4+\dots\dots\dots\dots+r\beta_{r+1}=3
$$

in ganzen Zahlen suchend. Sie sind enthalten im folgenden Schema sammt den ihnen zugehörigen Gliedern:

β_2	β_3	β_4	$\frac{[r-1]^{\beta_2}\,[r-2]^{\beta_3}\,[r-3]^{\beta_4}}{\beta_2!\,\beta_3!\,\beta_4!}\,A_m^{(\sigma)}$
3	.	.	$\frac{1}{6}\,[r-1]^3 \quad A_m'''$
1	1	.	$+\,[r-1]\,[r-2]\,A_m''$
.	.	1	$+\,[r-3] \quad A_m'$

(355)

Auf ähnliche Weise liefert folgendes Schema den Zusatz, der zur Bildung des nächsten, zu x^{m+nr-4} gehörigen Coefficienten nothwendig ist:

β_2	β_3	β_4	β_5	$\frac{[r-1]^{\beta_2}\,[r-2]^{\beta_3}\,[r-3]^{\beta_4}\,[r-4]^{\beta_5}}{\beta_2!\,\beta_3!\,\beta_4!\,\beta_5!}\,A_m^{(\sigma)}$
4	.	.	.	$\frac{1}{24}\,[r-1]^4 \quad A_m^{IV}$
2	1	.	.	$+\,\frac{1}{2}\,[r-1]^2\,[r-2]\,A_m'''$
1	.	1	.	$+\,[r-1]\,[r-3]\,A_m''$
.	2	.	.	$+\,\frac{1}{2}\,[r-2]^2 \quad A_m''$
.	.	.	1	$[r-4] \quad A_m'$

(356)

Auf dieselbe Art ziehen wir den letzten Bestandtheil des nächstfolgenden Coefficienten von x^{m+nr-5} aus der kleinen Tabelle:

β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	$\frac{[r-1]^{\beta_2}\,[r-2]^{\beta_3}\,[r-3]^{\beta_4}\,[r-4]^{\beta_5}\,[r-5]^{\beta_6}}{\beta_2!\,\beta_3!\,\beta_4!\,\beta_5!\,\beta_6!}\,A_m^{(\sigma)}$
5	.	.	.	.	$\frac{1}{120}\,[r-1]^5 \quad A_m^{V}$
3	1	.	.	.	$+\,\frac{1}{6}\,[r-1]^3\,[r-2]\,A_m^{IV}$
2	.	1	.	.	$+\,\frac{1}{2}\,[r-1]^2\,[r-3]\,A_m'''$
1	2	.	.	.	$+\,\frac{1}{2}\,[r-1]\,[r-2]^2\,A_m'''$
1	.	.	1	.	$+\,[r-1]\,[r-4]\,A_m''$
.	1	1	.	.	$+\,[r-2]\,[r-3]\,A_m''$
.	.	.	.	1	$+\,[r-5] \quad A_m'$

(357)

Um endlich die sämmtlichen Gleichungen (335) bis zur Ansteigungszahl $r=6$ im D
construirt zu erhalten, fügen wir noch den zu x^{m+nr-6} gehörigen Coefficientenzusatz bei vermit
des Schemas:

(358)

β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	$\frac{[r-1]^{\beta_2}\,[r-2]^{\beta_3}\,\ldots\ldots\,[r-6]^{\beta_7}}{\beta_2!\,\beta_3!\,\ldots\ldots\,\beta_7!}\,A_m^{(\sigma)}$
6	.	.	.	.	.	$\frac{1}{720}\,[r-1]^6\quad A_m^{VI}$
4	1	.	.	.	.	$+\frac{1}{24}\,[r-1]^4\,[r-2]\quad A_m^{V}$
3	.	1	.	.	.	$+\frac{1}{6}\,[r-1]^3\,[r-3]\quad A_m^{IV}$
2	2	.	.	.	.	$+\frac{1}{4}\,[r-1]^2\,[r-2]^2\quad A_m^{IV}$
2	.	.	1	.	.	$+\frac{1}{2}\,[r-1]^2\,[r-4]\quad A_m'''$
1	1	1	.	.	.	$+\,[r-1]\,[r-2]\,[r-3]\quad A_m'''$
1	.	.	.	1	.	$+\,[r-1]\,[r-5]\quad A_m''$
.	3	.	.	.	.	$+\frac{1}{6}\,[r-2]^3\quad A_m'''$
.	1	.	1	.	.	$+\,[r-2]\,[r-4]\quad A_m''$
.	.	2	.	.	.	$+\frac{1}{2}\,[r-3]^2\quad A_m''$
.	.	.	.	.	1	$+\,[r-6]\quad A_m'$

Mit Hilfe dieser tabellarischen Ergebnisse nun und der anderweitigen, zuvor aufgestel
Regeln bilden wir jetzt im Detail die sieben ersten der Gleichungen (335) sowohl zur Bequemlich
des Rechners, als auch, um die nachfolgenden Erörterungen über die verschiedenen Formen der
ticulären Integrale damit einzuleiten. Sie sind der Reihe nach:

$$0 = A_m.$$

$$0 = A_{m-1} + [r-1]\,A_m'.$$

$$0 = A_{m-2} + [r-1]\,A_{m-1}' + \frac{1}{2}\,[r-1]^2\,A_m'' + [r-2]\,A_m'. \tag{359}$$

$$0 = A_{m-3} + [r-1]\,A_{m-2}' + \frac{1}{2}\,[r-1]^2\,A_{m-1}'' + [r-2]\,A_{m-1}' + \frac{1}{6}\,[r-1]^3\,A_m''' +$$
$$+ [r-1]\,[r-2]\,A_m'' + [r-3]\,A_m'.$$

lich dann nicht, wenn die Coefficienten seiner Anfangsglieder zufällig Null werden oder mit andern Worten, wenn in der Differentialgleichung höhere Ansteigungen als um r Einheiten auf das Coefficientenpaar vorkommen, was wieder auf solche particuläre Integrale hindeutet, bei denen die Gradzahl des entsprechenden φ grösser ist als r. Diese höher gebauten φ nun gehen, wie man sieht, aus der eingeleiteten Rechnung nicht hervor. Wiewohl man daher berechtigt ist, das r eine jede beliebige der Ansteigungszahlen, die irgend einer Seite angehören des den Coefficientenbau umspannenden Polygones, bedeuten zu lassen, so ist es doch angezeigt, wenn man durch einen einzigen Rechnungsact die Factoren zweiter Classe sämmtlicher particulären Integrale erhalten will, dem r den grössten der ersten Polygonseite entsprechenden Werth zu ertheilen. Hat man aber alle $[r]$, gleichviel ob n oder weniger an der Zahl gefunden, so gibt in der Regel die zweite der hier verzeichneten Gleichungen zu einem jeden derselben ein einziges $[r-1]$, die dritte ein einziges $[r-2]$ u. s. w., bis man endlich der $(r+1)^{\text{sten}}$ ein einziges $[0]$ entringt. Sie sind alle gebrochen durch eine gewisse Potenz von A'_m. Zweitens: die Anzahl der Auflösungen der Gleichung $A_m=0$ wird auch verringert durch vorhandene gleiche Wurzeln. Diess ist keineswegs ein seltener Fall; es erscheinen vielmehr gleiche Wurzeln 0 jedesmal, so oft in der Differenzialgleichung auch geringere Ansteigungen als um r Einheiten vorkommen, weil diess die letzten Glieder von A_m zum Verschwinden bringt und so nothwendig zu gleichen Wurzeln Null führen muss. Setzen wir deren etwa nur zwei voraus, so ist für solch' einen wiederholten Wurzelwerth $A_m=A'_m=0$ und in Folge dessen enthält die zweite der vorliegenden Gleichungen gewöhnlich einen Widerspruch, nämlich den: $A_{m-1}=0$, der dann auf eine andere Form des Integrales hindeutet als die vorausgesetzte. Allein selbst dann, wenn für den in Rede stehenden wiederholten Wurzelwerth $A_m=A'_m=A_{m-1}=0$ sein sollte, bekömmt man doch aus dieser zweiten Gleichung, die hiemit in eine identische übergeht, den Werth des zweiten Coefficienten $[r-1]$ nicht, sondern muss ihn aus der dritten ziehen und ebenso liefert den dritten Coefficienten, den $[r-2]$ nämlich dann nicht die dritte Gleichung, sondern erst die vierte u. s. w., bis endlich $[0]$ nicht aus der $r+1^{\text{sten}}$ sondern erst aus einer späteren Gleichung bestimmt wird, die man erhält, den Coefficienten einer späteren Potenz von x der Nulle gleichsetzend. Diess ist aber ein Coefficient, der nicht mehr ausschliesslich gezogen ist aus dem mit Q bezeichneten Polynome, zu dessen Bildung vielmehr bereits solche Glieder mitwirken, die dem φ' entnommen und die in Q noch gar nicht enthalten sind. Allgemein ist man genöthigt, bei dem Vorkommen gleicher Wurzeln entweder zu einer andern Form des Integrales oder zu einem späteren Coefficienten, respective Gleichung, seine Zuflucht zu nehmen; welche neue Form aber anstatt der alten hier zu setzen sei und bis zu welchem Coefficienten der absteigenden Potenzen von x man nothwendig zu gehen habe, um das vollständige φ zu erhalten, diess wollen wir etwas später untersuchen.

Es ist zwar im Allgemeinen richtig, wie wir in den eben beendeten Untersuchungen nachgewiesen haben, dass man nur der $r+1$ ersten Anfangsglieder der Entwicklung von Q benöthige, um den Factor zweiter Classe kennen zu lernen, der jedem der particulären Integrale anhängt, da jedoch in Ausnahmsfällen und namentlich dann, wenn Gleichungen mit gleichen Wurzeln erscheinen,

die Coefficienten der folgenden Potenzen von x und hiemit auch die Glieder, die zu dem Differentialquotienten von Q gehören, mitwirken, und da man überdiess die vollständige transformirte Gleichung in z in den meisten Fällen braucht; so ist noch zweierlei zu leisten, nämlich: erstens, es ist das ganze Q und nicht bloss seine $r+1$ Anfangsglieder und zwar in der Form der combinatorischen Analysis darzustellen als Summe und es ist zweitens, wie der Anblick der Transformirten lehrt, die wir unter (325) dargestellt haben, auch ein Ausdruck für einen beliebigen $(n-\beta)^{\text{ten}}$ Differenzialquotienten von Q und in Folge dessen für die Coefficienten eben der (325) zu ermitteln, der dann einer wo möglich leichten Constructionsweise dieser Transformirten zu Grunde zu liegen hat. Wir suchen also zuvörderst eine combinatorische Formel für das ganze mit Q bezeichnete Polynom. Es führen hiezu folgende Erwägungen: Wie früher nachgewiesen worden, gehört unter Andern zum Coefficienten von $x^{m+nr-\varkappa-\tau}$ als Bestandtheil eine Summe von Gliedern, die durch die Formel (354) ausgedrückt ist, was auch $\varkappa$ und τ bedeuten mögen. Man wird daher diesen beiden Buchstabengrössen mannigfaltige ganze und positive Werthe beilegen können und bewerkstelligt man diess so, dass die Summe $\varkappa+\tau$ stets einen und denselben natürlich auch ganzen und positiven Werth ν behält, so gewinnt man offenbar lauter Glieder, die alle zum Coefficienten von $x^{m+nr-\nu}$ gehörig sind. Es stellt daher die folgende Summe einen Bestandtheil von Q vor, nämlich eben den der genannten Potenz von x proportionalen:

$$\mathrm{S}\left[\frac{[r-1]^{\beta_2}\,[r-2]^{\beta_3}\,\ldots\ldots\,[0]^{\beta_{r+1}}}{\beta_2!\,\beta_3!\,\ldots\ldots\,\beta_{r+1}!}\,A_{m-\tau}^{(\sigma)}\,x^{m+nr-\nu}\right]$$
$$\beta_2+2\beta_3+3\beta_4+\ldots\ldots\ldots+r\beta_{r+1}=\varkappa$$
$$\varkappa+\tau=\nu \tag{360}$$
$$(\sigma=\beta_2+\beta_3+\beta_4+\ldots\ldots\ldots+\beta_{r+1})$$

Denkt man sich nun noch überdiess dem ν alle möglichen Werthe ertheilt, von Null an bis $m+nr$ und alle so gewonnenen Summen addirt, so hat man das ganze Polynom Q und um diess in der combinatorischen Sprache anzudeuten, ist offenbar nur nöthig, ν in der Summenformel durch seinen Werth $\varkappa+\tau$ zu ersetzen, sodann aber die zweite der Bedingungsgleichungen auszulassen und an ihrer statt die folgende:

$$\varkappa+\tau+\mu=m+nr$$

zu setzen. Es führt diess zu der gesuchten Formel für Q, nämlich:

$$Q=\mathrm{S}\left[\frac{[r-1]^{\beta_2}\,[r-2]^{\beta_3}\,\ldots\ldots\,[0]^{\beta_{r+1}}}{\beta_2!\,\beta_3!\,\ldots\ldots\,\beta_{r+1}!}\,A_{m-\tau}^{(\sigma)}\,x^{m+nr-\varkappa-\tau}\right]$$
$$\beta_2+2\beta_3+3\beta_4+\ldots\ldots+r\beta_{r+1}=\varkappa$$
$$\varkappa+\tau+\mu=m+nr \tag{361}$$
$$(\sigma=\beta_2+\beta_3+\beta_4+\ldots\ldots+\beta_{r+1}).$$

Aus ihr wäre zunächst, wie schon erwähnt, $\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}}$ zu ermitteln. Zu diesem Zwecke legen wir uns den Werth von Q abermals vor in folgender Gestalt, die mit der unter (318) gegebenen vollkommen identisch ist:

$$Q = \mathbf{S}\left[\mathfrak{X}_\lambda\, \varphi^\lambda\right] \tag{362}$$
$$\lambda + \omega = n$$

Wir unterwerfen ihn der Rechnungsoperation des Differenzirens nach φ und zwar $(n-\beta)$ Mal, wodurch alle mit der 0ten, 1sten ..... $(n-\beta-1)^{sten}$ Potenz von φ verbundenen Glieder wegfallen. Diese schliessen wir im Vorhinein aus dadurch, dass wir λ durch $\lambda+n-\beta$ ersetzen. Diess Alles durchgeführt gibt sodann:

$$\frac{d^{n-\beta}\, Q}{d\varphi^{n-\beta}} = \mathbf{S}\left[\frac{(\lambda+n-\beta)\,!}{\lambda\,!}\; \mathfrak{X}_{\lambda+n-\beta}\;\; \varphi^\lambda\right] \tag{363}$$
$$\lambda + \omega = \beta$$

oder, wenn wir λ mittelst der Bedingungsgleichung aus der Summenformel eliminiren,

$$\frac{d^{n-\beta}\, Q}{d\varphi^{n-\beta}} = \mathbf{S}\left[\frac{(n-\omega)\,!}{(\beta-\omega)\,!}\; \mathfrak{X}_{n-\omega}\;\; \varphi^{\beta-\omega}\right] \tag{364}$$
$$\lambda + \omega = \beta$$

In diese Gleichung nun substituiren wir den Werth (330) von $\mathfrak{X}_{n-\omega}$, in gleichem denjenigen von $\varphi^{\beta-\omega}$, der aus der ersten der Formeln (329) hervorgeht dadurch, dass man β durch $\beta-\omega$ ersetzt, und erhalten:

$$\frac{d^{n-\beta}\, Q}{d\varphi^{n-\beta}} = \mathbf{S}\left[\frac{(n-\omega)\,!}{\beta_1\,!\,\beta_2\,!\,\beta_3\,!\dots\beta_{r+1}\,!}\,[r]^{\beta_1}\,[r-1]^{\beta_2}\,[r-2]^{\beta_3}\dots[0]^{\beta_{r+1}}\,[n-\omega,\theta]\; x^{\theta+r\beta_1+(r-1)\beta_2+\dots+\beta_r}\right] \tag{365}$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots\dots\dots + \beta_r + \beta_{r+1} = \beta - \omega$$
$$\theta + \tau = m + \omega r$$
$$\lambda + \omega = \beta$$

Dass es mit dieser Formel dieselbe Bewandtniss habe, wie mit der für Q unmittelbar zuvor erhaltenen, schliesst man schon aus ihrer Ähnlichkeit; sie wird daher auch dieselbe Behandlung vertragen, die in der Einführung der mit A bezeichneten Polynome besteht. Wir bemerken daher, dass die erste der Bedingungsgleichungen mit r multiplizirt gebe:

$$r\beta_1 + r\beta_2 + r\beta_3 + \dots\dots\dots + r\beta_r + r\beta_{r+1} = r\beta - r\omega$$

Setzt man zudem in der zweiten $\tau = 0$, um dem θ den grössten möglichen Werth zu ertheilen, so wird sich der grösste mögliche Exponent von x unter dem Summenzeichen auch so schreiben lassen:

$$\theta + r\beta_1 + (r-1)\,\beta_2 + \dots\dots + \beta_r = m + r\beta - \beta_2 - 2\beta_3 - 3\beta_4 - \dots\dots - r\beta_{r+1}$$

und statuirt man jetzt der Kürze wegen so wie bei der Entwicklung von Q:

$$\beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + \dots\dots\dots + r\beta_{r+1} = \varkappa;$$

so heisst der Exponent von x: $m + r\beta - \varkappa$, wenn man daher die Grössen β_2, β_3, β_4, ... β_{r+1} auf alle möglichen Weisen so wählt, dass sie die vorliegende Gleichung erfüllen und zwar für ein

erfüllen, und summiren alle so erhaltenen Glieder, so ergibt sich der vollständige Werth von $\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}}$ in combinatorischer Gestalt:

$$\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}} = \mathbf{S}\left[\frac{[r-1]^{\beta_2}\,[r-2]^{\beta_3}\,\ldots\ldots\ldots\,[0]^{\beta_{r+1}}}{\beta_2!\,\beta_3!\,\ldots\ldots\ldots\,\beta_{r+1}!}\,A_{m-\tau}^{(n-\beta+\sigma)}\,x^{m+r\beta-\varkappa-\tau}\right]$$

(368)
$$\beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + \ldots\ldots\ldots + r\beta_{r+1} = \varkappa$$
$$\varkappa + \tau + \mu = m + r\beta$$
$$(\sigma = \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \ldots\ldots\ldots + \beta_{r+1}).$$

Auch der früher gewonnene Werth von Q ist in dieser Formel enthalten und geht aus ihr hervor, wenn man $\beta = n$ setzt. Sie lehrt als wichtiges Ergebniss, dass, wenn man im Besitze von Q ist, man daraus auch seine sämmtlichen nach φ genommenen Differentialquotienten auf eine sehr einfache Weise ableiten könne, dadurch nämlich, dass man den Differentiationsindex von einem jeden A vergrössert um die Anzahl der Differentiationen, die dem Q zugefügt werden, und jeden Exponenten von x um das r-fache dieser Anzahl verringert. Diess ist, wie gesagt, eine wichtige Wahrnehmung und zwar zunächst bei der Construction der transformirten Gleichung, wenn sie nur theilweise, so wie bisher jene des letzten Coefficienten in ihren ersten und vorherrschenden Gliedern unternommen wird. Gleichwie wir nämlich gezeigt haben, dass in diesem letzten Coefficienten, dem von z — man sehe die Gleichung (325) — ein Glied gleich Q seiner Gradzahl nach, genommen nach x, vorherrsche, die Gradzahl der Summe der übrigen um $r+1$ überbiethend; so lässt sich auch darthun, dass in dem nächst vorangehenden Coefficienten, dem von z' nämlich, ein Glied gleich $\frac{1}{1!}\frac{dQ}{d\varphi}$ auf dieselbe Weise die übrigen in der Zahl seiner Dimensionen nach x um $r+1$ Einheiten überrage und genau auf dieselbe Weise werden in den Coefficienten von z'', z''', ... z^{n} die Differentialquotienten von Q:

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2Q}{d\varphi^2},\quad \frac{1}{3!}\frac{d^3Q}{d\varphi^3},\quad \ldots\ldots\ldots\quad \frac{1}{n!}\frac{d^nQ}{d\varphi^n}$$

vorherrschen. Diess verstattet die Bildung der Anfangsglieder $r+1$ an der Zahl sämmtlicher Coefficienten aus den Anfangsgliedern des letzten unter ihnen, von denen sieben unter (359) in Detail angeführt und zur Bestimmung von $[r]$, $[r-1]$, $[r-2]$, ... $[0]$ der Nulle gleichgesetzt worden sind. Es ist nämlich hiezu weiter Nichts nothwendig, als, wenn man den zu $z^{(h)}$ gehörigen Coefficienten haben will, jedem der A in eben den Formeln (359) noch h fernere Striche hinzuzufügen und durch die Factorielle $h!$ zu dividiren. Diess Ergebniss wird uns bei der Erörterung der Ausnahmsfälle von Nutzen sein. Bevor wir jedoch zu dieser schreiten, wollen wir die Coefficienten der transformirten Gleichung in z durch gehörige Substitution der bereits unter (329) und (365) angeführten polynomischen Werthe von φ'^{γ}, φ''^{δ} ..... und von $\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}}$ aus (325) vollständig absteigend nach x geordnet darstellen. Der letzte, zu z gehörige von ihnen, aus dem, wie eben gesagt, die übrigen mit Leichtigkeit abgeleitet und unmittelbar niedergeschrieben werden können, und der früher mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnet worden ist, geht kraft dieser Substitutionen über in:

$$\mathfrak{F} = \mathrm{S}\left\{\frac{1}{2!^{\gamma}\,3!^{\delta}\,4!^{\varepsilon}\ldots\beta_2!\,\beta_3!\ldots\beta_{r+1}!\,\gamma_1!\,\gamma_2!\ldots\gamma_r!\,\delta_1!\,\delta_2!\ldots\delta_{r-1}!\,\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\ldots\varepsilon_{r-2}!\ldots} \times\right.$$

$$\times\; r^{\gamma_1+\delta_1+\varepsilon_1+\cdots}\,.\,(r-1)^{\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots}\,.\,(r-2)^{\gamma_3+\delta_2+\delta_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots}\ldots\ldots\ldots \times$$

$$\times\; [r]^{\gamma_1+\delta_1+\varepsilon_1+\cdots}\,.\,[r-1]^{\beta_2+\gamma_2+\delta_2+\varepsilon_2+\cdots\cdots}\,.\,[r-2]^{\beta_3+\gamma_3+\delta_3+\varepsilon_3+\cdots\cdots}\ldots\ldots\ldots \times$$

$$\left.\times\; A_{m-\tau}^{(n-\beta+\sigma)}\,.\,x^{(r-1)\gamma_1+(r-2)(\gamma_2+\delta_1)+(r-3)(\gamma_3+\delta_2+\varepsilon_1)+\ldots\ldots\ldots+m+r\beta-\kappa-\sigma}\right\}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma = \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_{r+1})& \\
\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + \ldots\ldots\ldots = n& \\
\beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + \ldots\ldots\ldots + r\beta_{r+1} = \kappa& \\
\kappa + \tau + \mu = m + r\beta& \qquad (369)\\
\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots\ldots\ldots + \gamma_r = \gamma& \\
\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{r-1} = \delta& \\
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots\ldots\ldots + \varepsilon_{r-2} = \varepsilon& \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&
\end{aligned}$$

Sucht man auch die übrigen auf eben dieselbe Weise durch unmittelbares Substituiren zu ermitteln, so ergibt sich für sie genau dieselbe combinatorische Summenformel, nur unterschieden durch eine einzige der angehängten Bedingungsgleichungen, die erste nämlich, die allgemein bei dem Coefficienten, der zu $z^{(\rho)}$ gehört und den wir früher mit $\frac{d^{\rho}\mathfrak{F}}{d\varphi^{\rho}}$ bezeichnet haben, übergeht in:

$$\beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = n - \rho.$$

Diese Wahrnehmung führt zu einer sehr einfachen Bildungsweise sämmtlicher Coefficienten aus dem hier aufgezeichneten letzten unter ihnen; sie besteht darin, dass man allen A in demselben im oben angehängten Differentiationsindex der Reihe nach $1, 2, 3, \ldots\ldots n$ fernere Striche anhängt, und zu gleicher Zeit die Exponenten der successiven Potenzen von x vermindert um Einheiten r, $2r$, $3r$, ... nr an der Zahl und alle Glieder auslässt, denen bei diesem Verfahren negative Exponenten des x zufallen würden. Wir überzeugen uns von der Richtigkeit dieser Regel durch folgende Erwägungen. Gesetzt man habe die Bildung des Coefficienten von z, der vorliegt, üblichermassen damit angefangen, dass man sich alle Auflösungen der angehängten Bedingungsgleichungen in ganzen positiven Zahlen tabellarisch verschafft und die Tabelle der Werthe vollendet. Die von β stehen in der ersten Spalte, die von μ in der letzten; ohne an den Werthen der übrigen griechischen Buchstaben irgend etwas zu ändern, vermindern wir bloss sämmtliche β, die eine solche Verringerung vertragen, um ρ Einheiten und lassen die übrigen Gruppen von Auflösungen, für welche β durch eine solche Verringerung kleiner ausfallen würde als Null, weg; so erhalten wir aus der Tabelle, die der Bildung von $\mathfrak{F}$ zu Grunde liegt, die andere, welche die Bildung von $\frac{d^{\rho}\mathfrak{F}}{d\varphi^{\rho}}$ begründet, und welche sich nur darin von der früheren unterscheidet, dass in ihr sämmtliche Zahlen der ersten Spalte um ρ Einheiten kleiner und sämmtliche

24

Zahlen der letzten Spalte um $r\rho$ Einheiten geringer und überdem Glieder in gewisser Anzahl ausgelassen sind. Nun kömmt aber β in der Summenformel nur an zwei Orten, nämlich im Differentiationsindex des A und im Exponenten von x, und zwar in der Form $r\beta$ vor, μ aber ist darin gar nicht vorhanden. Man wird daher den bereits entwickelt gedachten Ausdruck für $\mathfrak{J}$ in jenen für $\frac{d^\rho \mathfrak{J}}{d\varphi^\rho}$ verwandelt haben, wenn man dem A überall, wo dieses Zeichen vorkömmt, um ρ Striche im Differentiationsindex mehr gibt, und zugleich den Exponenten von x um $r\rho$ Einheiten verkleinert. Da im Substitutionsresultate der Natur der Sache nach Potenzen mit negativen Exponenten von x nicht vorkommen können, so sind diejenigen Glieder, denen durch eine solche Verringerung ein negativer Exponent zufallen würde, alle wegzulassen und weil der eigentliche Coefficient von $z^{(\rho)}$ das Produkt $\frac{1}{\rho!}\frac{d^\rho \mathfrak{J}}{d\varphi^\rho}$ ist, so hat zur vollständigen Bildung desselben zu dem eben angedeuteten Verfahren noch die Division durch $\rho!$ hinzuzutreten.

Da hiemit die Bildung der transformirten Differentialgleichung als abgeschlossen zu betrachten ist, so können wir zur Discussion übergehen der Gleichungen (359), denen die Werthe von $[r]$, $[r-1]$, $[r-2]$, ... $[0]$ zu entnehmen sind, und zur Erörterung der verschiedenen Formen, welche die particulären Integrale der Differentialgleichung in allen denkbaren Ausnahmsfällen anzunehmen vermögen. Da wir diese Untersuchung in §. 2 der Transformationslehre in einzelnen Beispielen umständlich durchgeführt haben, so können wir uns hier damit begnügen, nur die Methode einer solchen allgemeinen Untersuchung anzudeuten. Wir werden bei diesem Beginnen durch die Andeutungen der Formenlehre unterstützt, welche mindestens dazu dienen können, unsere Erwartungen festzustellen. Es ist uns nämlich bekannt, dass eine jede Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung betrachtet werden könne als eine Zusammensetzung von mehreren solchen von niedereren Ordnungen, nur muss die Summe aller Ordnungszahlen der Zahl n gleichkommen. Setzt man noch hinzu, dass die particulären Integrale einer Differentialgleichung, in der Form $e^{\int \varphi dx}$ gedacht, auch irrationale φ enthalten können, jedoch gruppenweise, z. B. zwei abhängig von einer Gleichung des zweiten Grades, drei abhängig von einer algebraischen Gleichung des dritten Grades u. s. w., so geht bei dieser möglichen Beschaffenheit der Functionen φ unmittelbar hervor, dass man im Verlaufe derjenigen Rechnung, die gegenwärtig der Gegenstand unserer Untersuchung ist, und bei der absteigenden Entwicklung des φ auf Irrationalgrössen gelegentlich stossen werde, die aus der Auflösung einer algebraischen Gleichung hervorgehen, die den n^{ten} Grad zwar nicht übersteigt, die aber jede niedrigere Gradzahl anzunehmen vermag, so jedoch, dass sich diese Irrationalgrössen gegenseitig ausschliessen in dem Sinne, dass, wenn es einmal nachgewiesen ist, dass die Functionen φ von r verschiedenen particulären Integralen aus einer algebraischen Gleichung des r^{ten} Grades als Wurzeln hervorgehen, daraus unmittelbar folgt, dass die $n-r$ übrigen φ in den annoch rückständigen particulären Integralen höchstens durch eine algebraische Gleichung vom Grade $n-r$ zusammenzuhängen vermögen; und wenn ferner dargethan ist, dass einige unter diesen letzteren, s an der Zahl, wieder unter sich durch eine algebraische Gleichung des s^{ten} Grades verknüpft sind, die übrigen $n-r-s$ Wurzeln sein können nur von einer algebraischen Gleichung von eben dieser Gradzahl $n-r-s$ u. s. w. Wir werden daher im weiteren Verlaufe der Rech-

nung gelegentlich Quadrat = dritten, vierten Wurzeln u. s. w. begegnen können, gruppenweise gehörig zu zwei, drei und vier particulären Integralen. In welcher Weise man zu solchen gelangen könne, sollen uns die Gleichungen (359) sagen, die wir erhalten haben, die Coefficienten der höchsten Potenzen von x in dem letzten Gliede der transformirten Differentialgleichung, dem mit dem Factor z verbundenen nämlich, der Nulle gleich setzend. An und für sich genommen werden sie zwar zu diesem Zwecke annoch unzureichend, nachdem man im Verlaufe der Untersuchung auch der Anfangsglieder der Coefficienten von z', z'', ... benöthigt. Nachdem jedoch, wie oben dargethan, diese aus den zu z gehörigen sehr einfach dadurch abgeleitet werden, dass man einem jeden A beziehlich um 1, 2, 3, ... Striche mehr gibt und gleichzeitig durch $1!$, $2!$, $3!$, ... dividirt, so ist mit der Kenntniss des letzten Coefficienten zugleich die der übrigen factisch errungen, und wir können auf Grundlage der Gleichungen (359) alsogleich zur Discussion der transformirten Differentialgleichung schreiten.

Die erste von ihnen, die $A_m = 0$ nämlich, hat nie mehr als n, manchmal sogar weniger Wurzeln, gehörig offenbar zu eben so vielen particulären Integralen, unter welchen noch überdiess gleiche vorhanden sein können, und zwar nicht, wie sonst bei algebraischen Gleichungen ausnahmsweise, sondern in der Regel. Man muss nämlich in der Regel annehmen, dass in der Differentialgleichung nicht lauter Ansteigungen um r Einheiten in der Gradzahl auf das Paar, sondern auch andere, ganz und gebrochen, positiv und negativ vorkommen, namentlich geringere. Beim Vorhandensein dieser Letzteren aber bekommt die Gleichung $A_m = 0$ jedesmal eine gewisse Anzahl von gleichen Wurzeln Null, so dass also die Fälle verschiedener und gleicher Wurzeln in dieser algebraischen Gleichung nicht subordinirte, sondern coordinirte Fälle sind, d. h. die $A_m = 0$ wird im Allgemeinen jederzeit eine Anzahl verschiedener und eine gewisse andere Anzahl gleicher Wurzeln gewöhnlich gleich Null besitzen. In Bezug auf die Ersteren ist das Resultat der Untersuchungen ein sehr einfaches, für sie gibt nämlich die zweite der Gleichungen (359) den Werth von $[r-1]$ jedesmal und unfehlbar, weil A'_m nicht gleich Null ist; die dritte liefert eben so und aus dem Grunde $[r-2]$; die vierte $[r-3]$ u. s. w. bis zur $(r-1)^{\text{sten}}$, der wir den Werth von $[0]$ entnehmen. Der unter (326) ganz und rational vorausgesetzte Werth von φ wird also vollständig in allen seinen Bestandtheilen erhalten und es zeigt sich auch nirgends eine Spur einer Irrationalgrösse in dem Factor der zweiten Classe des particulären Integrales. Wenn also gleichwohl in demselben noch eine solche vorhanden sein könnte, so fällt sie offenbar in den multiplicativen Bestandtheil der ersten Classe dieses particulären Genüge leistenden Werthes. Gleiche Wurzeln der Gleichung $A_m = 0$ führen zu viel mannigfaltigeren analytischen Erscheinungen, und diese sind es, die wir hier bloss anzudeuten unternehmen, nachdem wir ohnehin wissen, was zu erwarten stehe und auch in speciellen Fällen bereits gesehen haben, auf welche Weise sich unsere Erwartungen realisiren. Nehmen wir also, stets vom einfachsten Falle beginnend, an, es habe die $A_m = 0$ zwei gleiche Wurzeln, gleichgiltig ob gleich Null oder davon verschieden, die bekanntlich auch die $A'_m = 0$ erfüllen. Unter dieser Voraussetzung sehen wir, dass bereits der zweiten der Gleichungen (359) nur ausnahmsweise Genüge geleistet werden kann, dann, wenn der wiederholte

Wurzelwerth für $[r]$, der die $A_m = 0$, auch die $A_{m-1} = 0$ erfüllt. Abgesehen von diesem letzteren Falle ergibt sich daher die vorausgesetzte Form von φ, nämlich:

$$\varphi = [r]\, x^r + [r-1]\, x^{r-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + [0] \tag{370}$$

schon bei dem zweiten Gliede als unzulässig. Es hindert aber Nichts, die Transformation zu beschränken auf das erste Glied von φ, d. h. $\varphi = [r]\, x^r$ anzunehmen. Erwägt man nun, dass für das vollständige φ die Coefficienten von z'', z', z, respective der Schluss der Differentialgleichung in ihren Anfangsgliedern aufgeschrieben, aussehen wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2!} z''\,.\Big[A''_m\, x^{m+(n-2)r} + \ldots\ldots\ldots\ldots\Big] + \\
&+ \frac{1}{1!} z'\,.\Big[A'_m\, x^{m+(n-1)r} + (A'_{m-1} + [r-1]\, A''_m)\, x^{m+(n-1)r-1} + \ldots\ldots\ldots\Big] + \\
&+ z\,.\Big[A_m\, x^{m+nr} + (A_{m-1} + [r-1]\, A'_m)\, x^{m+nr-1} + (A_{m-2} + [r-1]\, A'_{m-1} + \\
&\qquad + \frac{1}{2}[r-1]^2\, A''_m + [r-2]\, A'_{m-1})\, x^{m+nr-2} + \ldots\ldots\Big],
\end{aligned} \tag{371}$$

und statuirt man noch überdiess, φ wirklich auf sein erstes Glied zurückführend:

$$[r-1] = [r-2] = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

so gewahrt man alsogleich in den vorliegenden drei Endcoefficienten beziehlich die Gradzahlen:

$$m + (n-2)\, r, \qquad m + (n-1)\, r - 1, \qquad m + nr - 1,$$

also im Bereiche derselben eine von dem in der übrigen Differentialgleichung üblichen r verschiedene Ansteigung von $r - \frac{1}{2}$ Einheiten auf zwei Coefficientenpaare, darauf hindeutend, dass für den doppelten Wurzelwerth für $[r]$ und in zwei particulären Integralen das absteigend geordnete φ nicht mehr den Werth (370), sondern einen von anderer Form besitze, nämlich:

$$\varphi = [r]\, x^r + \left[r - \frac{1}{2}\right] x^{r-\frac{1}{2}} + [r-1]\, x^{r-1} + \ldots\ldots\ldots \tag{372}$$

Den Vorschriften der Formenlehre zufolge kennt man sogar den Doppelwerth von $\left[r - \frac{1}{2}\right]$. Er leistet nämlich der binomischen Gleichung:

$$\frac{1}{2} A''_m \left[r - \frac{1}{2}\right]^2 + A_{m-1} = 0 \tag{373}$$

Genüge, und gehört in seiner positiven Bedeutung zu dem einen, in seiner negativen aber zum anderen der beiden particulären Integrale. Die Formeln jedoch, die der gegenwärtige Paragraph gebracht hat, dienen nicht mehr zur Ermittlung der übrigen Glieder der beiden Functionen φ, und man setzt voraus, dass der Rechner, um ihrer habhaft zu werden, in der Regel zur Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen anstatt der x, durch die die Irrationalgrösse $\sqrt{x}$ herauszuschaffen ist,

greifen werde. Diese neue Transformation wird überflüssig, wenn die vorliegende binomische Gleichung vermöge des bestehenden $A_{m-1}=0$ gleiche verschwindende Wurzeln bekömmt, weil dann die irrationalen Formen wieder in rationale übergehen. Hiervon überzeugen uns die Gleichungen (359), von welchen in diesem Falle für ein der ersten Genüge leistendes doppeltes $[r]$ auch die zweite identisch erfüllt ist, die dritte aber in:

$$0 = A_{m-2} + [r-1]\, A'_{m-1} + \frac{1}{2}\,[r-1]^2\, A''_m \tag{374}$$

übergeht, also nicht mehr, wie sonst, $[r-2]$ bestimmt, sondern zur Ermittlung von $[r-1]$ dient und für dieses zwei in der Regel verschiedene Werthe biethet, zu deren jedem, falls sie wirklich von einander verschieden sind, die nächstfolgende der Gleichungen (359) ein $[r-2]$ u. s. w. hinzufügt. so dass man also auf keine widersprechende Gleichung und somit auch auf keine Irrationalgrösse mehr stösst. Man hat also wieder ein rationales φ durch die gleichen und verschwindenden Wurzeln einer binomischen Gleichung herbeigeführt, nur reichen zu seiner Berechnung nicht mehr nur $r+1$ der Nulle gleich gesetzte Anfangscoefficienten hin, sondern es sind deren $r+2$ vonnöthen, von welchen der letzte nicht mehr ausschliesslich zu Q gehörig ist. Allein auch die vorliegende Gleichung des zweiten Grades (374) in $[r-1]$ kann gelegentlich gleiche Wurzeln haben, wenn:

$$A'_{m-1} + [r-1]\, A''_m = 0 \tag{375}$$

wird. Da dem zufolge der Coefficient von $[r-2]$ in der folgenden in Null übergeht, so vermag sie nicht mehr zur Bestimmung dieses $[r-2]$ zu dienen und geht sammt der darauffolgenden, bei welchen allen derselbe Umstand eintritt, in eine widersprechende über, d. h. in die:

$$0 = A_{m-3} + [r-1]\, A'_{m-2} + \frac{1}{2}\,[r-1]^2\, A''_{m-1} + \frac{1}{6}\,[r-1]^3\, A'''_m. \tag{376}$$

Der Widerspruch, der in ihr in der Regel liegt, deutet darauf hin, dass die obangeführte Form des φ unter (370) unstatthaft sei, jedoch erst bei dem dritten Gliede, daher man sich immer erlauben kann, den Werth von φ auf seine zwei ersten Glieder zu beschränken, d. h.:

$$\varphi = [r]\, x^r + [r-1]\, x^{r-1} \tag{377}$$

zu statuiren. Thut man diess, so gewahrt man in den drei Endcoefficienten der transformirten Gleichung, die hier unter (371) vorliegen, beziehlich die Gradzahlen:

$$m + (n-2)\, r, \qquad m + (n-1)\, r - 2, \qquad m + nr - 3.$$

Sie weisen eine repartirte Ansteigung von $r - \frac{3}{2}$ auf das Coefficientenpaar aus, deuten demnach hin auf zwei particuläre Integrale, denen die folgende Form der Function φ angehörig ist:

$$\varphi = [r]\, x^r + [r-1]\, x^{r-1} + \left[r - \frac{3}{2}\right] x^{r-\frac{3}{2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{378}$$

Gemäss den Vorschriften der Formenlehre lässt sich auch der Doppelwerth von $\left[r-\frac{3}{2}\right]$ angeben, er ist der binomischen Gleichung:

$$\frac{1}{2} A''_m \left[r-\frac{3}{2}\right]^2 + A_{m-2} + [r-1] A'_{m-2} + \frac{1}{2} [r-1]^2 A''_{m-1} + \frac{1}{6} [r-1]^3 A'''_m = 0 \tag{379}$$

entnommen, und gehört in seiner positiven Bedeutung dem einen, in seiner negativen Bedeutung dem anderen der beiden particulären Integrale zu, vermag jedoch ausnahmsweise auch in einen Doppelwerth Null zu übergehen und bewerkstelligt dann wieder die Zurückführung des irrationalen φ auf eine rationale. Hievon überzeugt man sich abermals durch die Gleichungen (359), von welchen die erste ein doppeltes $[r]$ liefert, die zweite identisch erfüllt ist, die dritte einen Doppelwerth von $[r-1]$ liefert, die vierte wieder identisch wird, die folgenden aber der Reihe nach $[r-2]$, $[r-3]$, $[r-4]$ .... bestimmen. Man hat also wieder zu thun mit einem rationalen φ, nur genügen zu seiner Berechnung nicht mehr $r+1$ der Nulle gleich gesetzte Anfangscoefficienten, es sind vielmehr deren $r+3$ nothwendig und die Letzteren gehören nicht mehr ausschliesslich zum Polynome Q. Fährt man auf diese Weise in der Untersuchung fort, so sieht man die Irrationalgrösse $\sqrt{x}$ abwechselnd erscheinen und verschwinden, und zwar immer beim Auftauchen gleicher Wurzeln. Das Erscheinen nämlich bewirken gleiche Wurzeln nicht binomischer, oder wenigstens nicht nothwendig binomischer Gleichungen, entnommen dem Verzeichnisse (359) und sämmtlich dem letzten Gleichungscoefficienten entsprungen, das Verschwinden wird immer durch das Vorkommen gleicher Nullwurzeln der binomischen Gleichungen bewirkt, deren Elemente nach den Vorschriften der Formenlehre aus verschiedenen Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesucht werden. Andere Irrationalen als $\sqrt{x}$ kommen bei nur zwei gleichen Wurzeln der $A_m = 0$ niemals vor. Je eine grössere Anzahl der letzterwähnten binomischen Gleichungen gleiche Nullwurzeln biethet, desto grösser ist auch die Anzahl der im Verzeichnisse (359) der ersteren enthaltenen und identisch erfüllten, die dann auch nicht mehr zur Bestimmung eines Gliedes der Function φ dienen können, und ersetzt werden müssen durch einen der Nulle gleich gesetzten Coefficienten einer späteren Potenz von x. Zu gleicher Zeit wächst die Anzahl der Anfangsglieder der Function φ, welche zweien particulären Integralen gemeinschaftlich sind, und trifft es sich einmal, dass das ganze unter (370) aufgestellte φ den zwei particulären Integralen gemeinschaftlich wird, so hat man, um zu den Werthen von $[r]$, $[r-1]$ ..... $[0]$ zu gelangen, nicht eben so viele, d. h. $r+1$ Anfangsglieder des letzten Coefficienten der transformirten Differentialgleichung, sondern vielmehr deren $2r+1$ der Nulle gleich zu setzen, weil r an der Zahl der so gewonnenen Bestimmungsgleichungen unter solchen Umständen sich in identische verwandeln.

Gehen wir jetzt über zu dem nächst complicirteren Falle dreier gleicher Wurzeln der Gleichung: $A_m = 0$, welche zugleich auch, wie bekannt, die $A'_m = 0$ und $A''_m = 0$ erfüllen werden. Die zweite der Gleichungen (359) hört dann im Allgemeinen auf, $[r-1]$ zu geben, und verwandelt sich in die meist widersprechende: $A_{m-1} = 0$. Es ist daher nicht erlaubt, φ in der oben angedeuteten Form (370) anzunehmen, und namentlich erscheint dieselbe schon bei ihrem zweiten Gliede, dem mit $[r-1]$

versehenen unzulässig. Es hindert uns aber Nichts, φ zu beschränken auf sein erstes Glied, d. h. $\varphi = [r]\, x^r$ anzunehmen. Um nun die Wirkung dieser Substitution klar vor Augen zu haben, nehmen wir die vier letzten Coefficienten der Differentialgleichung, nur in ihren Anfangsgliedern aufgezeichnet, so wie sie dem vollständigen Polynome φ entsprechen, vor. Sie sind:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3!} z''' \left[A'''_m\, x^{m+(n-3)r} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right] + \\
&+ \frac{1}{2!} z'' \left[A''_m\, x^{m+(n-2)r} + (A''_{m-1} + [r-1]\, A'''_m)\, x^{m+(n-2)r-1} + \ldots\ldots\ldots \right] + \\
&+ \frac{1}{1!} z' \Big[A'_m\, x^{m+(n-1)r} + (A'_{m-1} + [r-1]\, A''_m)\, x^{m+(n-1)r-1} + \\
&\qquad + \left(A'_{m-2} + [r-1]\, A''_{m-1} + \frac{1}{2}[r-1]^2 A'''_m + [r-2]\, A''_{m-1}\right) x^{m+(n-1)r-2} + \ldots\ldots \Big] + \qquad (380) \\
&+ z\Big[A_m x^{m+nr} + (A_{m-1} + [r-1]A'_m) x^{m+nr-1} + \left(A_{m-2} + [r-1]A'_{m-1} \frac{1}{2}[r-1]^2 A''_m + [r-2]A'_{m-1}\right) x^{m+nr-2} + \\
&+ \left(A_{m-3} + [r-1]A'_{m-2} + \frac{1}{2}[r-1]^2 A''_{m-1} + [r-2]A'_{m-2} + \frac{1}{6}[r-1]^3 A'''_m + [r-1][r-2]A''_m + [r-3]A'_m\right) x^{m+nr-3} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big].
\end{aligned}$$

Von den übrigen und vorangehenden Coefficienten genügt es, zu bemerken, dass, weil A'''_m vorausgesetztermassen von Null verschieden ist, sie die gemeinsame Ansteigung von r Einheiten und zwar ausgedehnt auf $n-3$ Paare bieten werden, und nur bei den drei hier vorliegenden Coefficientenpaaren wird ein anderer Sachverhalt eintreten. Da nämlich unter Voraussetzung $A_m = A'_m = A''_m = 0$ und A'''_m von Null verschieden die Gradzahlen der vier letzten Coefficienten augenscheinlich

$$m + (n-3)\, r, \qquad m + (n-2)\, r - 1, \qquad m + (n-1)\, r - 1, \qquad m + nr - 1$$

sind, so gewahrt man bei ihnen eine gemeinsame grösste Ansteigung von $3r - 1$ Einheiten auf drei Coefficientenpaare, und somit von $r - \frac{1}{3}$ Einheiten auf das Paar, zum Zeichen, dass die Function φ nicht mehr die ihr unter (370) vorausgesetzte Gestalt trage, sondern eine andere davon verschiedene, einstweilen noch unbekannte, von der wir nur wissen, dass sie, in zwei Anfangsgliedern aufgeschrieben, folgendermassen aussehe:

$$\varphi = [r]\, x^r + \left[r - \frac{1}{3}\right] x^{r-\frac{1}{3}}. \qquad (381)$$

Das $[r]$ ist gleich der dreifachen Wurzel r der $A_m = 0$ und dreien partikulären Integralen gemeinschaftlich, dahingegen $\left[r - \frac{1}{3}\right]$ eine Wurzel der binomischen Gleichung:

$$\frac{1}{3!} A'''_m \left[r - \frac{1}{3}\right]^3 + A_{m-1} = 0 \qquad (382)$$

folglich dreideutig und in diesen seinen drei verschiedenen Bedeutungen eben so vielen particulären Integralen angehörig ist, zunächst dazu dienend, sie von einander zu sondern. Wir stossen also hier auf neue Irrationalgrössen und zwar auf dritte Wurzeln, deren Erscheinung unsere Rechnung unterbricht und irgend einen andern Weg zu gehen nöthigt. Sie verschwinden wieder, so bald man $A_{m-1} = 0$ hat, in welchem Falle die (382) drei gleiche Nullwurzeln bekommt und die vier letzten Differentialgleichungscoefficienten beziehlich die Gradzahlen:

$$m + (n-3)\, r, \quad m + (n-2)\, r - 1, \quad m + (n-1)\, r - 1, \quad m + nr - 2$$

bieten. Die grösste Ansteigungszahl ist hier: $r - \frac{1}{2}$, ausgedehnt auf zwei Coefficientenpaare. Hierauf folgt noch die Ansteigung von $r - 1$ Einheiten auf ein einziges, nämlich das letzte Paar. Wir schliessen hieraus nach unseren bekannten Vorschriften, dass bei zwei particulären Integralen die Function φ, in ihren zwei Anfangsgliedern aufgezeichnet, folgendermassen aussehe:

$$\varphi = [r]\, x^r + \left[r - \frac{1}{2}\right] x^{r-\frac{1}{2}}, \tag{383}$$

und dass namentlich $\left[r - \frac{1}{2}\right]$ bereits doppelwerthig und gezogen sei aus der binomischen Gleichung:

$$\frac{1}{3!} A'''_m \left[r - \frac{1}{2}\right]^2 + A'_{m-1} = 0. \tag{384}$$

Bei dem dritten particulären Integrale hingegen besteht die Form (370) des φ fort, und es kann diese Function ohne Anstand ganz aus dem Complexe der Formeln (359) berechnet werden, von welchen die erste das dreideutige $[r]$ bestimmt, die zweite identisch wird, die dritte einen einzigen Werth von $[n-1]$ liefert, die vierte ebenso $[r-2]$ bestimmt, u. s. w., bis man endlich, um $[0]$ zu erhalten, die $(r+2)^{\text{te}}$ dieser Gleichungen in Anwendung zieht. Da alle diese Grössen in den auf einanderfolgenden Gleichungen den Factor A'_{m-1} haben, welcher nicht gleich Null vorausgesetzt wird, so geht diese Berechnung des φ ohne Hinderniss von statten. Wäre dagegen zufälligerweise auch $A'_{m-1} = 0$, so hätte diess alsogleich zwei verschiedene gleiche Wurzeln der algebraischen (384) zur Folge, womit wieder eine Formänderung des φ verknüpft ist; es verschwinden nämlich die Quadratwurzeln aus demselben und machen Cubikwurzeln in dreien particulären Integralen Platz. In der That bieten dann die vier letzten Differentialgleichungscoefficienten die Gradzahlen:

$$m + (n-3)\, r, \quad m + (n-2)\, r - 1, \quad m + (n-1)\, r - 2, \quad m + nr - 2$$

mit einer gemeinschaftlichen grössten Ansteigung von $\frac{r-2}{3}$ Einheiten auf das Paar. Die Function φ hat also, in ihren zwei Anfangsgliedern aufgezeichnet, die Form:

$$\varphi = [r]\, x^r + \left[r - \frac{2}{3}\right] x^{r-\frac{2}{3}} \tag{385}$$

mit eindeutigem $[r]$ und dreideutigem $\left[r-\frac{2}{3}\right]$, weil es eine Wurzel ist der binomischen Gleichung:

$$\frac{1}{3!}A''_m\left[r-\frac{2}{3}\right]^3+A_{m-2}=0.$$

Auch diese dritten Wurzeln verschwinden wieder, wenn die letzterwähnte binomische Gleichung gleiche Nullwurzeln bekommt, was dann der Fall ist, wenn nebst:

$$A_m=A'_m=A''_m=A_{m-1}=A'_{m-1}=0,$$

auch noch $A_{m-2}=0$ ausfällt, und machen einer rationalen Form Platz. Von den Bestimmungsgleichungen (359) werden dann die zweite und die dritte identisch, während die vierte in die:

$$0=A_{m-3}+[r-1]\,A'_{m-2}+\frac{1}{2}[r-1]^2\,A''_{m-1}+\frac{1}{6}[r-1]^3\,A'''_m$$

verwandelt, drei Werthe für $[r-1]$ liefert, die augenscheinlich dreien particulären Integralen angehören. Sind diese von einander verschieden, so gibt die fünfte der erwähnten Bestimmungsgleichungen für $[r-2]$ einen Ausdruck, der durch:

$$A'_{m-2}+[r-1]\,A''_{m-1}+\frac{1}{2}[r-1]^2\,A'''_m$$

gebrochen ist. Die darauffolgende sechste gibt einen ebenso gestalteten Werth von $[r-3]$, die siebente von $[r-4]$ u. s. w., bis man endlich der $(r+3)^{\text{ten}}$ den Werth von $[0]$ entringt. Man sieht sich daher zu einer rationalen Form zurückgeführt, den Fall ausgenommen, wo die (387) gleiche Wurzeln hat, entweder zwei oder drei an der Zahl, weil dann der hier aufgezeichnete gemeinsame Nenner der Werthe von $[r-2]$, $[r-3]$, ... der Nulle gleich wird, wodurch alle unbrauchbar gemacht werden.

Der aufmerksame Leser sieht jetzt schon, was der fernere Verfolg der Rechnungen bringen kann. Nachdem er die Erfahrung gemacht hat, dass beim Vorhandensein dreier gleicher Wurzeln zwischen das Glied mit x^r und mit x^{r-1} sich irgend ein anderes einzuschalten vermag mit einer der Potenzen $x^{r-\frac{1}{3}}$, $x^{r-\frac{1}{2}}$, $x^{r-\frac{2}{3}}$, so wird sich ihm daraus von selbst ergeben, dass auch, durch gleiche Wurzeln herbeigeführt, zwischen x^{r-1} und x^{r-2} Glieder zu erscheinen vermögen mit $x^{r-\frac{4}{3}}$, $x^{r-\frac{3}{2}}$, $x^{r-\frac{5}{3}}$ u. s. w. Sind solche nicht vorhanden, was wieder beim Vorhandensein gleicher Wurzeln statt hat, so wird nicht nur der Coefficient $[r-1]$, sondern auch $[r-2]$ durch zwei Gleichungen verweigert, die aufhören, Bestimmungsgleichungen zu sein, und identisch erfüllt sind. Man ist also genöthigt, $[r-2]$ zu ziehen aus der siebenten dieser Gleichungen, die dann, als nach diesem $[r-2]$ dem dritten Grade angehörig, dafür drei Werthe liefern wird, unter denen auch gleiche vorhanden sein können. Zwei gleiche führen Quadratwurzeln ein, drei gleiche hingegen Cubikwurzeln. Andere als diese den Gleichungen des zweiten und dritten Grades zukommende Irrationalgrössen kommen nicht vor, und diese erscheinen desto später, je öfter man gleichen Nullwurzeln der binomischen Gleichungen begegnet ist, und je

mehrere der im Complexe (359) enthaltenen ihren Charakter als Bestimmungsgleichungen verloren haben, und identisch geworden sind. Die Bestimmung von $[r-1]$, die sonst der zweiten dieser Gleichungen obliegt, kann aber nicht nur von dieser zweiten, sondern auch von der darauffolgenden dritten durch Identischsein verweigert werden. Ebenso können dann die fünfte und sechste zur Bestimmung von $[r-2]$ sich als untauglich erweisen, indem sie, identisch erfüllt, Bestimmungsgleichungen zu sein aufhören u. s. w. Die Coefficienten: $[r-1]$, $[r-2]$, ... $[0]$, die r an der Zahl sind, können daher durch $2r$ Gleichungen verweigert werden. Man wird somit zur vollständigen Bestimmung des φ mindestens $r+1$ und höchstens $3r+1$ gleich Null gesetzte Anfangsglieder des letzten Coefficienten der transformirten Differentialgleichung benöthigen, und namentlich $3r+1$ nur in demjenigen Falle, wo dasselbe rationale φ enthalten in der Form (370) allen dreien particulären Integralen gemeinschaftlich zugehört, so dass dieselben sich nur in einem Factor der erten Classe unterscheiden.

Hat man einmal Einsicht gewonnen in den Rechnungsgang bei zwei und drei gleichen Wurzeln der $A_m=0$, so ist es nicht mehr schwer, auch bei vieren und mehreren solchen die Erscheinungen des Calculs vorauszusehen. Man erschliesst in der That zunächst aus dem Umstande, dass vier gleiche Wurzeln vorhanden sind, dass in vier particulären Integralen dasselbe Anfangsglied von φ, nämlich $[r]x^r$ vorkömmt. Das nächstfolgende $[r-1]x^{r-1}$ wird aber nur dann demselben angehören, wenn die zweite, dritte und vierte der Gleichungen (359) ihren Charakter als Bestimmungsgleichungen verloren haben und identisch geworden sind, worauf dann die fünfte, als nach $[r-1]$ dem vierten Grade angehörig, vier Werthe dieser Grösse liefern wird. Werden diese erwähnten drei Gleichungen nicht identisch, wenigstens nicht alle, so ist auch das φ schon bei dem zweiten Gliede nicht mehr rational, und es verdrängen sich bei dem successiven Identischwerden erst der zweiten, dann der dritten, endlich der vierten von ihnen, vierte, dritte und zweite Wurzeln gegenseitig in leicht zu bestimmender Reihenfolge. Anderen Irrationalgrössen jedoch begegnet man nicht. Hat man wirklich vier von einander verschiedene $[r-1]$ gefunden, durch die sich die vier particulären Integrale von einander unterscheiden, so bleiben auch alle vier Polynome φ in den späteren Gliedern bis $[0]$ rational. Gleiche Werthe für $[r-1]$ hingegen führen dieselben Irrationalgrössen: vierte, dritte und zweite Wurzeln nämlich wieder ein. Soll sich die rationale Beschaffenheit des φ ausdehnen bis auf das dritte Glied $[r-2]x^{r-2}$, so ist überdem noch nothwendig, dass die sechste, siebente und achte der Gleichungen (359) die Eigenschaft, eine Bestimmungsgleichung zu sein, verliere, worauf dann die neunte für $[r-2]$ wieder der Werthe vier liefern wird. Sind diese von einander verschieden, so bleiben die φ wieder rational, verlieren aber diese Beschaffenheit, wenn unter den $[r-2]$ gleiche vorkommen u. s. w. Allgemein fordert ein jedes fernere Glied von φ, wenn es allen diesen vier Functionen gemeinschaftlich sein soll, einen Verlust von drei Bestimmungsgleichungen durch Identischwerden. Soll daher der ganze Factor zweiter Classe $e^{\int \varphi dx}$ vieren particulären Integralen gemeinschaftlich angehören, unter φ den Werth (370) verstanden, den wir ihm ursprünglich gegeben haben, so fordert diess einen Verlust von Bestimmungsgleichungen $3r$ an der Zahl, die durch der Nulle gleich gesetzte spätere Coefficienten ersetzt werden müssen, wodurch man zum Schlusse gelangt, dass zur

vollständigen Bestimmung des ganzen Polynomes φ mindestens $r+1$ und höchstens $4r+1$ Anfangsglieder des letzten Coefficienten der Differentialgleichung berechnet und der Nulle gleich gesetzt werden müssen. Diese Andeutungen mögen genügen, um den Rechner vorläufig zu orientiren.

Wenn es nun auch dem Gesagten zufolge nicht nothwendig ist, mehr als einen gewissen Theil des letzten Coefficienten der transformirten Differentialgleichung zu besitzen, um den vollständigen multiplicativen Bestandtheil zweiter Classe $e^{\int \tau dx}$ zu bestimmen, so weiss man doch selten im Voraus, wie ausgedehnt dieser Bestandtheil sei, d. h. aus wie viel Gliedern er bestehe, und andererseits benöthigt man der ganzen transformirten Differentialgleichung, wenn man die annoch rückständigen Factoren erster Classe der particulären Integrale kennen lernen will. Die Formel (369) gibt nun zwar zunächst den letzten Coefficienten, und dann durch einfaches Hinzufügen von Strichen, Verminderung der Exponenten von x und Strichen gewisser Glieder auch die übrigen Coefficienten alle. Diese Formel erscheint aber wegen der angehängten vielen Bedingungsgleichungen auf dem ersten Anblicke dermassen complicirt, dass man leicht an ihrer practischen Anwendbarkeit zweifeln könnte; eine leichte Bekanntschaft mit ihr jedoch in speciellen Fällen, wie sie in der Rechnungspraxis vorzukommen vermögen, in denen die ganze Zahl r stets einen mässigen numerischen Werth hat, und wodurch ein grosser Theil dieser Bedingungsgleichungen wegfällt, überzeugt uns leicht vom Gegentheile. Damit jedoch auch der Leser diese Überzeugung gewinne, wird es gut sein, wenn auch nicht die Formel, so doch die Bedingungsgleichungen für die einzelnen Fälle: $r=0,\ 1,\ 2,\ 3$ speciell aufzuzeichnen. Den Fall $r=0$ ausgenommen, wo sie zusammenschrumpfen in eine einzige nämlich $\tau+\mu=m$ lassen sie sich stets zurückführen auf deren nur zwei und diese zwei sind beziehlich für $r=1,\ 2,\ 3$:

$$r=1,\quad \beta+2\gamma_1=n,\quad \beta_2+\tau+\mu=m-\beta$$

$$r=2,\quad \beta+2(\gamma_1+\gamma_2)+3\delta_1=n,\quad \beta_2+2\beta_3+\tau+\mu=m-2\beta$$

$$r=3,\quad \beta+2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+3(\delta_1+\delta_2)+4\varepsilon_1=n,\quad \beta_2+2\beta_3+3\beta_4+\tau+\mu=m-3\beta$$

und es steht der Auffindung aller ihnen entsprechenden Auflösungen in ganzen positiven Zahlen keine erhebliche Schwierigkeit entgegen.

Die in diesem Paragraphe vorgetragene Analysis beschränkt sich auf die genaue Erörterung des Falles, wo sämmtliche Gleichungscoefficienten rationale und ganze Functionen von x und noch überdiess das mit φ bezeichnete Polynom rational und ganz ist. Sie zwingt also den Rechner, alsogleich abzubrechen, wie ihm irgendwie Irrationalgrössen entweder in den Gleichungscoefficienten vorkommen, oder im Verlaufe der Rechnung in die Function φ hineinfallen; setzt daher voraus, dass derselbe gelegentlich entweder von einer anderen Transformationsweise Gebrauch machen werde, die wo möglich geeignet ist, die Irrationalgrössen aus der Gleichung oder den Grössen φ herauszuschaffen, oder einen anderen Weg der Rechnung einschlagen wird, nicht die irrationalen φ, die bekanntlich bei einer rationalen Gleichung gruppenweise vorkommen, sondern vielmehr die rationale algebraische Gleichung suchend, welche diese irrationalen φ zu Wurzeln hat.

Es kann nun wohl die Frage entstehen, ob diese Beschränkung unserer Analysis auf ratio-

nale Formen nothwendig sei, und ob man nicht etwa auch im Stande gewesen wäre, eine irrationale Differentialgleichung zu transformiren und die ihren particulären Integralen entsprechenden, gleichviel ob rationalen oder irrationalen Werthe von φ aufzufinden. Diese Frage muss wohl in einer gewissen Beziehung beantwortet werden mit Ja; es wird jedoch nicht überflüssig sein, wenn wir auf die Schwierigkeiten eines solchen Beginnens hier zuvörderst aufmerksam machen, bevor wir, wie diess ins Werk gesetzt werden könne, andeuten.

Man bedenke daher zuvörderst, dass es Irrationalgrössen in den mannigfachsten Gestaltungen gibt: Wurzeln unter anderen Wurzelzeichen, die vielleicht wieder mannigfach aggregirt unter anderen Wurzelzeichen stehen. Hieraus folgt, dass es unmöglich sei, über die Form solcher irrationaler Coefficienten eine mehr als sehr specielle Voraussetzung zu machen, und, analytisch ausgedrückt, in die Rechnung niederzulegen. Irrationalgrössen, wie etwa $\sqrt[p]{x}$ in die Coefficienten hineinwerfen, das hiesse einen viel zu speciellen Fall zum Gegenstande der Erörterung machen, und die gewonnenen Resultate würden alsogleich nicht mehr passen, wie auch nur eine Differentialgleichung vorläge, die ein Paar sehr einfache Irrationalausdrücke, wie $\sqrt{x+a}$ und $\sqrt{x+b}$ enthielte. Hieran knüpft sich eine zweite Bemerkung: so lange nämlich die Function φ eine ganze und algebraische Function von x ist, bleibt es gänzlich gleichgiltig, ob dieses φ absteigend nach Potenzen von x, oder absteigend nach Potenzen von $x-\alpha$ geordnet vorausgesetzt wird. Es ist in dem einen, wie in dem anderen Falle ein geschlossener algebraischer Ausdruck. Diess hört aber auf, gleichgiltig zu sein, wie φ irrational wird, dann kann es vielleicht absteigend nach Potenzen von $x-\alpha$, oder theilweise nach $x^2 \pm a^2$ oder sonst wie geordnet einen brauchbaren, selbst geschlossenen Ausdruck liefern, während es auf jede andere Weise hingestellt zur Discussion der Differentialgleichung wenig oder gar Nichts beiträgt. Es lässt sich daher durchaus nicht im Voraus bestimmen, was der Rechner anzufangen habe mit einem irgend wie im Calcul aufzusuchenden irrationalen φ und die Behandlung desselben wird erst durch die jedesmaligen Umstände näher bestimmt.

Sollte indess Jemand wünschen, bei einer wie immer gestalteten irrationalen Differentialgleichung sich die Werthe von φ zu verschaffen, absteigend nach Potenzen von x mit gebrochenen Exponenten geordnet, so ist diess allerdings möglich und es dient Folgendes zur Begründung des hiezu einzuschlagenden Verfahrens: Man bekümmert sich zuvörderst um die Gradzahlen der Coefficienten, die gebrochen sein können. Um sie zu ermitteln, wird es aber mitunter nothwendig sein, die angedeuteten Wurzelausziehungen vorzunehmen in absteigender Reihenform, diess jedoch meistentheils nur in Einem oder in ein Paar Anfangsgliedern, höchstens so vielen nämlich, als nothwendig sind, um des Gliedes mit der höchsten Potenz von x in einem jeden Coefficienten habhaft zu werden. Nun betrachte man die in der Gleichung vorhandenen Ansteigungen und Abfälle und construire wie gewöhnlich das normale Polygon, um dadurch zur Kenntniss sämmtlicher Ansteigungszahlen r zu gelangen, so hat man eine theilweise Kenntniss des Anfangsgliedes $[r]\,x^r$ einer jeden Function φ, die dadurch vervollständigt wird, dass man auf die bekannte Weise den Coefficienten $[r]$ bestimmt aus denjenigen Anfangsgliedern der Differentialgleichungs-Coefficienten, deren Gradzahlen geometrisch als Ordinaten construirt,

das normale Polygon erreichen. So hat man also die Anfangsglieder sämmtlicher Functionen φ. Nun erkiese man eine von ihnen, die man näher kennen zu lernen wünscht, — $[r]\,x^r$ sei eben das Anfangsglied ihres φ — und transformire die Differentialgleichung vermittelst der Substitution:

$$y = e^{\int [r]\,x^r\,dx} \,.\, z.$$

Unsere Formel (325) in Verbindung mit (319) gibt das Resultat derselben, wenn man sich unter φ eben den monomischen Werth $[r]\,x^r$ vorstellt, und es ist hiebei nicht nöthig, die Irrationalgrössen in den Gleichungscoefficienten in entwickelter Gestalt zu haben. Diese werden daher auch in der transformirten Gleichung noch erscheinen, die Anzahl derselben noch um eine, nämlich die x^r noch vermehrend. Über den Charakter derselben ist zu bemerken: alle höheren Ansteigungen, als die um r Einheiten in der Gradzahl, finden sich ungeändert in beiden Gleichungen, in der gegebenen in y und in der transformirten in z. Alle geringeren Ansteigungen, als um r Einheiten, sind in solche von r Einheiten übergegangen und nur diejenigen, welche gerade r Einheiten betrugen, können sich in geringere verwandelt haben. Diese sind es nun, die man auf dieselbe, eben erwähnte Weise näher zu bestimmen hat. Irgend eine von ihnen mag z. B. s Einheiten betragen, wo $s < r$ ist, so bekömmt man jetzt ein zweites Glied des gesuchten φ in der Form $[s]\,x^s$, dessen Coefficient $[s]$ wieder auf dieselbe Weise bestimmt wird, wie der frühere $[r]$ und so erhält man, die Rechnung fortsetzend, durch eine Reihe von Transformationen je ein Glied der gesuchten Function φ, bis die Ansteigungen $r, s, \ldots$ in Abfälle um die Einheit oder mehr als die Einheit übergegangen sind.

§. 10.

Befreiung von einem Factor zweiter Classe, wie $e^{\int \frac{\varphi\,.\,dx}{(x-\alpha)^m}}$.

Die Function φ bei dem in der Form $e^{\int \varphi dx}$ gedachten particulären Integrale vermag auch gelegentlich eine gebrochene zu sein und hat dann bekanntlich die Eigenschaft, für einen endlichen Werth von x unendlich werden zu können, z. B. für $x = \alpha$, wenn $x - \alpha$, erhoben zu irgend einer Potenz, im Nenner des φ erscheint. Diesen für $x = \alpha$ unendlich werdenden Bestandtheil des φ kann man aber immer in Gestalt einer Summe von algebraischen Brüchen absondern, woraus sich dann ein Factor zweiter Classe und anderer Art ergibt, verschieden von demjenigen, den der vorige Paragraph aufzufinden lehrt und dem auch nicht die Gradzahlen der Coefficienten, sondern die Zusammensetzung derselben aus einfachen Factoren $x - \alpha$ kennzeichnet, der sogar mit eben demselben der Natur der Sache nach in gar keinem Zusammenhange steht, d. h. mit ihm gar kein Glied gemeinschaftlich hat, und den zu kennen jedenfalls nothwendig ist, wenn man die particulären Integrale in einer jeden Beziehung von der zweiten zur ersten Classe herabbringen und hiemit die Integration einleiten will. Man schliesst bekanntlich auf solche particuläre Integrale mit $(x - \alpha)^m$ im Nenner des φ, und zwar auf deren r an der Zahl, wenn die Anfangscoefficienten der Differentialgleichung an Factoren $x - \alpha$ der Reihe nach:

$$rm, \quad (r-1)\,m, \quad (r-2)\,m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2m, \quad m, \quad 0$$

besitzen, wenn sohin ein gemeinschaftlicher Abfall von m Einheiten auf das Coefficientenpaar sich bemerklich macht. Wir werden von der Voraussetzung eines solchen Vorkommens ausgehen. Das Specielle, was in derselben liegt, wird aber desshalb der Allgemeinheit unserer Untersuchungen nicht schaden, weil wir von der Annahme gleicher Abfälle sehr leicht zur Voraussetzung ungleicher solcher durch Nullsetzen gewisser Coefficienten den Weg finden werden. Wir wollen ferner m betrachten als ganze Zahl, indem wir annehmen, dass man an irgend einer Polygonseite etwa vorhandene gebrochene Abfälle durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen in ganze verwandelt hat. Den Werth $m = 1$ schliessen wir aus, weil sich bei solch' einem m aus den gebrochenen φ nur der Partialbruch $-\frac{k}{x-\alpha}$ absondern lässt, der dann integrirt zunächst zu einem Logarithmus im Exponenten der Exponentielle, dann aber zu einem Divisor $(x-\alpha)^k$ des particulären Integrales Veranlassung gibt, und der nicht zur zweiten, sondern zur ersten Functionsclasse gehört, und dessen Aussonderung wir bereits in §. 8 erledigt haben. Unser n ist daher der natürlichen Zahlenreihe: $2, 3, 4, 5, \ldots$ entnommen und wir nehmen in der allgemeinen Differentialgleichung particuläre Integrale an, r an der Zahl, die alle die Form tragen:

$$y = e^{\int \frac{\varphi\, dx}{(x-\alpha)^m}} \,.\, z. \tag{389}$$

Die Summe von algebraischen Brüchen also, die man von $\frac{\varphi}{(x-\alpha)^m}$ abzuziehen hat, um einen Rest zu erhalten, der für $x=\alpha$ nicht mehr unendlich wird, trägt daher die Gestalt:

$$\frac{[m]}{(x-\alpha)^m} + \frac{[m-1]}{(x-\alpha)^{m-1}} + \frac{[m-2]}{(x-\alpha)^{m-2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{[1]}{x-\alpha} = \frac{P}{(x-\alpha)^m}, \tag{390}$$

allwo somit:

$$P = [m] + [m-1]\,(x-\alpha) + [m-2]\,(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + [1]\,(x-\alpha)^{m-1} \tag{391}$$

ist, und aufsteigend nach $x-\alpha$ geordnet erscheint, eine Weise, in der wir uns auch die Gleichungscoefficienten: $\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_{n-1}, \mathfrak{X}_{n-2}, \ldots\ldots \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_0$ hingestellt denken wollen. Sie werden dann zerfallen in zwei Classen. Die anfänglichen r an der Zahl werden beziehlich mit den Potenzen:

$$(x-\alpha)^{rm}, \quad (x-\alpha)^{(r-1)m}, \quad (x-\alpha)^{(r-2)m}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (x-\alpha)^{2m}, \quad (x-\alpha)^m$$

anheben, die übrigen beginnen mit einem Gliede ohne $x-\alpha$. Wir werden daher, so wie in §. 8, das Gleichungspolynom darstellen als ein Aggregat von zwei Summen, annehmend, dass:

$$\mathfrak{X}_n = (x-\alpha)^{rm} \underset{n}{\mathfrak{X}}; \quad \mathfrak{X}_{n-1} = (x-\alpha)^{(r-1)m} \underset{n-1}{\mathfrak{X}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{X}_{n-r+1} = (x-\alpha)^m \underset{n-r+1}{\mathfrak{X}}, \quad \mathfrak{X}_{n-r} = \underset{n-r}{\mathfrak{X}} \tag{392}$$

ist. Die Differentialgleichung in y ist mit diesen Coefficientenwerthen die folgende:

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^{rm} \underset{n}{\mathfrak{X}} \,.\, y^{(n)} + (x-\alpha)^{(r-1)m} \underset{n-1}{\mathfrak{X}} \,.\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + (x-\alpha)^m \underset{n-r+1}{\mathfrak{X}} y^{(n-r+1)} + \underset{n-r}{\mathfrak{X}} y^{(n-r)} + \\ + \mathfrak{X}_{n-r-1}\, y^{(n-r-1)} + \mathfrak{X}_{n-r-2}\, y^{(n-r-2)} + \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_0\, y = 0,\end{aligned} \tag{393}$$

oder in combinatorischer Ausdrucksweise:

$$\mathbf{S}\left[(x-\alpha)^{\alpha m} \underset{n-r+\alpha}{\mathfrak{X}} y^{(n-r+\alpha)}\right] + \mathbf{S}\left[\mathfrak{X}_\alpha\, y^{(\alpha)}\right] = 0. \tag{394}$$
$$\alpha + \omega = r \qquad\qquad \alpha+\omega = n-r-1$$

Hier tragen die vorkommenden $\mathfrak{X}$ sämmtlich einerlei Gestalt; sie sind nämlich die nachfolgenden Polynome, die man sich begrenzt, oder auch unbegrenzt denken kann:

$$\begin{aligned}
\underset{n}{\mathfrak{X}} &= [n,0] + [n,1]\,(x-\alpha) + [n,2]\,(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots = \mathbf{S}\{[n,\theta]\,(x-\alpha)^\theta\}\\
\underset{n-1}{\mathfrak{X}} &= [n-1,0] + [n-1,1]\,(x-\alpha) + [n-1,2]\,(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots = \mathbf{S}\{[n-1,\theta]\,(x-\alpha)^\theta\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\underset{n-r+1}{\mathfrak{X}} &= [n-r+1,0] + [n-r+1,1](x-\alpha) + [n-r+1,2](x-\alpha)^2 + \ldots\ldots = \mathbf{S}\{[n-r+1,\theta]\,(x-\alpha)^\theta\}\\
\underset{n-r}{\mathfrak{X}} &= [n-r,0] + [n-r,1]\,(x-\alpha) + [n-r,2]\,(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots = \mathbf{S}\{[n-r,\theta]\,(x-\alpha)^\theta\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{X}_0 &= [0,0] + [0,1]\,(x-\alpha) + [0,2]\,(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots = \mathbf{S}\{[0,\theta]\,(x-\alpha)^\theta\}
\end{aligned} \tag{395}$$

Die beabsichtigte Sonderung des exponentiellen Factors $e^{\int \frac{P dx}{(x-\alpha)^m}}$ geschieht offenbar vermittelst der Substitution:

$$y = e^{\int \frac{P dx}{(x-\alpha)^m}}\,.\,z. \tag{396}$$

Sie ist ein specieller Fall der im vorhergehenden Paragraphe durchgeführten, deren Resultat die Transformirte (325) in z war. Wir werden daher auch hier zu einer ähnlichen Transformirten gelangen, wie die (325) ist, nur werden in derselben anstatt: φ', φ'', φ''' ...... beziehlich erscheinen die:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{(x-\alpha)^m}\right),\quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{P}{(x-\alpha)^m}\right),\quad \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{P}{(x-\alpha)^m}\right),\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Das mit Q bezeichnete Polynom, welches gegeben ist durch die Gleichung (318), wird nach Einführung des Werthes:

$$\varphi = \frac{P}{(x-\alpha)^m} \tag{397}$$

sowohl, wie auch der unmittelbar oben für $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{X}_{n-1}$, $\mathfrak{X}_{n-2}$, ... $\mathfrak{X}_0$ angenommenen Werthe (392) sich verwandeln in:

$$\begin{aligned}
Q &= (x-\alpha)^{(r-n)m} \underset{n}{\mathfrak{X}} P^n + (x-\alpha)^{(r-n)m} \underset{n-1}{\mathfrak{X}} P^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + (x-\alpha)^{(r-n)m} \underset{n-r}{\mathfrak{X}} P^{n-r} +\\
&\quad + (x-\alpha)^{(r-n+1)m}\, \mathfrak{X}_{n-r-1}\, P^{n-r-1} + (x-\alpha)^{(r-n+2)m}\, \mathfrak{X}_{n-r-2}\, P^{n-r-2} + \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_0 =\\
&= \frac{1}{(x-\alpha)^{(n-r)m}}\left\{\mathbf{S}\left[\underset{n-r+\alpha}{\mathfrak{X}}\, P^{n-r+\alpha}\right] + \mathbf{S}\left[(x-\alpha)^{(1+\omega)m}\, \mathfrak{X}_\alpha\, P^\alpha\right]\right\}
\end{aligned} \tag{398}$$
$$\alpha + \omega = r \qquad\qquad \alpha+\omega = n-r-1$$

Auf ähnliche Weise kann in Gestalt eines Aggregates von zwei Summen dargestellt werden der in

(325) erscheinende $\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}}$. Differenziren wir in der That das Q in seiner entwickelten Gestalt $(n-\beta)$-Mal, so erhalten wir sofort:

$$\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}} = \frac{n!}{\beta!}\mathfrak{X}_n\varphi^\beta + \frac{(n-1)!}{(\beta-1)!}\mathfrak{X}_{n-1}\varphi^{\beta-1} + \frac{(n-2)!}{(\beta-2)!}\mathfrak{X}_{n-2}\varphi^{\beta-2} + \ldots\ldots + \frac{(n-\beta)!}{0!}\mathfrak{X}_{n-\beta} =$$

$$(399)\quad = (x-\alpha)^{(r-\beta)m}\Big[\frac{n!}{\beta!}\mathfrak{X}_n P^\beta + \frac{(n-1)!}{(\beta-1)!}\mathfrak{X}_{n-1}P^{\beta-1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(n-r)!}{(\beta-r)!}\mathfrak{X}_{n-r}P^{\beta-r} +$$

$$+ \frac{(n-r-1)!}{(\beta-r-1)!}\mathfrak{X}_{n-r-1}(x-\alpha)^m P^{\beta-r-1} + \frac{(n-r-2)!}{(\beta-r-2)!}\mathfrak{X}_{n-r-2}(x-\alpha)^{2m}P^{\beta-r-2} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(n-\beta)!}{0!}\mathfrak{X}_{n-\beta}(x-\alpha)^{(\beta-r)m}\Big] =$$

$$= \frac{1}{(x-\alpha)^{(\beta-r)m}}\Big\{\mathfrak{S}\Big[\frac{(n-r+\alpha)!}{(\beta-r+\alpha)!}\mathfrak{X}_{n-r+\alpha}P^{\beta-r+\alpha}\Big] + \mathfrak{S}\Big[\frac{(n-\beta+\alpha)!}{\alpha!}\mathfrak{X}_{n-\beta+\alpha}(x-\alpha)^{(1+\omega)m}P^\alpha\Big]\Big\}$$
$$\alpha+\omega=r \qquad\qquad \alpha+\omega=\beta-r-1$$

Fügen wir noch hinzu, dass jetzt anstatt φ', φ'', φ''', ... die folgenden Ausdrücke auftreten:

$$\varphi' = \frac{d}{dx}\Big[\frac{P}{(x-\alpha)^m}\Big] = -m\frac{[m]}{(x-\alpha)^{m+1}} - (m-1)\frac{[m-1]}{(x-\alpha)^m} - \ldots\ldots\ldots - \frac{[1]}{(x-\alpha)^2} =$$

$$= -\frac{1}{(x-\alpha)^{m+1}}\Big[m[m] + (m-1)[m-1](x-\alpha) + \ldots\ldots + [1](x-\alpha)^{m-1}\Big] = -\frac{P_1}{(x-\alpha)^{m+1}}$$

$$(400)\quad \varphi'' = \frac{d^2}{dx^2}\Big[\frac{P}{(x-\alpha)^m}\Big] = m(m+1)\frac{[m]}{(x-\alpha)^{m+2}} + (m-1)m\frac{[m-1]}{(x-\alpha)^{m+1}} + \ldots + 1.2\frac{[1]}{(x-\alpha)^3} =$$

$$= \frac{1}{(x-\alpha)^{m+2}}\Big[m(m+1)[m] + (m-1)m[m-1](x-\alpha) + \ldots\ldots + 1.2[1](x-\alpha)^{m-1}\Big] = \frac{P_2}{(x-\alpha)^{m+2}}$$

....

Hiebei sind in Summengestalt:

$$P = \mathfrak{S}\big[[m-\lambda]\ (x-\alpha)^\lambda\big]$$
$$\lambda+\nu=m-1$$

$$P_1 = \mathfrak{S}\big[(m-\lambda)\ [m-\lambda]\ (x-\alpha)^\lambda\big]$$
$$\lambda+\nu=m-1$$

$$(401)\quad P_2 = \mathfrak{S}\big[(m-\lambda)\ (m-\lambda+1)\ [m-\lambda]\ (x-\alpha)^\lambda\big]$$
$$\lambda+\nu=m-1$$

....

$$P_{n-1} = \mathfrak{S}\Big[\frac{(m-\lambda+n-2)!}{(m-\lambda-1)!}\ [m-\lambda]\ (x-\alpha)^\lambda\Big]$$
$$\lambda+\nu=m-1$$

Die in der ersten dieser zwei Zeilen vorhandenen Q_0, Q_1, ... Q_{n-r}, wiedergegeben in Summenform, sind zweigliedrig, nämlich:

(403)

$$Q_0 = \underset{\alpha+\omega=r}{\mathsf{S}}\left[\mathfrak{X}_{n-r+\alpha} P^{n-r+\alpha}\right] + \underset{\alpha+\omega=n-r-1}{\mathsf{S}}\left[(x-\alpha)^{(1+\omega)m}\,\mathfrak{X}_\alpha P^\alpha\right]$$

$$Q_1 = \underset{\alpha+\omega=r}{\mathsf{S}}\left[\frac{(n-r+\alpha)!}{(n-r+\alpha-1)!}\,\mathfrak{X}_{n-r+\alpha} P^{n-r+\alpha-1}\right] + \underset{\alpha+\omega=n-r-2}{\mathsf{S}}\left[\frac{(\alpha+1)!}{\alpha!}\,(x-\alpha)^{(1+\omega)m}\,\mathfrak{X}_{\alpha+1} P^\alpha\right]$$

$$Q_2 = \underset{\alpha+\omega=r}{\mathsf{S}}\left[\frac{(n-r+\alpha)!}{(n-r+\alpha-2)!}\,\mathfrak{X}_{n-r+\alpha} P^{n-r+\alpha-2}\right] + \underset{\alpha+\omega=n-r-3}{\mathsf{S}}\left[\frac{(\alpha+2)!}{\alpha!}\,(x-\alpha)^{(1+\omega)m}\,\mathfrak{X}_{\alpha+2} P^\alpha\right]$$

....

$$Q_{n-r-1} = \underset{\alpha+\omega=r}{\mathsf{S}}\left[\frac{(n-r+\alpha)!}{(\alpha+1)!}\,\mathfrak{X}_{n-r+\alpha} P^{\alpha+1}\right] + \underset{\alpha+\omega=0}{\mathsf{S}}\left[\frac{(\alpha+n-r-1)!}{\alpha!}\,(x-\alpha)^{(1+\omega)m}\,\mathfrak{X}_{\alpha+n-r-1} P^\alpha\right]$$

$$Q_{n-r} = \underset{\alpha+\omega=r}{\mathsf{S}}\left[\frac{(n-r+\alpha)!}{\alpha!}\,\mathfrak{X}_{n-r+\alpha} P^\alpha\right]$$

Die übrigen lassen sich je durch eine einzige Summe ausdrücken:

(404)

$$Q_{n-r+1} = \underset{\alpha+\omega=r}{\mathsf{S}}\left[\frac{(n-r+\alpha)!}{(\alpha-1)!}\,\mathfrak{X}_{n-r+\alpha} P^{\alpha-1}\right]$$

$$Q_{n-r+2} = \underset{\alpha+\omega=r}{\mathsf{S}}\left[\frac{(n-r+\alpha)!}{(\alpha-2)!}\,\mathfrak{X}_{n-r+\alpha} P^{\alpha-2}\right]$$

....

$$Q_n = \underset{\alpha+\omega=r}{\mathsf{S}}\left[\frac{(n-r+\alpha)!}{(\alpha-r)!}\,\mathfrak{X}_{n-r+\alpha} P^{\alpha-r}\right]$$

Die zweite und die folgenden von ihnen beherbergen aber verschwindende Glieder. Ein solches ist nämlich immer vorhanden, wenn es eine accentirte negative Zahl in den Nenner bekömmt. Man thut gut, sie im Voraus auszuschliessen, was man dadurch bewerkstelligt, dass man in der zweiten $\alpha+1$, in der dritten $\alpha+2$ u. s. w. anstatt α substituirt und dann annimmt, sämmtliche Summen seien auf alle ganzen positiven Werthe von α, die die Bedingungsgleichung erfüllen, auszudehnen. Diess gibt den vorliegenden Formeln folgende Gestalt:

(405)

$$Q_{n-r+1} = \underset{\alpha+\omega=r-1}{\mathsf{S}}\left[\frac{(n-r+\alpha+1)!}{\alpha!}\,\mathfrak{X}_{n-r+\alpha+1} P^\alpha\right]$$

$$Q_{n-r+2} = \mathrm{S}\left[\frac{(n-r+\alpha+2)!}{\alpha!} \underset{n-r+\alpha+2}{\mathfrak{X}} P^{\alpha}\right]$$

$$\alpha + \omega = r - 2$$

....

$$Q_n \quad = \mathrm{S}\left[\frac{(n+\alpha)!}{\alpha!} \underset{n+\alpha}{\mathfrak{X}} P^{\alpha}\right]$$

$$\alpha + \omega = 0$$

Die transformirte Differentialgleichung in s aber lässt sich mit Hilfe dieser eingeführten $P_0, P_1, \ldots\ldots P_{n-1}, Q_0, Q_1, \ldots\ldots Q_n$ folgendermassen wiedergeben:

$$
\begin{aligned}
0 = \quad & s \,.\, \mathrm{S}\left[\frac{1}{0!\gamma!\delta!\varepsilon!\ldots}\left(\frac{-P_1}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{+P_2}{3!}\right)^{\delta}\left(\frac{-P_3}{4!}\right)^{\varepsilon} \ldots\ldots\ldots Q_{n-\beta}\,(x-\alpha)^{\varkappa(m-1)}\right] + \\
& \qquad \beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + \ldots\ldots\ldots = n \\
& \qquad (\varkappa = \gamma + 2\delta + 3\varepsilon + \ldots\ldots\ldots\ldots) \\
+\, & s'.(x-\alpha)^{m}\, \mathrm{S}\left[\frac{1}{1!\gamma!\delta!\varepsilon!\ldots}\left(\frac{-P_1}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{+P_2}{3!}\right)^{\delta}\left(\frac{-P_3}{4!}\right)^{\varepsilon} \ldots\ldots Q_{n-\beta}\,(x-\alpha)^{\varkappa(m-1)}\right] + \\
& \qquad \beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + \ldots\ldots\ldots = n - 1 \\
& \qquad (\varkappa = \gamma + 2\delta + 3\varepsilon + \ldots\ldots\ldots\ldots) \\
+\, & s''.(x-\alpha)^{2m}\, \mathrm{S}\left[\frac{1}{2!\gamma!\delta!\varepsilon!\ldots}\left(\frac{-P_1}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{+P_2}{3!}\right)^{\delta}\left(\frac{-P_3}{4!}\right)^{\varepsilon} \ldots\ldots Q_{n-\beta}\,(x-\alpha)^{\varkappa(m-1)}\right] + \qquad (406) \\
& \qquad \beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + \ldots\ldots\ldots = n - 2 \\
& \qquad (\varkappa = \gamma + 2\delta + 3\varepsilon + \ldots\ldots\ldots\ldots) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\, & s^{(n-1)}.(x-\alpha)^{(n-1)m}.\mathrm{S}\left[\frac{1}{(n-1)!\gamma!\delta!\varepsilon!\ldots}\left(\frac{-P_1}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{+P_2}{3!}\right)^{\delta}\left(\frac{-P_3}{4!}\right)^{\varepsilon} \ldots\ldots Q_{n-\beta}(x-\alpha)^{\varkappa(m-1)}\right] + \\
& \qquad \beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + \ldots\ldots\ldots = 1 \\
& \qquad (\varkappa = \gamma + 2\delta + 3\varepsilon + \ldots\ldots\ldots\ldots) \\
+\, & s^{(n)}.(x-\alpha)^{nm}.\mathrm{S}\left[\frac{1}{n!\gamma!\delta!\varepsilon!\ldots}\left(\frac{-P_1}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{+P_2}{3!}\right)^{\delta}\left(\frac{-P_3}{4!}\right)^{\varepsilon} \ldots\ldots Q_{n-\beta}\,(x-\alpha)^{\varkappa(m-1)}\right] \\
& \qquad \beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + \ldots\ldots\ldots = 0 \\
& \qquad (\varkappa = \gamma + 2\delta + 3\varepsilon + \ldots\ldots\ldots\ldots)
\end{aligned}
$$

Sie gilt für ein in der Form (391) zwar, aber übrigens ganz beliebig gewähltes P. Soll jedoch durch schickliche Wahl dieses Polynomes eines der particulären Integrale von seinem exponentiellen Factor befreit und hiemit zur ersten Classe herabgedrückt werden, so ist nothwendig, dass diese Transformirte vermöge einer eintretenden Theilbarkeit durch $(x-\alpha)^m$ an Factoren $x-\alpha$ beziehlich die Anzahlen $(n-1)m$, $(n-2)m$, ... m, 0, 0 in ihren Coefficienten aufweise. Diese Theilbarkeit tritt ein, wenn die ersten m Anfangsglieder des in aufsteigender Form gegebenen Coefficienten von s verschwinden. Sie sind zugleich, wie oben dargethan, die Anfangsglieder von Q_0 bis auf

das m^{te} und letzte von ihnen, zu dessen Bildung auch Q_1 mit seinen ersten Gliedern der Entwicklung mitwirkt. Es kömmt daher auch hier, so wie im vorhergehenden Paragraphe, vor allem anderen an auf die Entwicklung von Q_0 in seinen $m-1$ Anfangsgliedern, nur ist sie hier eine aufsteigende, während sie dort eine absteigende war.

Um dazu zu gelangen, nehmen wir den zweitheiligen Werth von Q_0 aus der ersten der Formeln (403) vor, bemerkend, dass die Potenzen P^α und $P^{n-r+\alpha}$ vermöge der Polynomialformel (225) Seite 131 symbolisch geschrieben werden können, wie folgt:

$$P^{n-r+\alpha} = \Big\{[m] + [m-1]\,(x-\alpha) + \ldots\ldots\ldots + [1]\,(x-\alpha)^{m-1}\Big\}^{n-r+\alpha}$$

$$= \mathbf{S}\left[\frac{(n-r+\alpha)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\ldots\ldots\,\alpha_m!}\,[m]^{\alpha_1}\,[m-1]^{\alpha_2}\,\ldots\ldots\,[1]^{\alpha_m}\,(x-\alpha)^{\alpha_2+2\alpha_3+\ldots+(m-1)\alpha_m}\right]$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_m = n - r + \alpha$$

$$P^\alpha = \mathbf{S}\left[\frac{\alpha!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\ldots\ldots\,\alpha_m!}\,[m]^{\alpha_1}\,[m-1]^{\alpha_2}\,\ldots\ldots\,[1]^{\alpha_m}\,(x-\alpha)^{\alpha_2+2\alpha_3+\ldots+(m-1)\alpha_m}\right]$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_m = \alpha$$

Wir substituiren sie in die obgenannte Formel für Q_0 und erhalten zwei Summen: In der ersten von ihnen combiniren wir die zwei anzuhängenden Bedingungsgleichungen durch Addition und setzen die Summe anstatt der ersten von ihnen. Imgleichen schreiben wir anstatt $\mathfrak{X}_{n-r+\alpha}$ und $\mathfrak{X}_\alpha$ die Summenwerthe aus (395) und erhalten so:

$$Q_0 = \mathbf{S}\left[\frac{(n-r+\alpha)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_m!}\,[n-r+\alpha,\theta]\,[m]^{\alpha_1}\,[m-1]^{\alpha_2}\,\ldots\ldots\,[1]^{\alpha_m}\,(x-\alpha)^{\theta+\alpha_2+2\alpha_3+\ldots+(m-1)\alpha_m}\right] +$$

$$\omega + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_m = n$$

$$\alpha + \omega = r$$

$$+\,\mathbf{S}\left[\frac{\alpha!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_m!}\,[\alpha,\theta]\,[m]^{\alpha_1}\,[m-1]^{\alpha_2}\,\ldots\ldots\,[1]^{\alpha_m}\,(x-\alpha)^{\theta+(1+\omega)m+\alpha_2+2\alpha_3+\ldots+(m-1)\alpha_m}\right]$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots\ldots\ \alpha_m = \alpha$$

$$\alpha + \omega = n - r - 1.$$

Hiemit wäre das Q_0 zwar bereits in der aufsteigenden Reihenform dargestellt. Man erzielt jedoch eine Vereinfachung des dafür gewonnenen Ausdruckes durch denselben Rechnungskunstgriff, der auch im vorigen Paragraphe in Anwendung gekommen ist und darauf beruht, dass man die in der Differentialgleichung vorkommenden constanten Coefficienten in Schichten eintheilt und aus jeder solchen Schichte ein algebraisches Polynom des m^{ten} Grades nach $[m]$ construirt. Wir bewerkstelligen diess so, dass dasjenige der so erhaltenen Polynome, dessen Stellen = oder Schichtenzahl allgemein $m\sigma+\tau$ ist, bestimmt wird durch folgende Formel, welche für beliebige σ und solche τ, die kleiner sind als m zu gelten hat:

$$A_{m\sigma+\tau} = [n, m\sigma+\tau]\,[m]^n + [n-1, m\sigma+\tau]\,[m]^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + [n-r, m\sigma+\tau]\,[m]^{n-r} +$$

$$(407) \qquad + [n-r-1,(\sigma-1)m+\tau]\,[m]^{n-r-1} + [n-r-2,(\sigma-2)m+\tau]\,[m]^{n-r-2} + \ldots [n-r-\sigma,\tau]\,[m]^{n-r-\sigma}.$$

Durch Einführung dieser Polynome A nun und ihrer nach $[m]$ genommenen Differentialquotienten, die, wie gewöhnlich, durch dem A oben angehängte Striche bezeichnet werden, führen wir die Summirungen nach α, α_1, ω und θ aus auf folgende Weise. Wir fassen zuvörderst den ersten Bestandtheil von Q_0 ins Auge, denken uns den Exponenten von $x-\alpha$ begabt mit dem bestimmten Werthe $m\sigma+\tau$ und suchen nun denjenigen Coefficienten, mit dem die Potenz $(x-\alpha)^{m\sigma+\tau}$ im ersten Bestandtheile von Q_0 multiplizirt erscheint. Er heisse H, so ist offenbar:

$$H = \mathbf{S}\left[\frac{(n-r+\alpha)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\ldots\,\alpha_m!}\,[n-r+\alpha,\theta]\,[m]^{\alpha_1}\,[m-1]^{\alpha_2}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,[1]^{\alpha_m}\right]$$
$$\theta+\alpha_2+2\alpha_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+(m-1)\,\alpha_m = m\sigma+\tau$$
$$\omega+\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_m = n$$
$$\alpha+\omega = r$$

Ebenso bezeichnen wir den Coefficienten derselben Potenz von $x-\alpha$ im zweiten Bestandtheile von Q_0 mit K, so ist ebenso:

$$K = \mathbf{S}\left[\frac{\alpha!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\ldots\,\alpha_m!}\,[\alpha,\theta]\,[m]^{\alpha_1}\,[m-1]^{\alpha_2}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,[1]^{\alpha_m}\right]$$
$$\theta+(1+\omega)\,m+\alpha_2+2\alpha_3+\ldots\ldots+(m-1)\alpha_m = m\sigma+\tau$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_m = \alpha$$
$$\alpha+\omega = n-r-1$$

Nun denken wir uns ferner noch unter α_2, α_3, ... α_m bestimmte, den Bedingungsgleichungen genügende Werthe, etwa so erkiesen, dass:

$$\alpha_2+2\alpha_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+(m-1)\,\alpha_m = \xi$$
$$\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_m = \eta$$

wird, unter ξ und η natürlich auch bestimmte Werthe gedacht. Hiebei ertheilen wir aber den griechischen Buchstaben ω, α_1 und α alle Werthe, deren sie bei bestimmtem α_2, α_3, ... α_m, ξ, η, σ, τ fähig sind. Diese sind im Werthe von H in dem folgenden Schema enthalten:

$$\begin{array}{llllll}
\alpha = r, & r-1, & r-2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\
\omega = 0, & 1, & 2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & r \\
\alpha_1 = n-\eta, & n-\eta-1, & n-\eta-2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & n-\eta-r \\
\theta = m\sigma+\tau-\xi & & & &
\end{array}$$

und erzeugen folgende zu H gehörige Glieder:

$$\frac{[m-1]^{\alpha_2}\,[m-2]^{\alpha_3}\ldots[1]^{\alpha_m}}{\alpha_2!\,\alpha_3!\,\ldots\ldots\,\alpha_m!}\left\{\frac{n!}{n-\eta!}\,[n,m\sigma+\tau-\xi]\,[m]^{n-\eta}+\frac{(n-1)!}{n-\eta-1!}\,[n-1,m\sigma+\tau-\xi]\,[m]^{n-\eta-1}+\right.$$
$$\left.+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(n-r)!}{n-\eta-r!}\,[n-r,m\sigma+\tau-\xi]\,[m]^{n-\eta-r}\right\}$$

Man erkennt sehr leicht in dem eingeklammerten Polynome den η^{ten} Differentialquotienten der ersten Zeile des der (407) nachgebildeten Werthes von $A_{m\sigma+\tau-\xi}$. Verfährt man ebenso mit K, so erhält man ein anderes Schema zusammengehöriger Werthe von α, α_1, ω, θ:

$$\begin{array}{llllll}
\alpha = & n-r-1, & n-r-2, & n-r-3, & \ldots\ldots\ldots & \eta \\
\omega = & 0, & 1, & 2, & \ldots\ldots\ldots & n-r-\eta-1 \\
\alpha_1 = & n-r-\eta-1, & n-r-\eta-2, & n-r-\eta-3, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\
\theta = & m\sigma+\tau-\xi-m, & m\sigma+\tau-\xi-2m, & m\sigma+\tau-\xi-3m, & \ldots\ldots\ldots & m\sigma+\tau-\xi-(n-r-\eta)m
\end{array}$$

Ihnen entsprechen die nachstehenden Glieder des K:

$$\frac{[m-1]^{\alpha_2}[m-2]^{\alpha_3}\ldots[1]^{\alpha_m}}{\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\ldots\alpha_m!}\left\{\frac{(n-r-1)!}{(n-r-\eta-1)!}\left[n-r-1,(\sigma-1)\,m+\tau-\xi\right]\,[m]^{n-r-\eta-1}+\right.$$
$$+\frac{(n-r-2)!}{(n-r-\eta-2)!}\left[n-r-2,(\sigma-2)\,m+\tau-\xi\right][m]^{n-r-\eta-2}+$$
$$\left.+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ +\frac{\eta!}{0!}\left[\eta,(\sigma-n+r+\eta)\;m+\tau-\xi\right]\right\}$$

und man erkennt wieder in dem eingeklammerten Polynome den η^{ten} Differentialquotienten der zweiten Zeile des Werthes von $A_{m\sigma+\tau-\xi}$. Es vermag also der gesammte Coefficient von $(x-\alpha)^{m\sigma+\tau}$ in Q_0, der offenbar $H+K$ ist, ausgedrückt zu werden durch die einfache Formel:

$$H+K=\mathbf{S}\left[\frac{1}{\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_m!}\,[m-1]^{\alpha_2}\;[m-2]^{\alpha_3}\;\ldots\ldots\ldots\;[1]^{\alpha_m}\;A^{(\eta)}_{m\sigma+\tau-\xi}\right]$$
$$\alpha_2+2\alpha_3+\ldots\ldots\ldots+(m-1)\,\alpha_m=\xi$$
$$\alpha_2+\ \alpha_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_m=\eta$$

Nun denken wir uns diesem Coefficienten die Potenz $(x-\alpha)^{m\sigma+\tau}$ als Factor angefügt und sodann dem Exponenten $m\sigma+\tau$ alle möglichen Werthe aus der unendlichen Zahlenreihe: $0, 1, 2, 3, \ldots$ beigelegt, alle so gewonnenen Glieder aber summirt und dabei der Kürze wegen $m\sigma+\tau$ durch μ ersetzt: so ergibt sich die folgende geschmeidigere Formel für Q_0, zusammengezogen in eine einzige Summe:

$$Q_0=\mathbf{S}\left[\frac{1}{\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\ldots\alpha_m!}\,[m-1]^{\alpha_2}\,[m-2]^{\alpha_3}\;\ldots\ldots\ldots\;[1]^{\alpha_m}\;A^{(\eta)}_{\omega}\;(x-\alpha)^{\mu}\right]$$
$$\alpha_2+2\alpha_3+\ldots\ldots\ldots+(m-1)\,\alpha_m=\xi$$
$$(\alpha_2+\ \alpha_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_m=\eta)$$
$$\xi+\omega=\mu$$

Die letzte der Bedingungsgleichungen will nur besagen, dass es A mit negativen Stellenzeigern nicht gebe. Und genau so, wie wir den Werth von Q_0 erhalten haben, zusammen gezogen in eine einzige Formel, gelangt man auch ganz allgemein zu Q_1, Q_2, ... Q_{n-} und gewinnt nament-

lich dafür Formeln, die sich von der für Q_0 nur darin unterscheiden, dass in ihnen der Reihe nach A um 1, 2, ... $n-\beta$ Striche mehr trägt. Man hat also:

$$Q_{n-\beta} = \mathbf{S}\left[\frac{1}{\alpha_2!\,\alpha_3!\,.....\,\alpha_m!}[m-1]^{\alpha_2}\,[m-2]^{\alpha_3}\,..........\,[1]^{\alpha_m}\,A^{(\nu+n-\beta)}_{\mu-\xi}\,(x-\alpha)^{\nu}\right]$$

$$\alpha_2 + 2\alpha_3 + ... + (m-1)\,\alpha_m = \xi$$
$$(\alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_m = \eta)$$
$$\xi + \omega = \mu$$

Jetzt können wir zur Aufstellung der transformirten Gleichung in $\mathfrak{z}$ schreiten. Sie erscheint, wie aus (406) zu ersehen, in der Gestalt:

$$0 = \mathfrak{Z}.\mathfrak{z} + \frac{1}{1!}(x-\alpha)^{m}.\mathfrak{Z}_1.\mathfrak{z}' + \frac{1}{2!}(x-\alpha)^{2m}.\mathfrak{Z}_2.\mathfrak{z}'' + ... + \frac{1}{n!}(x-\alpha)^{nm}.\mathfrak{Z}_n.\mathfrak{z}^{(n)}$$

und es ist namentlich:

$$\mathfrak{Z} = \mathbf{S}\left[\frac{1}{\gamma!\,\delta!\,\varepsilon!\,...}\left(\frac{-P_1}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{+P_2}{3!}\right)^{\delta}\left(\frac{-P_3}{4!}\right)^{\varepsilon}\,..........\,Q_{n-\beta}\,(x-\alpha)^{\varkappa(m-1)}\right]$$

$$\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + ... = n$$
$$(\varkappa = \gamma + 2\delta + 3\varepsilon + ...).$$

Führt man hier die unter (401) und (408) früher angeführten Werthe von P_1, P_2, P_3, ... $Q_{n-\beta}$ ein, und entwickelt mit Hilfe der Polynomialformel; so ergibt sich $\mathfrak{Z}$ in aufsteigender Reihenform:

$$\mathfrak{Z} = \mathbf{S}\left\{\frac{(-1)^{\gamma+\varepsilon+\cdots\cdots}}{2!^{\gamma}\,3!^{\delta}\,4!^{\varepsilon}\ldots\alpha_2!\,\alpha_3!\,\alpha_4!\ldots\alpha_m!\,\gamma_1!\,\gamma_2!\,\gamma_3!\ldots\gamma_m!\,\delta_1!\,\delta_2!\,\delta_3!\ldots\delta_m!\,\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\,\varepsilon_3!.\varepsilon_m!\ldots}\times\right.$$
$$\times\, m^{\gamma_1+\delta_1+\delta_2+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots}\,(m-1)^{\gamma_2+\delta_2+\delta_3+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\cdots}\,(m-2)^{\gamma_3+\delta_3+\delta_4+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\cdots}\,.....\,\times$$
$$\times\,(m+1)^{\delta_1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\cdots}\,(m+2)^{\varepsilon_1+\cdots\cdots}\,.....................................\,\times$$
$$\times\,[m]^{\gamma_1+\delta_1+\varepsilon_1+\cdots\cdots}\,[m-1]^{\alpha_2+\gamma_2+\delta_2+\varepsilon_2+\cdots\cdots}\,[m-2]^{\alpha_3+\gamma_3+\delta_3+\varepsilon_3+\cdots\cdots}\,.............\,\times$$
$$\left.\times\,A^{(\nu+n-\beta)}_{\mu-\xi}\,(x-\alpha)^{\varkappa(m-1)+\mu+\gamma_2+\delta_2+\varepsilon_2+\cdots\cdots+2(\gamma_3+\delta_3+\varepsilon_3+\cdots\cdots)+3(\gamma_4+\delta_4+\varepsilon_4+\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots\cdots}\right\}$$

$$(\eta = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + ... + \alpha_m)$$
$$(\varkappa = \gamma + 2\delta + 3\varepsilon + ...)$$
$$\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + ... + (m-1)\,\alpha_m = \xi$$
$$\xi + \omega = \mu$$
$$\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + ... = n$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + ... + \gamma_m = \gamma$$
$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + ... + \delta_m = \delta$$
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_m = \varepsilon$$
$$..................................$$

Es ist nicht nothwendig, auf dieselbe Weise auch $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, ... $\mathfrak{Z}_s$ zu rechnen; man erhält sie aus dem $\mathfrak{Z}$ einfach dadurch, dass man einem jeden A beziehlich um 1, 2, ... s Striche mehr

anhängt, und dabei alle diejenigen Glieder, deren A mehr als n Striche bekömmt, als der Nulle gleich weglässt, weil jedes A ein ganzes und algebraisches Polynom des n^{ten} Grades ist, folglich durch ein mehr als n-maliges Differenziren zum Verschwinden gebracht wird.

§. 11.

Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen in die allgemeine Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung.

In §. 5 dieses Abschnittes findet sich die Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen in die speciellen Differentialgleichungen der zweiten, dritten und vierten Ordnung mit übrigens beliebig gestalteten Coefficienten besprochen. Es ist dort angenommen, dass die mit $\mathfrak{x}$ bezeichnete neueinzuführende unabhängige Veränderliche mit der in der Differentialgleichung enthaltenen x benannten zusammenhänge durch die in der Regel, wenn auch gerade nicht nothwendig algebraische Gleichung:

$$\varphi\,(x,\mathfrak{x}) = 0. \tag{409}$$

Wir haben ferner alldort diesem Zusammenhange zufolge die abhängige Veränderliche der Differentialgleichung, die y hiess, betrachtet als Function von $\mathfrak{x}$, die das x nur insofern in sich enthält, als es in $\mathfrak{x}$ vorhanden ist. Wir wollen auch hier von denselben Voraussetzungen ausgehen und überhaupt denselben Gang der Rechnung befolgen, nur mit dem Unterschiede, dass wir hier eine allgemeine Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung, mit beliebig gestalteten Coefficienten, zum Gegenstande unserer Untersuchungen machen, nämlich die:

$$\mathfrak{X}_n\, y^{(n)} + \mathfrak{X}_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots \mathfrak{X}_1\, y' + \mathfrak{X}_0\, y = \mathbf{S}\left[\mathfrak{X}_\lambda\, y^{(\lambda)}\right] = 0, \qquad \lambda + \omega = n \tag{410}$$

aus der wir uns gegenwärtig vornehmen, jede Spur von x wegzuschaffen, und diese Veränderliche durchwegs durch $\mathfrak{x}$ zu ersetzen. Hiezu wird aber einerseits nothwendig, die Differentialquotienten von y nach x genommen in solche nach $\mathfrak{x}$ umzusetzen, und andererseits sind noch sämmtliche Coefficienten in reine Functionen von $\mathfrak{x}$ umzugestalten. Wir thun so wie im §. 5 zuvörderst das Erstere.

Die Formel (235) von §. 7, Seite 138, reicht hiezu vollkommen hin, und ersetzen wir in derselben den Differentiationsindex n durch λ, so erhalten wir durch die Substitution in die (410) den folgenden neuen Ausdruck der Differentialgleichung mit nach $\mathfrak{x}$ genommenen Differentialquotienten des y:

$$0 = \mathbf{S}\left[\frac{\lambda!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\,\mathfrak{X}_\lambda \left(\frac{d\mathfrak{x}}{1!\,dx}\right)^{\alpha} \left(\frac{d^2\mathfrak{x}}{2!\,dx^2}\right)^{\beta} \left(\frac{d^3\mathfrak{x}}{3!\,dx^3}\right)^{\gamma} \ldots\ldots\ldots \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}\,y}{d\mathfrak{x}^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}}\right] \tag{411}$$
$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots\ldots\ldots = \lambda$$
$$\lambda + \omega = n$$

In den Coefficienten jedoch befinden sich annoch die Differentialquotienten von $\mathfrak{r}$ nach x genommen, und schaffen wir diese vermittelst der Gleichung $\varphi(x,\mathfrak{r})=0$ heraus, so werden sich zunächst diese Coefficienten verwandeln in Functionen von x und $\mathfrak{r}$, in denen aber kein Differentiationszeichen mehr vorhanden sein wird. Man wird daher schliesslich noch x eben vermittelst der $\varphi(x,\mathfrak{r})=0$ aus ihnen zu eliminiren haben. Suchen wir diess der Reihe nach zu leisten.

Wir haben in §. 5, die dieser Transformation zu Grunde liegende Gleichung $\varphi(x,\mathfrak{r})=0$ viermal differenzirt nach allen x, hiebei $\mathfrak{r}$ als Function von x ansehend, und die so gewonnenen vier Gleichungen zur Bestimmung von $\frac{d\mathfrak{r}}{dx}, \frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2}, \frac{d^3\mathfrak{r}}{dx^3}, \frac{d^4\mathfrak{r}}{dx^4}$ benützt. Die hier angestrebte Allgemeinheit erfordert aber gegenwärtig eine m-malige Differentiation dieser Function, unter m eine beliebige ganze und positive Zahl verstanden, d. h. wir brauchen jetzt die Gleichung:

$$\frac{d^m}{dx^m}\varphi(x,\mathfrak{r}) = 0$$

die zur Bestimmung dienen kann von $\frac{d^m\mathfrak{r}}{dx^m}$, wenn die früheren Differentialquotienten bereits bekannt sind. Da es sich aber hier um einen unabhängigen Ausdruck für den m^{ten} Differentialquotienten von $\mathfrak{r}$ handelt in Function der partiellen Differentialquotienten von φ allein, und es schwer hält, zu einem solchen in voller Allgemeinheit zu gelangen, so fassen wir hier vorderhand unsere nächsten Bedürfnisse ins Auge, bemerkend, dass der vorzüglichste Zweck der Einführung einer neuen Veränderlichen das Hinwegschaffen einer entweder in der Differentialgleichung oder mindestens in ihren particulären Integralen vorhandenen Irrationalgrösse sei, und dass eine Substitution, welche die Anzahl der alldort vorkommenden Irrationalgrössen nicht verringert, vielmehr zu den bereits bestehenden neue einführt, vorderhand wenigstens als zwecklos gelten dürfte. Diese unsere Bedürfnisse im Auge behaltend, schreiten wir also zur Auffindung eines solchen unabhängigen Ausdruckes für $\frac{d^m\mathfrak{r}}{dx^m}$.

Wenn m die Zahl 4 nicht überschreitet, so ist diese Aufgabe durch die Formeln: (173), (174), (175) und (176) Seite 102 bereits gelöst. Die aufmerksame Betrachtung derselben lehrt, dass die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dx},\quad \frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2},\quad \frac{d^3\mathfrak{r}}{dx^3},\quad \frac{d^4\mathfrak{r}}{dx^4},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \frac{d^m\mathfrak{r}}{dx^m}$$

sämmtlich gebrochene Functionen sind der verschiedenen partiellen Differentialquotienten von φ von der Gradzahl Null, eben so viele Factoren dieser Art im Zähler wie im Nenner enthaltend. Gebrochen sind sie der Reihe nach beziehlich durch:

$$\varphi_1,\quad \varphi_1^3,\quad \varphi_1^5,\quad \varphi_1^7,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \varphi_1^{2m-1}.$$

Die Anzahlen der Dimensionen der homogenen Zähler sind daher ebenfalls beziehlich:

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad 2m-1.$$

Sieht man nur die oberen Striche, welche der Function anhängen und Differentiationen nach x andeuten, und denkt sich hiebei alle Potenzen der φ in ihre einzelnen Factoren aufgelöst, so gewahrt man

alsbald, dass die Summe der Anzahlen der oberen Striche in diesen aufeinanderfolgenden Formeln in allen einzelnen Gliedern beziehlich sei: 1, 2, 3, 4, ... m. Summirt man hingegen in den einzelnen Gliedern alle Striche, die oberen sowohl, wie die unteren, so bekömmt man beziehlich die folgenden constanten Anzahlen: 1, 4, 7, 10, ... $3m-2$. Endlich gewahrt man noch, dass die Zeichen der einzelnen Glieder innerhalb der Klammern sich lediglich nach φ_1 richten, und dass alle mit geraden Potenzen von φ_1 multiplizirten das Zeichen $+$, alle mit ungeraden Potenzen von φ_1 hingegen das Zeichen $-$ tragen, so zwar, dass man allda die sämmtlichen Glieder mit dem Zeichen $+$ hinschreiben könnte, wenn man nur $-\varphi_1$ anstatt φ_1 substituirte. Alles dieses ist zwar nur erwiesen bis $m=4$, weil die Formeln (173), (174), (175) und (176) nur so weit reichen; wir werden aber sehen, dass diese Beschaffenheit sich vollständig von einem jeden Werthe von m auf den nächst grösseren fortpflanze. Ist dem wirklich so, so wäre der gesuchte Ausdruck von $\frac{d^m \mathfrak{x}}{dx^m}$, in Summengestalt wiedergegeben, der folgende:

$$\frac{d^m \mathfrak{x}}{dx^m} = -\frac{1}{\varphi_1^{2m-1}} \mathbf{S}\left[A(-\varphi_1)^{\xi_1} \varphi'^{\eta_1} \varphi_{,,}^{\xi_2} \varphi_{,}'^{\eta_2} \varphi''^{\zeta_2} \varphi_{,,,}^{\xi_3} \varphi_{,,}'^{\eta_3} \varphi_{,}''^{\zeta_3} \varphi'''^{\omega_3} \ldots\ldots\right]$$

(412)

$$\begin{aligned} \xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2 + \xi_3 + \eta_3 + \zeta_3 + \omega_3 + \ldots &= 2m-1 \\ \eta_1 + \eta_2 + 2\zeta_2 + \eta_3 + 2\zeta_3 + 3\omega_3 + \ldots &= m \\ \xi_1 + \eta_1 + 2\xi_2 + 2\eta_2 + 2\zeta_2 + 3\xi_3 + 3\eta_3 + 3\zeta_3 + 3\omega_3 + \ldots &= 3m-2 \end{aligned}$$

Die erste der angehängten drei Bedingungsgleichungen besagt, dass die Summe der Dimensionen in allen Gliedern $2m-1$ sei, die zweite, dass die Summe der sämmtlichen oberen Striche, die Differentiationen nach x bedeuten, m betrage, die dritte erklärt, dass die Gesammtsumme aller Striche, der oberen und unteren, $3m-2$ sei. Man kann von dieser dritten die erste abziehen und ansatt ihr die so durch Subtraktion erhaltene einfachere, d. h. die:

$$\xi_2 + \eta_2 + \zeta_2 + 2\xi_3 + 2\eta_3 + 2\zeta_3 + 2\omega_3 + \ldots\ldots\ldots = m-1$$

setzen. A ist ein annoch unbekannter Coefficient, den man anzusehen hat als eine Function von m, und nebenher noch von den sämmtlichen in den Bedingungsgleichungen vorkommenden Buchstabengrössen. Überdiess gewinnt man leicht die Überzeugung, dass die Anzahl der Glieder in der Summe $\mathbf{S}$ gleich sei der Anzahl der Auflösungen der drei angehängten Bedingungsgleichungen in ganzen positiven Zahlen, und dass diese Glieder und jene Auflösungen sich vollkommen Glied für Glied entsprechen. Diess zwar wieder nur bis zu $m=4$, allein es wird sich nachweisen lassen, dass auch diese Beschaffenheit sich von jedem m auf das nächst grössere fortpflanze und folglich als eine allgemeine Eigenschaft des Ausdruckes zu gelten habe.

Wie schon oben bemerkt, erwerben wir durch Einführung der neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}$ anstatt x eine Verringerung der Anzahlen der Irrationalgrössen in der Differentialgleichung, oder in ihrem Integrale, vermeiden daher gerne eine jede Substitution, welche neue Wurzelgrössen einführt. Diess geschieht aber jedesmal, so oft die Gleichung $\varphi=0$ nach x von höherem als vom ersten Grade ist. Desshalb tragen auch alle unsere §. 5 Seite 104 und 105 zur Sprache gebrachten,

rational machenden Substitutionsweisen, respective Gleichungen $\varphi = 0$, die Gestalt: $P.x + Q = 0$, unter P und Q Functionen von $\mathfrak{x}$ verstanden. Jede so geformte Function φ verträgt nur ein einmaliges Differenziren nach x, und wird schon beim zweiten auf Null gebracht. Fassen wir diesen uns zunächst angehenden Fall zuerst ins Auge, so verschwinden aus unserer Summenformel alle φ, die mehr als Einen Strich oben tragen, und sohin auch alle mit einem solchen Factor verbundenen Glieder. Dieser unser Ausdruck von $\frac{d^m x}{d\mathfrak{x}^m}$ reducirt sich daher unter solchen Umständen auf den einfacheren:

$$\frac{d^m \mathfrak{x}}{dx^m} = -\frac{1}{\varphi_{,}^{2m-1}} \, \mathrm{S} \left[A_m \, (-\varphi_{,})^{\xi_1} \, \varphi'^{\eta_1} \, \varphi_{,,}^{\xi_2} \, \varphi_{,}'^{\eta_2} \, \varphi_{,,,}^{\xi_3} \, \varphi_{,,}'^{\eta_3} \, \ldots\ldots\ldots\ldots \right]$$

$$\begin{array}{l} \xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + \xi_3 + \eta_3 + \ldots\ldots = 2m - 1 \\ \quad\;\; \eta_1 \quad\;\; + \eta_2 \quad\;\; + \eta_3 + \ldots\ldots = m \\ \qquad\qquad \xi_2 + \eta_2 + 2\xi_3 + 2\eta_3 + \ldots\ldots = m - 1 \end{array}$$

Hier haben wir den Coefficienten A_m genannt, um anzudeuten, dass er der Formel für den m^{ten} Differentialquotienten angehöre. Wir differenziren diese Formel nach allen x, sowohl dem explicit in φ vorhandenen, als auch dem in $\mathfrak{x}$, wie es aus der Gleichung $\varphi(x,\mathfrak{x}) = 0$ abgeleitet wird, vorfindigen und erhalten, weil:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dx} = -\frac{\varphi'}{\varphi_{,}}$$

$$\frac{d\varphi_{,}}{dx} = \frac{1}{\varphi_{,}}\left[\varphi_{,}\varphi_{,}' - \varphi'\varphi_{,,}\right], \quad \frac{d\varphi_{,,}}{dx} = \frac{1}{\varphi_{,}}\left[\varphi_{,}\varphi_{,,}' - \varphi'\varphi_{,,,}\right], \quad \frac{d\varphi_{,,,}}{dx} = \frac{1}{\varphi_{,}}\left[\varphi_{,}\varphi_{,,}' - \varphi'\varphi_{IV}\right], \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\varphi'}{dx} = \frac{1}{\varphi_{,}}\left[-\varphi'\varphi_{,}'\right], \quad \frac{d\varphi_{,}'}{dx} = \frac{1}{\varphi_{,}}\left[-\varphi'\varphi_{,,}'\right], \quad \frac{d\varphi_{,,}'}{dx} = \frac{1}{\varphi_{,}}\left[-\varphi'\varphi_{,,,}'\right], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist, folgenden combinatorischen Ausdruck für den nächsten $(m+1)^{\text{sten}}$ Differentialquotienten:

$$\frac{d^{m+1}\mathfrak{x}}{dx^{m+1}} = -\frac{1}{\varphi_{,}^{2m+1}} \, \mathrm{S} \Big[A_m \, (-\varphi_{,})^{\xi_1} \, \varphi_{,,}'^{\eta_1} \, \varphi_{,,}^{\xi_2} \, \varphi_{,}'^{\eta_2} \, \varphi_{,,,}^{\xi_3} \, \varphi_{,,}'^{\eta_3} \, \varphi_{IV}^{\xi_4} \, \varphi_{,,,}'^{\eta_4} \, \ldots\ldots\ldots\ldots \times$$

$$\times \Big((2m-1-\xi_1)\big((-\varphi_{,})\varphi_{,}' + \varphi'\varphi_{,,}\big) + \eta_1(-\varphi_{,})\varphi_{,}' + \xi_2 \frac{(-\varphi_{,})^2\varphi_{,,}' + (-\varphi_{,})\varphi'\varphi_{,,,}}{\varphi_{,,}} + \eta_2 \frac{(-\varphi_{,})\varphi'\varphi_{,}'}{\varphi_{,}'} +$$

$$+ \xi_3 \frac{(-\varphi_{,})^2\varphi_{,,,}' + (-\varphi_{,})\varphi'\varphi_{IV}}{\varphi_{,,,}} + \eta_3 \frac{(-\varphi_1)\varphi'\varphi_{,,,}'}{\varphi_{,,}'} + \ldots\ldots\ldots \Big) \Big]$$

$$\begin{array}{l} \xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + \xi_3 + \eta_3 + \ldots\ldots\ldots = 2m - 1 \\ \quad\;\; \eta_1 \quad\;\; + \eta_2 \quad\;\; + \eta_3 + \ldots\ldots\ldots = m \\ \qquad\qquad \xi_2 + \eta_2 + 2\xi_3 + 2\eta + \ldots\ldots\ldots = m - 1 \end{array}$$

Nachdem aber die Formel, aus welcher er eben abgeleitet wurde, wie wir voraussetzen, eine allgemeine, für jedes m giltige ist, folglich auch dann noch zu Recht besteht, wenn man m in $m+1$ verwandelt, so muss die folgende, auf diese Weise erhaltene Gleichung:

$$\frac{d^{m+1}\mathfrak{x}}{dx^{m+1}} = -\frac{1}{\varphi_{,}^{2m+1}} \mathbf{S}\left[A_{m+1}\,(-\varphi_{,})^{\xi_1}\,\varphi'^{\eta_1}\,\varphi_{,,}^{\xi_2}\,\varphi_{,}'^{\eta_2}\,\varphi_{,,,}^{\xi_3}\,\varphi_{,,}'^{\eta_3}\,\varphi_{IV}^{\xi_4}\,\varphi_{,,,}'^{\eta_4}\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

(415)

$$\begin{aligned} \xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + \xi_3 + \eta_3 + \ldots\ldots &= 2m+1 \\ \eta_1 \quad + \eta_2 \quad + \eta_3 + \ldots\ldots &= m+1 \\ \xi_2 + \eta_2 + 2\xi_3 + 2\eta_3 + \ldots\ldots &= m \end{aligned}$$

mit der nächst vorhergehenden verglichen, in vollster Uebereinstimmung Glied für Glied dasselbe Resultat geben, nicht mehr und auch nicht weniger. Diese Gleichstellung soll uns nun zu den Werthen der mit A bezeichneten Coefficienten verhelfen. Wir leiten sie also ein und zwar anfangend von den einfachsten derjenigen Fälle, die beim Rationalmachen einen praktischen Nutzen versprechen. Ein solcher wäre zunächst:

(416)
$$\varphi(x,\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^2 + a\mathfrak{x} + b + cx = 0.$$

Man wird sich dieser Substitution bedienen, um in der Differentialgleichung zwei gebrochene Ansteigungszahlen in ganze zu verwandeln und vielleicht auch noch nebenher eine Wurzel aus $cx + b$ aus der Gleichung oder dem Integrale wegzuschaffen. Der Coefficient a ist hiebei dem Ermessen des Rechners überlassen und es kann von ihm ein beliebiger Gebrauch gemacht werden. Legt man diese Function φ zu Grunde, so sind nur $\varphi_{,}$, φ', $\varphi_{,,}$ von Null verschieden, alle übrigen Differentialquotienten von φ hingegen Null, daher denn auch die Werthe der Buchstabengrössen η_2, η_3, ξ_3, η_4, ξ_4, ... in den von Null verschiedenen Bestandtheilen obiger Summen sämmtlich nur Null sein können. Wendet man sich unter diesen Umständen an die Bedingungsgleichungen, so sieht man, dass sie nur eine einzige Auflösung in ganzen Zahlen zulassen, nämlich: $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = m$, $\xi_2 = m-1$, die Summe daher sowohl in der (413) wie in der (415) auf ein monomisches Glied zusammenschrumpfe. Man hat daher aus (413):

$$\frac{d^m\mathfrak{x}}{dx^m} = -\frac{A_m\,\varphi'^m\,\varphi_{,,}^{m-1}}{\varphi_{,}^{2m-1}}.$$

aus der (415) hingegen:

$$\frac{d^{m+1}\mathfrak{x}}{dx^{m+1}} = -\frac{A_{m+1}\,\varphi'^{m+1}\,\varphi_{,,}^{m}}{\varphi_{,}^{2m+1}}.$$

Hiemit in Übereinstimmung liefert die durch Differentiation erhaltene (414):

$$\frac{d^{m+1}\mathfrak{x}}{dx^{m+1}} = -\frac{A_m\,(2m-1)\,\varphi'^{m+1}\,\varphi_{,,}^{m}}{\varphi_{,}^{2m+1}}.$$

Es ist also:

$$A_{m+1} = (2m-1)\,A_m$$

und folglich ebenso, da man in dieser allgemeinen Formel m in $m-1$, $m-2$, ... zu verwandeln berechtigt ist:

$$\begin{aligned} A_m &= (2m-3)\,A_{m-1} \\ A_{m-1} &= (2m-5)\,A_{m-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_2 &= A_1. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllllll} \xi_1 = \eta_2 = m-1, & m-2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & 2, & 1, & 0 \\ \xi_2 = \quad 0, & 1, & \ldots\ldots\ldots\ldots & m-3, & m-2, & m-1 \\ \eta_1 = \quad 1, & 2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & m-2, & m-1, & m. \end{array}$$

Weil in diesem Falle alle Grössen der Bedingungsgleichungen sich durch die einzige ξ_1 ausgedrückt finden, so ist es gestattet, sie alle, bis auf diese eine, aus der Summenformel zu eliminiren. Auch A kann hiebei als Function von m und ξ_1 aufgefasst werden, was man dadurch andeuten wird, dass man diesen Coefficienten mit A_{m,ξ_1} bezeichnet. Die drei Bedingungsgleichungen gehen zusammen in eine einzige, welche lediglich zu besagen hat, dass ξ_1 aller möglichen Werthe von 0 bis $m-1$ fähig sei. Die Formel (413) geht daher jetzt über in:

$$\frac{d^m x}{dx^m} = -\frac{1}{\varphi_,^{2m-1}} \underset{\xi+\eta=m-1}{\mathrm{S}} \left[A_{m,\xi}\,(-\varphi_,)^{\xi}\,\varphi'^{\,m-\xi}\,\varphi_{,,}^{m-\xi-1}\,\varphi_,'^{\,\xi}\right] \tag{419}$$

Die für den nächstfolgenden Differentialquotienten geltende (415) wird:

$$\frac{d^{m+1} x}{dx^{m+1}} = -\frac{1}{\varphi_,^{2m+1}} \underset{\xi+\eta=m}{\mathrm{S}} \left[A_{m+1,\xi}\,(-\varphi_,)^{\xi}\,\varphi'^{\,m-\xi+1}\,\varphi_{,,}^{m-\xi}\,\varphi_,'^{\,\xi}\right].$$

Die hier vorhandene Summe, in entwickelter Gestalt aufgeschrieben, besteht aus den folgenden Gliedern $m+1$ an der Zahl:

$$\begin{aligned} \mathrm{S} = \;& A_{m+1,m}\;(-\varphi_,)^m\,\varphi'\,\varphi_,'^{\,m} \\ &+ A_{m+1,m-1}\;(-\varphi_,)^{m-1}\,\varphi'^{\,2}\,\varphi_{,,}\,\varphi_,'^{\,m-1} \\ &+ A_{m+1,m-2}\;(-\varphi_,)^{m-2}\,\varphi'^{\,3}\,\varphi_{,,}^2\,\varphi_,'^{\,m-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ A_{m+1,1}\;(-\varphi_,)\,\varphi'^{\,m}\,\varphi_{,,}^{m-1}\,\varphi_,' \\ &+ A_{m+1,0}\;\varphi'^{\,m+1}\,\varphi_{,,}^{m} \end{aligned} \tag{420}$$

Die Formel (414) hingegen gibt für denselben $(m+1)^{\text{sten}}$ Differentialquotienten unter den gemachten Voraussetzungen zunächst den folgenden Werth in Summengestalt:

$$\frac{d^{m+1} x}{dx^{m+1}} = -\frac{1}{\varphi_,^{2m+1}} \underset{\xi+\eta=m-1}{\mathrm{S}} \left\{A_{m,\xi}\,(-\varphi_,)^{\xi}\,\varphi'^{\,m-\xi}\,\varphi_{,,}^{m-\xi-1}\,\varphi_,'^{\,\xi} \times \left[(3m-2\xi-1)(-\varphi_,)\,\varphi_,' + (2m-\xi-1)\,\varphi'\varphi_{,,}\right]\right\}$$

Auch diese Summe zeichnen wir auf in entwickelter Gestalt. Sie besteht gleichfalls aus Gliedern $m+1$ an der Zahl, die dieselben Potenzen der verschieden gestrichelten φ zu Factoren haben. Sie sind:

$$
\begin{aligned}
S = & \qquad\qquad (m+1)\,A_{m,m-1}\,(-\varphi_{,})^{m}\,\varphi'\,\varphi_{,}'^{m} \\
& + \left[(m+3)\,A_{m,m-2} + m\,A_{m,m-1}\right](-\varphi_{,})^{m-1}\,\varphi'^{2}\,\varphi_{,,}\,\varphi_{,}'^{m-1} \\
& + \left[(m+5)\,A_{m,m-3} + (m+1)\,A_{m,m-2}\right](-\varphi_{,})^{m-2}\,\varphi'^{3}\,\varphi_{,,}^{2}\,\varphi_{,}'^{m-2} \\
& + \left[(m+7)\,A_{m,m-4} + (m+2)\,A_{m,m-3}\right](-\varphi_{,})^{m-3}\,\varphi'^{4}\,\varphi_{,,}^{3}\,\varphi_{,}'^{m-3} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left[(3m-3)\,A_{m,1} + (2m-3)\,A_{m,2}\right](-\varphi_{,})^{2}\,\varphi'^{m-1}\,\varphi_{,,}^{m-2}\,\varphi_{,}'^{2} \\
& + \left[(3m-1)\,A_{m,0} + (2m-2)\,A_{m,1}\right](-\varphi_{,})\,\varphi'^{m}\,\varphi_{,,}^{m-1}\,\varphi_{,}' \\
& \qquad\qquad + (2m-1)\,A_{m,0}\,\varphi'^{m+1}\,\varphi_{,,}^{m}
\end{aligned}
$$

Damit aber die volle Übereinstimmung stattfinde zwischen den beiden Summen und folglich zwischen den beiden Werthen von $\frac{d^{m+1}r}{dx^{m+1}}$, ist noch nothwendig, dass die A genannten Coefficienten folgendes System von Beziehungsgleichungen erfüllen:

$$
\begin{aligned}
A_{m+1,m} &= (m+1)\,A_{m,m-1} \\
A_{m+1,m-1} &= (m+3)\,A_{m,m-2} + m\,A_{m,m-1} \\
A_{m+1,m-2} &= (m+5)\,A_{m,m-3} + (m+1)\,A_{m,m-2} \\
A_{m+1,m-3} &= (m+7)\,A_{m,m-4} + (m+2)\,A_{m,m-3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{m+1,2} &= (3m-3)\,A_{m,1} + (2m-3)\,A_{m,2} \\
A_{m+1,1} &= (3m-1)\,A_{m,0} + (2m-2)\,A_{m,1} \\
A_{m+1,0} &= (2m-1)\,A_{m,0}
\end{aligned}
$$

Diese sind es also, denen wir die allgemeinen Werthe von $A_{m,m-1}$, $A_{m,m-2}$, ... $A_{m,0}$ in Function von m und hiemit auch den allgemeinen Werth von $A_{m,\xi}$ in Function von m und ξ zu entringen haben. Wir nehmen zu diesem Zwecke die erste dieser Gleichungen vor, und ersetzen in derselben m der Reihe nach durch $m-1$, $m-2$, ... 1, so ergeben sich uns folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
A_{m,m-1} &= m\,A_{m-1,m-2} \\
A_{m-1,m-2} &= (m-1)\,A_{m-2,m-3} \\
A_{m-2,m-3} &= (m-2)\,A_{m-3,m-4} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{2,1} &= 2\,A_{1,0}
\end{aligned}
$$

Sie liefern, auf dem Wege der Multiplication mit einander verbunden, eine Formel für $A_{m,m-1}$, nämlich:

$$A_{m,m-1} = m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\ldots\ldots\ 2\,.\,A_{1,0}.$$

Das Glied mit dem Coefficienten $A_{1,0}$ geht aus dem ersten Bestandtheile der Summe (420) für $m=0$ hervor, und ist: $A_{1,0}\,\varphi'$. Es gehört offenbar zum ersten Differentialquotienten $\frac{dr}{dx}$. Da aber dieser gleich $-\frac{\varphi'}{\varphi_{,}}$ ist, so hat man offenbar: $A_{1,0}=1$ und folglich:

$$A_{m,m-1} = m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\ldots\ldots\, 2.1 = m! \tag{422}$$

Verfahren wir jetzt mit der zweiten der Formeln (421) ebenso, m in derselben der Reihe nach durch: $m-1$, $m-2$, ... 2 ersetzend. Das Ergebniss ist:

$$\begin{aligned}
A_{m,m-2} &= (m+2)\,A_{m-1,m-2} + (m-1)\,A_{m-1,m-2}\\
A_{m-1,m-3} &= (m+1)\,A_{m-2,m-4} + (m-2)\,A_{m-2,m-3}\\
A_{m-2,m-4} &= \quad m \quad A_{m-3,m-5} + (m-3)\,A_{m-3,m-4}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{3,1} &= \quad 5 \quad A_{2,0} \quad + \quad 2 \quad A_{2,1}
\end{aligned}$$

Von diesen Gleichungen multipliziren wir die erste mit Eins, die zweite mit $m+2$, die dritte mit $(m+2)\,(m+1)$ u. s. w., die letzte endlich mit: $(m+2)\,(m+1)\,m\,\ldots\ldots 6$, sodann addiren wir sie und erhalten:

$$\begin{aligned}
A_{m,m-2} = &\quad (m+2)\,(m+1)\,m\,(m-1)\,\ldots\ldots\ldots\, 6.5\,A_{2,0} + \\
&+ (m-1)\,A_{m-1,m-2} + (m+2)\,(m-2)\,A_{m-2,m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ (m+2)\,(m+1)\,m\,(m-1)\,\ldots\ldots\ldots\, 6.2\,A_{2,1}.
\end{aligned}$$

Das Glied mit $A_{2,0}$ geht aus dem zweiten Gliede der Summe (420) hervor für $m=1$ und heisst: $A_{2,0}\,\varphi'^2\,\varphi_{,,}$. Es gehört offenbar zum zweiten Differentialquotienten, für welchen wir die Formel (174) Seite 102 gewonnen haben. Es erscheint allda das Glied $\varphi'^2\,\varphi_{,,}$ verknüpft mit dem Coefficienten Eins; mithin ist $A_{2,0}=1$. Zudem hat man vermöge der Formel (422):

$$A_{m-1,m-2} = (m-1)!\,, \qquad A_{m-2,m-3} = (m-2)!\,, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad A_{2,1} = 2!.$$

Mit Hilfe dieser Werthe geht unsere eben gewonnene Formel über in:

$$\begin{aligned}
A_{m,m-2} &= \frac{(m+2)!}{4!} + (m-1)\,[(m-1)!] + (m+2)(m-2)\,[(m-2)!] + (m+2)(m+1).(m-3)\,[(m-3)!] + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(m+2)!}{5!}\;2.2!\\
&= (m+2)!\left[\frac{1}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \frac{3}{4.5.6} + \ldots\ldots\ldots + \frac{m-1}{m\,(m+1)\,(m+2)}\right]
\end{aligned} \tag{423}$$

Die hier vorkommende Reihe ist summirbar mit vielen anderen, der Form nach mit ihr verwandten. Um aber mit leichter Mühe zu den Ausdrücken für die verschiedenen Formeln zu gelangen, könnte man sich benehmen auf folgende Weise: Man zeichnet die nicht summirbare Reihe der reciproken Werthe der natürlichen Zahlen zweimal auf, so jedoch, dass nicht das erste Glied unter das erste, das zweite Glied unter das zweite zu stehen kommt u. s. w., sondern dass die obere Reihe gegen die untere um ein Glied verschoben ist, und subtrahirt sie dann von einander Glied für Glied, jedes der unteren Reihe von dem unmittelbar darüberstehenden der oberen, so:

$$\mathbf{S} = \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\dots\dots + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots\dots\dots + \frac{1}{m+2}$$

$$0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots\dots\dots + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{m+2}$$

so ergibt sich daraus die Summe der folgenden Reihe:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots\dots\dots + \frac{1}{(m+1)(m+2)},$$

mit der man dann auf genau dieselbe Weise verfahrend weiter erhält:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{(m+1)(m+2)}\right) = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \dots\dots + \frac{1}{m(m+1)(m+2)}$$

und so geht es fort. Bemerkt man jetzt noch überdiess, dass sich die in der Formel (423) vorfindige Reihe auch so schreiben lasse:

$$\frac{2-1}{2.3.4} + \frac{3-1}{3.4.5} + \frac{4-1}{4.5.6} + \dots\dots\dots + \frac{m-1}{m(m+1)(m+2)} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{m+2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3} - \frac{1}{(m+1)(m+2)}\right] = \frac{m(m-1)}{2^2(m+1)(m+2)}.$$

Hieraus ergibt sich nun der folgende Werth unseres gesuchten Coefficienten:

$$A_{m,m-2} = \frac{m!\, m(m-1)}{2^2} = \frac{m!}{2}\binom{m}{2}.$$

Wenden wir uns jetzt zur dritten der Formeln (421), und verwandeln wir in derselben m der Reihe nach in $m-1$, $m-2$, ... 3, so gelangen wir zum folgenden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A_{m,m-3} &= (m+4)\, A_{m-1,m-4} + m\, A_{m-1,m-3} \\
A_{m-1,m-4} &= (m+3)\, A_{m-2,m-5} + (m-1)\, A_{m-2,m-4} \\
A_{m-2,m-5} &= (m+2)\, A_{m-3,m-6} + (m-2)\, A_{m-3,m-5} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A_{5,2} &= 9\, .\, A_{4,1} + 5\, .\, A_{4,2} \\
A_{4,1} &= 8\, .\, A_{3,0} + 4\, .\, A_{3,1}.
\end{aligned}$$

Sie geben der Reihe nach die erste mit Eins, die zweite mit $m+4$, die dritte mit $(m+4)(m+3)$, und endlich die letzte mit $(m+4)(m+3)\,.....\,9$ multiplizirt und addirt:

$$\begin{aligned}
A_{m,m-3} = \; & (m+4)(m+3)(m+2) \dots\dots\dots 9.8\, A_{3,0} + \\
& + m\, A_{m-1,m-3} + (m+4)(m-1)\, A_{m-2,m-4} + (m+4)(m+3)(m-2)\, A_{m-3,m-5} + \\
& \dots\dots\dots\dots + (m+4)(m+3)(m+2) \dots\dots\dots\dots 9.4\, A_{3,1}.
\end{aligned}$$

Hier geht $A_{3,0}$ aus dem dritten Gliede der Summe (420) hervor für $m=2$ und gehört zu $\varphi'^2 \varphi_{,,}^2$. Ein solches Glied aber ist in der Formel (175) für $\frac{d^3 r}{dx^3}$ vorfindig, versehen mit dem Coefficienten 3. Man hat daher $A_{3,0}=3$. Die Werthe ferner von $A_{m-1,m-3}$, $A_{m-2,m-4}$, ... $A_{3,1}$ gehen sämmtlich aus der eben gewonnenen Formel (424) hervor, wenn man in ihr m der Reihe nach in $m-1$, $m-2$, ... 3 umsetzt. Substituirt man dieselben in die vorliegende Gleichung, und summirt dann ähnliche zum Vorschein kommende Reihengebilde, wie diejenigen, welche wir eben kennen gelernt haben, und auf dieselbe Weise, so bekömmt man:

$$A_{m,m-3} = \frac{(m+1)!}{2.4} \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = \frac{(m+1)!}{2^2.2!}\binom{m}{3}. \tag{425}$$

Das Gesetz, nach welchem diese aufeinanderfolgenden Coefficienten gebildet sind, fällt nun bereits in die Augen. Nach demselben wäre allgemein für jeden Werth des Buchstaben η von Null bis $n-1$:

$$A_{m,m-\eta-1} = \frac{(m+\eta-1)!}{2^\eta\,\eta!}\binom{m}{\eta+1}. \tag{426}$$

Dass er es in aller Strenge wirklich sei, davon überzeugt man sich durch unmittelbare Substitution in diejenige der Gleichungen (421), die dazu bestimmt ist, ihn zu liefern. In ihm sind die Ausdrücke (422) und (424) für $A_{m,m-1}$ und $A_{m,m-2}$ als specielle Fälle enthalten, und wir bekommen demnach für $\frac{d^m r}{dx^m}$ die nachstehende allgemeine auf ein in der Gestalt (418) erscheinendes φ gegründete Summenformel:

$$\frac{d^m r}{dx^m} = -\frac{1}{\varphi_{,}^{2m-1}}\,\mathrm{S}\left[\frac{(m-\eta-1)!}{2^\eta\,\eta!}\binom{m}{\eta+1}(-\varphi_{,})^{\xi}\,\varphi'^{m-\xi}\,\varphi_{,,}^{m-\xi-1}\,\varphi_{,}'^{\xi}\right] \tag{427}$$
$$\xi+\eta=m-1.$$

Noch einer abermals etwas complicirteren Form der Function φ sind wir genöthigt, unsere Aufmerksamkeit zu schenken, nämlich der folgenden:

$$\varphi(x,r) = r^2 + ar + b + x(cr^2 + gr + h), \tag{428}$$

weil in ihr die unter (182) und (183) Seite 104 aufgezählten rationalmachenden Substitutionsfunctionen als specielle Fälle enthalten sind, weil noch überdiess die (184) und (185) darauf zurückgeführt werden können. Wir haben hier: $\varphi_{,}$, φ', $\varphi_{,,}$, $\varphi'_{,}$, $\varphi'_{,,}$ von Null verschieden; die übrigen Differentialquotienten verschwinden. In den Bedingungsgleichungen zu (413) können daher auch nur: ξ_1, η_1, ξ_2, η_2, η_3 vorkommen; die übrigen sind der Nulle gleich. Die drei Bedingungsgleichungen sind also:

$$\begin{aligned} \xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + \eta_3 &= 2m-1 \\ \eta_1 \qquad + \eta_2 + \eta_3 &= m \\ \xi_2 + \eta_2 + 2\eta_3 &= m-1. \end{aligned}$$

Drei der darin enthaltenen Grössen kann man ausdrücken durch die zwei übrigen, welche letzteren am passendsten η_2 und η_3 sind. Man bekömmt nämlich ohne Mühe:

$$\xi_1 = \eta_2 + 2\eta_3, \qquad \eta_1 = m - \eta_2 - \eta_3, \qquad \xi_2 = m - 1 - \eta_2 - 2\eta_3.$$

Die letzte dieser drei Gleichungen besagt, dass weder ξ_2, noch η_2, noch weniger aber η_3 die Zahl $m-1$ zu überschreiten vermögen. Hat man sie so auf alle möglichen Weisen gewählt, so erscheinen η_1 und ξ_1 von selbst als ganze und positive Zahlen, so wie es sein muss. Wir können daher ξ_1 und η_1 aus der Summenformel wirklich eliminiren und es wird dann genügen, von diesen Gleichungen die dritte als einzige Bedingungsgleichung der Summe anzuhängen. Man kann sich hiebei erlauben, zur Vermeidung der Stellenzeiger ξ_2, η_2 und η_3 zu ersetzen durch η, ξ, ζ. Die allgemeine Formel (413) geht hiedurch über in:

$$\frac{d^m x}{dx^m} = -\frac{1}{\varphi_{,}^{2m-1}} \,\mathrm{S}\left[A_{m,\xi,\zeta}\,(-\varphi_{,})^{\xi+2\zeta}\,\varphi'^{\,m-\xi-\zeta}\,\varphi_{,,}^{\eta}\,\varphi_{,}'^{\,\xi}\,\varphi_{,,}'^{\,\zeta}\right].$$
$$\xi+\eta+2\zeta = m-1$$

Schreibt man in ihr anstatt m, $m+1$, so ergibt sich:

$$\frac{d^{m+1} x}{dx^{m+1}} = -\frac{1}{\varphi_{,}^{2m+1}} \,\mathrm{S}\left[A_{m+1,\xi,\zeta}\,(-\varphi_{,})^{\xi+2\zeta}\,\varphi'^{\,m-\xi-\zeta+1}\,\varphi_{,,}^{\eta}\,\varphi_{,}'^{\,\xi}\,\varphi_{,,}'^{\,\zeta}\right]$$
$$\xi+\eta+2\zeta = m.$$

Differenzirt man hingegen direkt nach allen x, oder, was dasselbe ist, ersetzt man in der (414) die griechischen Zahlzeichen durch die hier angenommenen Werthe, so erhält man abermals:

$$\frac{d^{m+1} x}{dx^{m+1}} = -\frac{1}{\varphi_{,}^{2m+1}} \,\mathrm{S}\Big[\left(A_{m,\xi,\zeta}\,(-\varphi_{,})^{\xi+2\zeta}\,\varphi'^{\,m-\xi-\zeta}\,\varphi_{,,}^{\eta}\,\varphi_{,}'^{\,\xi}\,\varphi_{,,}'^{\,\zeta}\right)\times$$
$$\times\Big(\left(2m-1-\xi-2\zeta\right)\left((-\varphi_{,})\,\varphi_{,}'+\varphi'\varphi_{,,}\right)+(m-\xi-\zeta)(-\varphi_{,})\,\varphi_{,}'+\eta\,\frac{(-\varphi_{,})^2\,\varphi_{,,}'}{\varphi_{,,}}+\xi\,\frac{(-\varphi_{1})\,\varphi'\,\varphi_{,,}'}{\varphi_{,}'}\Big)\Big]$$
$$\xi+\eta+2\zeta = m-1$$

Diese zwei Werthe müssen in allen Gliedern übereinstimmen und durch Gleichstellung der Coefficienten haben die Werthe der letzteren hervorzugehen. Einige von ihnen kennen wir schon; alle diejenigen nämlich, für welche $\zeta=0$ ist, d. h. wir besitzen den allgemeinen Werth von $A_{m,\xi,0}$, gegeben durch die Formel (426). Es bleibt uns daher noch übrig, Formeln aufzusuchen für die anderen, für welche ζ von der Nulle verschieden ist. Um zu diesem Ziele zu gelangen, heben wir beiderseits aus der (430) sowohl, wie auch aus der (431) alle diejenigen Glieder heraus, für welche η einen und denselben Werth hat, ξ und ζ hingegen in (430) der Reihe nach die folgenden Systeme von Werthen annehmen:

$$\begin{array}{lllll} \zeta = & 0, & 1, & 2, & \ldots\ldots\ldots \\ \xi = & m-\eta, & m-\eta-2, & m-\eta-4, & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Diese Glieder sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{S} = \;& A_{m+1,m-\eta,0}\,(-\varphi_{,})^{m-\eta}\,\varphi'^{\,\eta+1}\,\varphi_{,,}^{\eta}\,\varphi_{,}'^{\,m-\eta} \\ &+ A_{m+1,m-\eta-2,1}\,(-\varphi_{,})^{m-\eta}\,\varphi'^{\,\eta+2}\,\varphi_{,,}^{\eta}\,\varphi_{,}'^{\,m-\eta-2}\,\varphi_{,,}' \\ &+ A_{m+1,m-\eta-4,2}\,(-\varphi_{,})^{m-\eta}\,\varphi'^{\,\eta+3}\,\varphi_{,,}^{\eta}\,\varphi_{,}'^{\,m-\eta-4}\,\varphi_{,,}'^{\,2} \\ &+ A_{m+1,m-\eta-6,3}\,(-\varphi_{,})^{m-\eta}\,\varphi'^{\,\eta+4}\,\varphi_{,,}^{\eta}\,\varphi_{,}'^{\,m-\eta-6}\,\varphi_{,,}'^{\,3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Um hingegen auch aus der Summe (431) jene Glieder, denen einerlei η angehört, zu erhalten, zerlegen wir dieselbe in ihre Bestandtheile, vier an der Zahl, so viele nämlich, als Glieder unter dem Summenzeichen. Sie sind:

$$\frac{d^{m+1}x}{dx^{m+1}} = -\frac{1}{\varphi_{,}^{2m+1}}\left\{\begin{array}{l} \mathbf{S}\left[(3m-1-2\xi-3\zeta)\,A_{m,\xi,\zeta}\,(-\varphi_{,})^{\xi+2\zeta+4}\,\varphi'^{\,m-\xi-\zeta}\,\varphi_{,,}^{\eta}\,\varphi'^{\,\xi+1}_{,}\,\varphi'^{\,\zeta}_{,,}\right]+ \\ +\,\mathbf{S}\left[(2m-1-\xi-2\zeta)\,A_{m,\xi,\zeta}\,(-\varphi_{,})^{\xi+2\zeta}\,\varphi'^{\,m-\xi-\zeta+1}\,\varphi_{,,}^{\eta+1}\,\varphi'^{\,\xi}_{,}\,\varphi'^{\,\zeta}_{,,}\right]+ \\ +\,\mathbf{S}\left[\eta\,A_{m,\xi,\zeta}\,(-\varphi_{,})^{\xi+2\zeta+2}\,\varphi'^{\,m-\xi-\zeta}\,\varphi_{,,}^{\eta-1}\,\varphi'^{\,\xi}_{,}\,\varphi'^{\,\zeta+1}_{,,}\right]+ \\ +\,\mathbf{S}\left[\xi\,A_{m,\xi,\zeta}\,(-\varphi_{,})^{\xi+2\zeta+1}\,\varphi'^{\,m-\xi-\zeta+1}\,\varphi_{,,}^{\eta}\,\varphi'^{\,\xi-1}_{,}\,\varphi'^{\,\zeta+1}_{,,}\right] \end{array}\right.$$

$$\xi + \eta + 2\zeta = m - 1$$

und nun suchen wir aus jeder dieser vier Summen jene Glieder heraus, welche mit denselben Potenzprodukten der φ, wie sie in der Formel der Reihe nach vorkommen, mit Factoren verknüpft sind, so erhalten wir durch Gleichstellung der Coefficienten:

$$(433)\quad\begin{array}{l} A_{m+1,m-\eta,0} = (m+2\eta+1)A_{m,m-\eta-1,0}+(m+\eta-1)A_{m,m-\eta,0} \\ A_{m+1,m-\eta-2,1} = (m+2\eta+2)A_{m,m-\eta-3,1}+(m+\eta-1)A_{m,m-\eta-2,1}+(\eta+1)A_{m,m-\eta-2,0}+(m-\eta-1)A_{m,m-\eta-1,0} \\ A_{m+1,m-\eta-4,2} = (m+2\eta+3)A_{m,m-\eta-5,2}+(m+\eta-1)A_{m,m-\eta-4,2}+(\eta+1)A_{m,m-\eta-4,1}+(m-\eta-3)A_{m,m-\eta-3,1} \\ A_{m+1,m-\eta-6,3} = (m+2\eta+4)A_{m,m-\eta-7,3}+(m+\eta-1)A_{m,m-\eta-6,3}+(\eta+1)A_{m,m-\eta-6,2}+(m-\eta-5)A_{m,m-\eta-5,2} \\ A_{m+1,m-\eta-8,4} = (m+2\eta+5)A_{m,m-\eta-9,4}+(m+\eta-1)A_{m,m-\eta-8,4}+(\eta+1)A_{m,m-\eta-8,3}+(m-\eta-7)A_{m,m-\eta-7,3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Die erste dieser Gleichungen enthält lauter durch die (426) bereits gegebene Coefficienten, und es kann sehr leicht nachgewiesen werden, dass sie identisch erfüllt sei durch die eben aus (426) gezogenen Werthe. Die zweite dieser Gleichungen hingegen sollte $A_{m,m-\eta,1}$ geben, es fällt indessen schwer ihr diesen Coefficienten zu entringen auf den bisher betretenen Wegen. Wir finden uns daher veranlasst, Gebrauch zu machen von der Erfahrung, dass sämmtliche mit A bezeichneten Coefficienten monomische Ausdrücke seien, die sich einer von dem nächstfolgenden nur unterscheiden durch einen Factor von ziemlich einfachem Baue. Wir nehmen dem gemäss an, dass:

$$A_{m,m-\eta,1} = H_{m,m-\eta}\;A_{m,m-\eta,0}$$

sei, unter $H_{m,m-\eta}$ einen bisher noch unbekannten, m und η enthaltenden Ausdruck verstanden. Die zweite der Gleichungen (433) geht kraft dieser Voraussetzung über in:

$$\frac{(m+\eta+2)\,(m+\eta+1)\,(m+\eta)\,(m+1)}{2^2\,(\eta+1)\,(\eta+2)\,(\eta+2)\,(\eta+3)}\,H_{m+1,m-\eta-2} =$$

$$= \frac{(m+2\eta+2)(m+\eta+1)(m+\eta)(m-\eta-2)}{2^2\,(\eta+1)\,(\eta+2)\,(\eta+2)\,(\eta+3)}\,H_{m,m-\eta-3} + \frac{(m+\eta)(m+\eta-1)}{2\,(\eta+1)\,(\eta+2)}\,H_{m,m-\eta-2} + \frac{m+\eta}{2(\eta+2)} + 1.$$

Sodann sorgen wir zuvörderst für eine Vereinfachung dieser Gleichung, erzielt dadurch, dass wir z. B. als Multiplicator von $H_{m,m-\eta-3}$ einen Bruch annehmen, der die Factoren $(\eta+1)(\eta+2)(\eta+3)$ im Zähler, dagegen die $(m+\eta)(m+\eta+1)$ im Nenner trägt. Wir nehmen also an:

$$H_{m,m-\eta} = \frac{2\eta\ (\eta - 1)\ (\eta - 2)}{(m + \eta - 2)\ (m + \eta - 3)}\ K_{m,m-\eta}.$$

Hiedurch verwandelt sich die vorliegende Gleichung unmittelbar in die folgende:

$$(m+\eta)\,(m+1)\,K_{m+1,m-\eta-2} = (m+2\eta+2)\,(m-\eta-2)\,K_{m,m-\eta-3} + 2\eta(\eta+2)\ K_{m,m-\eta-2} + m + 3\eta + 4,$$

welcher letzteren augenscheinlich der Werth $K_{m,m-\eta} = 1$ identisch Genüge leistet. Wir haben also endgiltig:

$$H_{m,m-\eta} = \frac{2\eta\,(\eta-1)\,(\eta-2)}{(m+\eta-2)\ (m+\eta-3)},\qquad A_{m,m-\eta-3,1} = \binom{\eta+3}{1}\ \frac{(m+\eta-1)\,!}{2^{\eta+1}\ \eta\,!}\ \binom{m}{\eta+3}. \tag{434}$$

Genau auf demselben Wege gelangt man jetzt zu dem Werthe des nächstfolgenden Coefficienten aus der nächstfolgenden dritten der Gleichungen (433). Er ist gegeben durch die Formel:

$$A_{m,m-\eta-5,2} = \binom{\eta+5}{2}\ \frac{(m+\eta-1)\,!}{2^{\eta+2}\ \eta\,!}\ \binom{m}{\eta+5}. \tag{435}$$

Das allgemeine Gesetz, nach welchem alle diese Coefficienten gebildet sind, fällt bereits in die Augen. Man hat nämlich voraussichtlich:

$$A_{m,m-\eta-2\zeta-1,\zeta} = \binom{\eta+2\zeta+1}{\zeta}\ \frac{(m+\eta-1)!}{2^{\eta+\zeta}\ \eta\,!}\binom{m}{\eta+2\zeta+1} = \frac{(m+\eta-1)!}{2^{\eta+\zeta}\ \eta\,!\ \zeta!}\ \frac{m\,!}{(m-\eta-2\zeta-1)!\,(\eta+\zeta+1)\,!}, \tag{436}$$

und überzeugt sich auch von der Richtigkeit dieses Werthes durch unmittelbare Substitution in die allgemeine der Gleichungen (433), d. h. in die:

$$A'_{m+1,m-\eta-2\zeta,\zeta} = (m+2\eta+\zeta+1)\ A_{m,m-\eta-2\zeta-1,\zeta} + (m+\eta-1)\ \dot{A}_{m,m-\eta-2\zeta,\zeta} + (\eta+1)\,A_{m,m-\eta-2\zeta,\zeta-1} +$$
$$+(m-\eta-2\zeta+1)\ A_{m,m-\eta-2\zeta+1,\zeta-1},$$

welche sich dadurch in eine identische verwandelt. Diesen eben ermittelten Werth des Coefficienten A substituiren wir jetzt in unsere Summenformel (429) und gelangen hiemit zu einer Gleichung, in der die (417) und (427) als specielle Fälle enthalten sind:

$$\frac{d^m \mathfrak{r}}{dx^m} = -\frac{1}{\varphi_,^{2m-1}}\ \mathrm{S}\left[\binom{\eta+2\zeta+1}{\zeta}\ \frac{(m+\eta-1)\,!}{2^{\eta+\zeta}\ \eta\,!}\ \binom{m}{\eta+2\zeta+1}\ (-\varphi_,)^{\xi+2\zeta}\ \varphi'^{\,m-\xi-\zeta}\ \varphi_{,,}^{\eta}\ \varphi_,'^{\,\xi}\ \varphi_{,,}'^{\,\zeta}\right]$$
$$\xi + \eta + 2\zeta = m - 1 \tag{437}$$

und es stellt in derselben φ den folgenden Ausdruck dar:

$$\varphi\ (x,\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}^2 + a\mathfrak{r} + b + x\ (c\mathfrak{r}^2 + g\mathfrak{r} + h),$$

während noch überdiess:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx},\qquad \varphi_, = \frac{d\varphi}{d\mathfrak{r}},\qquad \varphi_,' = \frac{d^2\varphi}{dx\,d\mathfrak{r}},\qquad \varphi_{,,} = \frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{r}^2},\qquad \varphi_{,,}' = \frac{d^3\varphi}{dx\,d\mathfrak{r}^2}$$

ist. Diese Formel wird zur Einführung der neuen Veränderlichen $\mathfrak{r}$ anstatt x in all' den Fällen zureichen, deren im §. 5 Erwähnung geschieht, und diess zwar unmittelbar angewendet zur Wegschaffung

von Irrationalgrössen, wie $\sqrt{\frac{x+c}{ax+b}}$ und $\sqrt{x^2+ax+b}$ aus der Gleichung oder ihren particulären Integralen. Hat man hingegen eine Irrationalgrösse zu entfernen, wie $\sqrt[q]{ax+b}$, oder deren zwei an der Zahl, entweder wie $\sqrt{x+a}$ und $\sqrt{x+b}$ gestaltet, oder wie $\sqrt{\frac{x+a}{x+c}}$ und $\sqrt{\frac{x+b}{x+c}}$, Fälle, in denen die Substitutionsfunction φ von complicirterer Gestalt ist, nämlich:

$$\varphi = x\left[1 - ar^q\right] + c - br^q,$$

oder:

$$\varphi = (x + c)\left[ar^4 + br^2 + c\right] + gr^4 + hr^2 + k,$$

so wird man besser thun, nicht unmittelbar zur Einführung der neuen Variablen r zu schreiten, sondern wird ihr die einer anderen z vorangehen lassen, welche mit x durch eine der Gleichungen:

$$\varphi = x\left[1 - az\right] + c - bz,$$

oder:

$$\varphi = (x + c)\left[az^2 + bz + c\right] + gz^2 + hz + k$$

zusammenhängt. Hiezu reicht die Formel (437), oder auch gelegentlich die (417) und (427) aus. Hierauf substituirt man erst r anstatt z vermittelst der Gleichung $\varphi = z - r^q = 0$, oder $\varphi = z - r^2 = 0$, was vermittelst der Formel (417) geschehen kann, was sich aber besser und kürzer noch dadurch bewerkstelligen lassen wird, dass man anstatt r seinen Werth $\sqrt[q]{z}$ oder $\sqrt{z}$ unmittelbar in die Transformirte (411) einführt.

Es ist nicht unmöglich, ja es unterliegt sogar keiner bedeutenden Schwierigkeit, auch für complicirtere Fälle von algebraischen und transcendenten Substitutionen ähnliche Formeln aufzustellen und sogar die allgemeine abzuleiten, in der alle diejenigen enthalten sind, die wir im Verlaufe dieses Paragraphes kennen gelernt haben, allein man kennt vorderhand gar keine Veranlassung, die zur Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen vermittelst einer Transcendenten oder sonst wie verwickelteren Substitutionen nöthigen könnte. Wir lassen uns daher nicht ein, auf die Aufstellung symbolischer Formeln, die keinen unmittelbaren practischen Nutzen versprechen, und fügen nur noch die Bemerkung hinzu, dass überhaupt der Gebrauch von Summenformeln bei sehr einfachen Beispielen von Differentialgleichungen, wie sie gewöhnlich vorkommen, keineswegs eine Nothwendigkeit sei, dass man vielmehr in den meisten Fällen ihrer ganz und gar entrathen kann, und nur wenn die Differentialgleichungen complicirter werden, wird der Gebrauch dieser Formel zur unerlässlichen Nothwen-

V. Abschnitt.

Integrationsmethoden.

§. 1.

Integration in Form von aufsteigenden Reihen.

Die Form einer nach aufsteigenden Potenzen von x oder auch von $(x-\alpha)$ geordneten Reihe ist, wie wir aus der Mac-Laurin'schen Formel wissen, das allen Functionen passende Kleid; es ist aber auch schon bemerkt worden, dass eben darum diese Form allen Functionen ein und dasselbe Aussehen ertheile, und aus dieser Ursache im Allgemeinen weder zu ihrer Unterscheidung von einander, noch zur Ermittlung ihrer speciellen Eigenschaften besonders dienlich sei. Dem ungeachtet aber kommen dieser Reihenform drei Hauptvorzüge zu, die zu einem angelegentlicheren Studium derselben nöthigen, nämlich: **erstens**, sie ist die einzige, von der man Gebrauch machen kann, wenn man irgend allgemeine Eigenschaften der eine Differentialgleichung erfüllenden, oder, wenn man will, auch irgend eine andere Rolle spielenden Functionen, wie etwa Existenz erweisen will, eben weil sie die allgemeine ist: **zweitens**, da es Fälle gibt, in welchen die Mac-Laurin'sche Formel entweder überhaupt, oder ohne vorgängiger Sonderung eines gewissen Factors oder Divisors ihren Dienst verweigert, so bilden eben diese Fälle eines der allerwichtigsten Unterscheidungsmittel der particulären Integrale von einander, und **drittens** ist sie die der wirklichen numerischen Berechnung bei vorhandener Convergenz in der Regel am meisten zusagende. Wir sehen uns daher genöthigt, nicht nur der Integrationsmethode in Reihenform überhaupt unsere Aufmerksamkeit zu schenken, sondern auch alle in derselben vorkommenden Ausnahmsfälle einer sehr sorgfältigen Discussion zu unterwerfen, und diess um so mehr, als wir denn doch sehr oft in den Fall kommen, einen der einer linearen Differentialgleichung Genüge leistenden Werthe, oder auch mehrere, gerade in dieser Form zu benöthigen. Es sei also in Form einer nach aufsteigenden Potenzen von $(x-\alpha)$ geordneten Reihe zu integriren die allgemeine lineare Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung, in der man sich aber vorderhand die Coefficienten $\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_{n-1} \ldots \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_0$ als algebraische ganze und rationale Functionen von x denken mag, da wir nur solche Gleichungen zum Gegenstande unserer Untersuchungen gemacht haben:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{X}_n y^{(n)} + \mathfrak{X}_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_1 y' + \mathfrak{X}_0 y = 0,$$

Welche Function von x man sich auch anstatt y gesetzt denken mag, so wird das Gleichungspolynom $\mathfrak{P}$ auch immer eine Function von x vorstellen, die mittelst der Mac-Laurin'schen Formel nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ jedesmal in eine Reihe entwickelbar sein wird. Allenfällige Ausnahmen haben entweder gar keinen oder nur einen in die folgenden Entwicklungen sich selbst verflechtenden Einfluss. Bezeichnen wir daher mit P, P', P'', ... dasjenige, was aus $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ u. s. w. wird, wenn man in ihnen α anstatt x substituirt, eine Bezeichnung, in Gemässheit deren auch y, y', y'', ... X, X', X'' die Werthe sind, welche bezüglich y, y', y'' ..... $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$, ... annehmen, wenn man x in α verwandelt, so erhalten wir zunächst:

$$\mathfrak{P} = P + P'(x-\alpha) + \frac{1}{2} P''(x-\alpha)^2 + \dots\dots\dots \tag{2}$$

für jeden Werth von y; denken wir uns aber anstatt y einen Genüge leistenden Werth, so wird derselbe die Gleichung $\mathfrak{P}=0$ identisch machen, und zwar für jedes x, was nur dann angeht, wenn $P=P'=P''=\dots\dots=P^{(r)}=0$ wird für jedes ganze positive r. Nun erhält man aber, das Gleichungspolynom $\mathfrak{P}$ wiederholt differenzirend, und nach geschehener Differentiation α anstatt x setzend:

$$P = X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + X_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + X_1 y' + X_0 y = 0 \tag{3}$$

$$P' = X_n y^{(n+1)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-1} \\ + X'_n \end{array}\right] y^{(n)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-2} \\ + X'_{n-1} \end{array}\right] y^{(n-1)} + \dots + \left.\begin{array}{l} X_0 \\ + X'_1 \end{array}\right] y' + X'_0 y = 0 \tag{4}$$

$$P'' = X_n y^{(n+2)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-1} \\ + 2X'_n \end{array}\right] y^{(n+1)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-2} \\ + 2X'_{n-1} \\ + X''_n \end{array}\right] y^{(n)} + \dots + \left.\begin{array}{l} 2X'_0 \\ + X''_1 \end{array}\right] y' + X_0^{(r)} y = 0 \tag{5}$$

$$P^{(r)} = X_n y^{(n+r)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-1} \\ + \binom{r}{1} X'_n \end{array}\right] y^{(n+r-1)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-2} \\ + \binom{r}{1} X'_{n-1} \\ + \binom{r}{2} X''_n \end{array}\right] y^{(n+r-2)} + \dots + \left.\begin{array}{l} \binom{r}{r-1} X_0^{(r-1)} \\ + X_1^{(r)} \end{array}\right] y' + X_0^{(r)} y = 0 \tag{6}$$

Das allgemeine Glied der letzten Formel, d. h. das $s+1$ste ist:

$$y^{(n+r-s)} \left[X_{n-s} + \binom{r}{1} X'_{n-s+1} + \binom{r}{2} X''_{n-s+2} + \dots\dots\dots + \binom{r}{s-1} X_{n-1}^{(s-1)} + \binom{r}{s} X_n^{(s)}\right] \tag{7}$$

und wir bemerken, dass in demselben der Natur der Sache nach jene der Anfangs stehenden Coefficienten X, deren Stellenzeiger für gewisse s negativ sind, durch die Nulle ersetzt werden müssen, wodurch es sich als höchstens $(s+1)$-theiliger Ausdruck darstellt. Da wir nun offenbar im Sinne haben, den Werth von y zu ermitteln, und zwar in Reihenform, d. h. in der folgenden:

$$y = y + y'(x-\alpha) + \frac{1}{2} y''(x-\alpha)^2 + \dots\dots\dots; \tag{8}$$

so handelt es sich im Grunde um die Werthe der Coefficienten y, y′, y″ ..... Es scheint aber die Gleichung $P = 0$, wie man sieht, geeignet, den Werth zu liefern von $y^{(n)}$ in Function der $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, ... y′, y, und zwar als nach diesen Grössen, die n an der Zahl sind, linearen Ausdruck, den Fall ausgenommen, wo $X_n = 0$ ist, also das $\mathfrak{X}_n$ mindestens Einen Factor $x - \alpha$ besitzt. Wir sehen vorderhand von diesem Falle ab, betrachten also $y^{(n)}$ als endlichen, mit dem Nenner X_n versehenen Bruch. Die folgende Gleichung $P' = 0$ gibt uns dann zunächst $y^{(n+1)}$ in Function von $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, ... y′, y und nach gehöriger Substitution des aus der ersten für $y^{(n)}$ gefolgerten Werthes, in Function von $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, ... y′, y und zwar abermals als nach diesen n Grössen linearen Ausdruck, der durch X_n^2 gebrochen erscheint. Gleiches gilt von $P'' = 0$, $P''' = 0$ und allgemein von $P^{(r)} = 0$, welche Letztere $y^{(n+r)}$ liefern wird in Function von $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$ ..... y′, y als linearen durch X_n^{r+1} gebrochenen Ausdruck. Wir erhalten also alle Coefficienten der für y angenommenen Reihe bis auf die ersten n an der Zahl, zu deren Bestimmung die vorgelegte Differentialgleichung kein Mittel an die Hand gibt, die sohin willkührlich bleiben, also die Rolle von n verschiedenen Integrationsconstanten übernehmen können. Der Werth von y wird sich dann nach diesen n Constanten ordnen lassen, und, wenn man dem Gesagten gemäss annimmt, dass:

$$y^{(n+r)} = [0,r]\, y + [1,r]\, y' + [2,r]\, y'' + \ldots\ldots\ldots + [n-1,r]\, y^{(n-1)}$$

sei, einen Ausdruck biethen, wie folgt:

$$\begin{aligned} y = \;& y \,. \quad \left[1 + [0,0]\frac{(x-\alpha)^n}{1\,.\,.\,n} + [0,1]\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{1\ldots(n+1)} + \ldots\ldots\right] \\ & + y' \,.\, (x-\alpha) \left[1 + [1,0]\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1\ldots n} + [1,1]\frac{(x-\alpha)^n}{1\ldots(n+1)} + \ldots\ldots\right] \\ & + y'' \,.\, (x-\alpha)^2 \left[\frac{1}{2} + [2,0]\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{1\ldots n} + [2,1]\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1\ldots(n+1)} + \ldots\ldots\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + y^{(n-1)}.(x-\alpha)^{n-1}\left[\frac{1}{1\ldots(n-1)} + [n-1,0]\frac{(x-\alpha)}{1\ldots n} + [n-1,1]\frac{(x-\alpha)^2}{1\ldots(n+1)} + \ldots\ldots\right] \end{aligned}$$

der, wie man sieht, zusammengesetzt ist aus n particulären, mit je einem willkührlichen constanten Factor versehenen Integralen, und zwar in Form von Reihen, von welchen bereits im Eingange des I. Bandes dieses Werkes bewiesen worden ist (siehe I. Abschnitt §. 3), dass sie mindestens für solche $x - \alpha$ convergiren, die zwischen Grenzen genommen sind, welche im endlichen Abstande von einander sich befinden. Diese particulären Integrale enthalten überdiess die 0te, 1ste, ... $(n-1)^{ste}$ Potenz von $x - \alpha$ als Factor, was mit dem im §. 1 der Transformationslehre Gesagten, jedoch daselbst auf anderem Wege Abgeleiteten, in voller Übereinstimmung steht. Ein sehr einfaches Verfahren hat uns also zum allgemeinen Integral geführt in einer, was Brauchbarkeit im Calcul betrifft, völlig tadellosen Form, die aber dermassen an Undurchsichtigkeit leidet, dass aus ihr in der Regel keinerlei

Eigenschaften der Genüge leistenden Werthe zu entnehmen sind, daher denn auch diese stets anwendbare Integrationsmethode, so lange $x-\alpha$ nicht als Factor in dem ersten Gleichungscoefficienten vorkommt, von äusserst geringem Nutzen ist und auch nur in den seltensten Fällen angewendet werden dürfte. Desto nützlicher werden uns aber die Ausnahmsfälle, in welchen man auf diese Weise nicht integriren kann, weil sie zur Unterscheidung der particulären Integrale von einander dienen, und noch überdiess über die Formen derselben mancherlei Aufschluss geben.

Der erste und gewöhnlichste dieser Ausnahmsfälle ist der, wo der erste Coefficient X_n mit einem einzigen Factor $x-\alpha$ versehen ist, woraus wir nach den Vorschriften der Formenlehre ein particuläres Integral, wie $\frac{Q}{(x-\alpha)^k}$ erschliessen. Sämmtliche Coefficienten von der Gestalt $[s, r]$ in der Gleichung (9) erhalten in diesem Falle unendliche Werthe, wodurch dieselbe natürlich unbrauchbar wird. Wenden wir uns nun zu den Bestimmungsgleichungen (3), (4), (5) und (6) zurück, und fassen namentlich die erste von ihnen ins Auge, annehmend, dass unendliche Coefficientenwerthe überhaupt, also namentlich auch ein unendlicher Werth von $y^{(n)}$ unstatthaft sei; so verschwindet in derselben das erste Glied $X_n y^{(n)}$ und die Gleichung liefert nicht mehr $y^{(n)}$, sondern dient vielmehr zur Bestimmung von $y^{(n-1)}$ in linearer Function der $n-1$ Grössen $y^{(n-2)}, \ldots\ldots y', y$, die gebrochen ist durch $M_0 = X_{n-1}$. In ähnlicher Weise wird die folgende (4) nicht $y^{(n+1)}$, sondern $y^{(n)}$ liefern in linearer Function derselben $n-1$ Grössen, die gebrochen ist durch:

$$M_1 = X_{n-1}\,(X_{n-1} + X'_n),$$

die darauffolgende (5) nicht $y^{(n+2)}$, sondern $y^{(n+1)}$ bestimmen, abermals in linearer Function derselben $n-1$ Grössen, die gebrochen ist durch das Produkt:

$$M_2 = X_{n-1}\,(X_{n-1} + X'_n)\,(X_{n-1} + 2X'_n),$$

und genau in derselben Weise wird endlich die (6) einen nach $y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \ldots\ldots y', y$ linearen Werth von $y^{(n+r-1)}$ bringen, der das Produkt:

$$M_r = X_{n-1}\,(X_{n-1} + X'_n)\,(X_{n-1} + 2X'_n)\,\ldots\ldots\,(X_{n-1} + rX'_n) \tag{11}$$

im Nenner führen wird. Wir erhalten also wieder Werthe für die Coefficienten der anstatt y gesetzten Reihe, mit Ausnahme jedoch der ersten $n-1$ an der Zahl, zu deren Bestimmung nichts vorliegt, die somit als eben so viele willkührliche Constanten betrachtet werden können; und nehmen wir abermals allgemein an, dass:

$$M_r\, y^{(n+r-1)} = [0,r]\, y + [1,r]\, y' + \ldots\ldots\ldots + [n-2,r]\, y^{(n-2)} \tag{12}$$

sei, so gelangen wir sofort zu einem $(n-1)$-theiligen, nach den Constanten $y, y', \ldots\ldots y^{(n-2)}$ geordneten Werth von y:

. . . .

$$+ y^{(n-2)}.(x-\alpha)^{n-2}\left[\frac{1}{1\ldots(n-2)}+\frac{[n-2,0]}{M_0}\,\frac{(x-\alpha)}{1\ldots(n-1)}+\frac{[n-2,1]}{M_1}\,\frac{(x-\alpha)^2}{1\ldots n}+\;\ldots\ldots\right]$$

der aber kein allgemeines Integral ist, weil ihm Eine willkührliche Constante fehlt. Dieser Mangel hat seinen Grund in der Annahme, dass $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, ... endliche Grössen seien, eben so gut, wie y, y', ... $y^{(n-1)}$, die offenbar so lange eine unrichtige ist, als man sich das particuläre Integral $\frac{CQ}{(x-\alpha)^k}$ als Bestandtheil von y denkt mit von der Nulle verschiedener Constante C; diese Coefficienten endlich annehmen heisst daher $C=0$ setzen. Da wir aber hiedurch Einen Genüge leistenden Werth und zugleich denjenigen Theil von y, den die Mac-Laurin'sche Formel in Reihenform zu liefern verweigert, gänzlich weggelassen haben, so können uns offenbar nur $n-1$ particuläre Integrale übrig bleiben, die, wie man aus der Formel (12) ersieht, bezüglich der 0ten, 1sten, 2ten ... bis $(n-2)^{ten}$ Potenz von $x-\alpha$ proportional sind, so dass jetzt $\frac{CQ}{(x-\alpha)^k}$ an der Stelle des mit dem Factor $(x-\alpha)^{n-1}$ verbundenen Integrales erscheint, die ferner lauter endliche Coefficienten haben werden, unter der Bedingung, dass ihr allgemeiner unter (11) erscheinender Nenner keinen verschwindenden Factor birgt, was dann Statt findet, wenn für keinen ganzen und positiven Werth von r:

$$X_{n-1} + rX'_n = 0,$$

wird, also, wenn $\frac{X_{n-1}}{X'_n}$ keine ganze negative Zahl ist. Vergleichen wir hiemit den aus der Formenlehre bekannten Werth von k, d. h.:

$$k = \frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{\mathfrak{X}_n}\,(x-\alpha)\Big\}_\alpha - n + 1 = \frac{X_{n-1}}{X'_n} - n + 1,$$

aus welchem $\frac{X_{n-1}}{X'_n} = k+n-1$ hervorgeht, so sehen wir, dass das Unendlichwerden der Coefficienten der Gleichung (12) für positive k nie erfolge, auch nicht für gebrochene positive oder negative oder gar imaginäre, dass es aber von irgend einem derselben angefangen jedes Mal vorkomme, so oft k eine negative ganze Zahl ist, die einen numerisch grösseren Werth hat als $n-1$; wir verfallen also diesem Unendlichwerden der Coefficienten dann, wenn das eine particuläre Integral, dem der Factor $(x-\alpha)$ des ersten Coefficienten angehört, keinen Nenner $(x-\alpha)^k$ besitzt, wohl aber einen Factor $(x-\alpha)^h$, wo h grösser als $n-1$ ist, und es fragt sich nun, wie es wohl kommen kann, dass ein vorhandener Genüge leistender Werth $CQ(x-\alpha)^h$ alle übrigen particulären Integrale $n-1$ an der Zahl der Differentialgleichung, von denen wir doch sicher wissen, dass sie für $x=\alpha$ nicht

unendlich werden, der Herrschaft der Mac-Laurin'schen Formel entzieht. Bevor wir diese Frage beantworten, wird es gut sein, nachzusehen, ob man diesem Unendlichwerden nicht irgend wie entgehen könne. Zu diesem Behufe fassen wir die (6) ins Auge, und nehmen an, dass wirklich $X_{n-1}+rX'_n=0$ sei. Da wir nun ein unendliches $y^{(n+r-1)}$ zuzulassen nicht Willens sind, so verschwinden uns die zwei Anfangsglieder dieser Formel. Die $y^{(n+r-2)}$, $y^{(n+r-3)}$, ... $y^{(n-1)}$ sind vermittelst der vorangehenden Gleichungen als lineare Functionen von $y^{(n-2)}$, $y^{(n-3)}$, ... y', y bereits gegeben, daher die (6) nach gehörig durchgeführter Substitution dieser linearen Werthe die Form gewinnen wird:

$$(0,r)\,y + (1,r)\,y' + \dots\dots\dots + (n-2,r)\,y^{(n-2)} \doteq 0, \tag{15}$$

allwo die Coefficienten noch keinen verschwindenden Factor im Nenner haben. Dieser Gleichung ist *a)* dann von selbst Genüge geleistet, wenn solche Relationen $n-1$ an der Zahl zwischen den constanten Parametern der Differentialgleichung obwalten, dass:

$$(0,r) = (1,r) = \dots\dots\dots = (n-2,r) = 0 \tag{16}$$

wird. Es bleiben dann nicht nur die y, y', ... $y^{(n-2)}$ willkührlich, sondern auch das $y^{(n+r-1)}$. Die auf die $P^{(r)}=0$ folgende Gleichung $P^{(r+1)}=0$ liefert ohne Anstand einen endlichen Werth für $y^{(n+r)}$, da sein Coefficient $X_{n-1}+(r+1)X'_n=X'_n$ von Null verschieden ist, jedoch nicht mehr als lineare Function bloss von y, y', ... $y^{(n+2)}$, sondern auch von $y^{(n+r-1)}$, welches daher als neue n^{te} Constante hinzutritt. Gleiches gilt auch von den Gleichungen $P^{(r+2)}=0$, $P^{(r+3)}=0$, ...; das n^{te} particuläre Integral ist also an dem gehörigen Orte selbst in der Rechnung aufgetreten, und wir erhalten sohin unter den Bedingungen (16) das allgemeine Integral in Reihenform, ziehen aber hieraus auch umgekehrt den Schluss, dass, wenn dieses allgemeine Integral:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots\dots + C_{n-1} y_{n-1} + CQ(x-\alpha)^h \tag{17}$$

ist, und wenn man überzeugt ist, dass die Functionen y_1, y_2, ... y_{n-1} für $x=\alpha$ endlich und stetig bleiben, und sich mittelst der Mac-Laurin'schen Formel in Reihenform entwickeln lassen mit lauter endlichen Coefficienten, die constanten Parameter der Differentialgleichung die $n-1$ Bedingungsgleichungen (16) nothwendig erfüllen müssen.

b) Wären nicht alle Coefficienten in der (15) identisch Null, sondern nur Einer oder einige von ihnen, z. B. $(0,r)$, so wird man die Gleichung $P^{(r)}=0$ dadurch zu einer identischen machen, dass man $y'=y''=\dots\dots=y^{(n-2)}=0$ statuirt, oder mit anderen Worten $n-2$ particuläre Integrale, offenbar diejenigen, welche der Behandlung mittelst der Mac-Laurin'schen Formel widerstreben, wegwirft. Die $P^{(r)}=0$ bestimmt dann weder y noch $y^{(n+r-1)}$, die darauf folgenden bestimmen aber der Reihe nach $y^{(n+r)}$, $y^{(n+r+1)}$, ... in Functionen der früheren beiden; man erhält also nur zwei particuläre Integrale, nämlich das mit der Constante y und keinem $(x-\alpha)$ als Factor versehene und das $CQ(x-\alpha)^h$. Hätte man hiezu etwa noch $(1,r)=0$ erhalten, so wären es drei; wäre auch $(2,r)=0$, so wären es vier u. s. w. particuläre Integrale, die sich in Reihenform aus der Rechnung ergeben hätten.

c) **Verschwindet in der Gleichung (15) kein einziger Coefficient, so lässt sich auch keines der $n-1$ particulären Integrale mittelst der Mac-Laurin'schen Formel in Reihenform wiedergeben, man kann sie dann alle, $y = y' = y'' = \ldots\ldots = y^{(n-2)} = 0$ statuirend, wegwerfen; die Gleichung $P^{(r)} = 0$ lässt dann $y^{(n+r-1)}$ willkührlich und die folgenden liefern $y^{(n+r)}$, $y^{(n+r+1)}$, ... in Function dieser einzigen Constante; wir bekommen daher alle $n-1$ particulären Integrale, die anfangs die Rechnung zu liefern schien, nicht, erhalten aber das n^{te}, das die Rechnung anfänglich zu verweigern Miene machte. Die Formeln, aus welchen diese aufeinanderfolgenden Coefficienten gezogen werden, sind, wegen der ebenfalls verschwindenden $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, ... $y^{(n+r-2)}$ keineswegs sehr complicirt, namentlich sehen die ersten unter ihnen so aus:**

$$P^{(r+1)} = X'_n y^{(n+r)} + \left[X_{n-2} + (r+1) X'_{n-1} + \binom{r+1}{2} X''_n\right] y^{(n+r-1)} = 0$$

$$P^{(r+2)} = 2X'_n y^{(n+r+1)} + \left[X_{n-2} + (r+2) X'_{n-1} + \binom{r+2}{2} X''_n\right] y^{(n+r)} +$$
$$+ \left[X_{n-3} + (r+2) X'_{n-2} + \binom{r+2}{2} X''_{n-1} + \binom{r+2}{3} X'''_n\right] y^{(n+r-1)} = 0$$

$$P^{(r+3)} = 3X'_n y^{(n+r+2)} + \left[X_{n-2} + (r+3) X'_{n-1} + \binom{r+3}{2} X''_n\right] y^{(n+r+1)} +$$
$$+ \left[X_{n-3} + (r+3) X'_{n-2} + \binom{r+3}{2} X''_{n-1} + \binom{r+3}{3} X'''_n\right] y^{(n+r)} +$$
$$+ \left[X_{n-4} + (r+3) X_{n-3} + \binom{r+3}{2} X_{n-2} + \binom{r+3}{3} X_{n-1} + \binom{r+3}{4} X_n\right] y^{(n+r-1)} = 0.$$

d) **Das Bemerkenswertheste aber ist, dass selbst in dem Falle, wo keine der Bedingungen (16) erfüllt ist, tadellose particuläre Integrale in Reihenform mit lauter endlichen Coefficienten gewonnen werden können durch Aufopferung eines einzigen derselben, indem man keine der Constanten y, y', y'', ... $y^{(n-2)}$ der Nulle gleich setzt, wohl aber zwischen ihnen die Beziehungsgleichung (15) aufstellt, kraft deren eine von ihnen, etwa $y^{(n-2)}$, als lineare Function der übrigen erklärt wird, etwa:**

$$y^{(n-2)} = g_0 y + g_1 y' + \ldots\ldots\ldots\ldots + g_{n-3} y^{(n-3)}.$$

Die $P^{(r)} = 0$ wird dadurch identisch und die darauffolgenden Bestimmungsgleichungen liefern $y^{(n+r)}$, $y^{(n+r+1)}$, ... als lineare Functionen von y, y', ... $y^{(n-3)}$ und von $y^{(n+r-1)}$. Bezeichnen wir nun der Kürze wegen in der Formel (13) die veränderlichen Factoren von y, y', ... y^{n-2} mit $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, ... $\mathfrak{y}_{n-2}$, so dass:

$$y = y\mathfrak{y} + y'\mathfrak{y}_1 + y''\mathfrak{y}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + y^{(n-2)}\mathfrak{y}_{n-2}$$

wird; so wird wohl Niemand daran zweifeln, dass die der Differentialgleichung Genüge leistenden Werthe $n-1$ an der Zahl auf diejenige Form gebracht werden können, die sie in dieser Gleichung haben; aber es ist auch andererseits aus den eben gewonnenen analytischen Ergebnissen keinem Zweifel

unterworfen, dass die Functionen $\mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_{n-2}$ sich alle der Behandlung mittelst der Mac-Laurin'schen Formel entziehen, dass sie diess ferner nicht mehr thun, wenn man den Werth von $y^{(n-1)}$ aus der Formel (18) nimmt, wodurch die (19) verwandelt wird in:

(20) $$y = \mathrm{y}\,(\mathfrak{y} + g_0\,\mathfrak{y}_{n-1}) + \mathrm{y}'\,(\mathfrak{y}_1 + g_1\,\mathfrak{y}_{n-1}) + \ldots\ldots\ldots + \mathrm{y}^{(n-2)}\,(\mathfrak{y}_{n-2} + g_{n-2}\,\mathfrak{y}_{n-1}).$$

Wiewohl also $\mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \ldots \mathfrak{y}_{n-2}$ mittelst der Mac-Laurin'schen Reihe nicht entwickelbar sind, so sind es doch die Summen $\mathfrak{y} + g_0\,\mathfrak{y}_{n-1}$, $\mathfrak{y}_1 + g_1\,\mathfrak{y}_{n-1}$, $\ldots$ $\mathfrak{y}_{n-2} + g_{n-2}\,\mathfrak{y}_{n-1}$, was sich nur dann denken lässt, wenn der in $\mathfrak{y}_{n-1}$ vorhandene, nach aufsteigenden Potenzen von $x - \alpha$ in Reihenform nicht darstellbare Bestandtheil auch in den anderen Functionen $\mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \ldots \mathfrak{y}_{n-2}$ vorhanden ist, und zwar bezüglich mit den constanten Factoren: $-g_0, -g_1, \ldots -g_{n-2}$ multiplizirt. Der Fall, dass keine der Bedingungsgleichungen (16) erfüllt ist, ist nun offenbar der allgemeinste, und jeder andere, wo eine oder mehrere derselben identisch werden, ein specieller, in dem allgemeinen enthaltener. Wir sehen also, dass in einer auf den ersten Anblick räthselhaften Weise die blosse Existenz eines particulären Integrales $CQ\,(x-\alpha)^h$, aber nur für ganze positive h, die die Zahl $n-1$ überschreiten, die übrigen, $n-1$ an der Zahl, der Herrschaft der Mac-Laurin'schen Formel entziehe, und zwar dadurch, dass sie ihnen einen und denselben in Reihenform nicht darstellbaren Bestandtheil ertheilt. — Wir sind überall, und hauptsächlich in der Formenlehre bemüht gewesen, einer jeden analytischen Erscheinung in der Differentialgleichung mindestens Eine Form der derselben Genüge leistenden Werthe entgegenzustellen, welche diese Erscheinung zur Folge hat, und wiewohl wir nicht glauben, dass es unsere Obliegenheit sei, alle Formen, die diess thun, zu erschöpfen, aus dem einfachen Grunde, weil alle vielleicht noch nicht erfunden sind; so halten wir doch die Aufstellung von wenigstens Einer derselben für etwas ganz und gar Unerlässliches, da wir nicht wünschen, dass uns das Integriren einer Differentialgleichung nur mit Ausnahmen gelinge. Es ist nun klar, dass die n particulären Integrale der Gleichung (17), in eine Differentialgleichung vereinigt, zu solchen Erscheinungen niemals die Veranlassung geben werden, so lange man sich die $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ etwa in der assymptotischen Form $e^{\int \varphi dx}$ mit algebraischen geschlossenen, ganzen oder gebrochenen, rationalen oder irrationalen φ vorstellt. Um nun Aufschluss zu erhalten über die Formen, die diess leisten, beginnen wir am besten mit einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung, und zwar der allgemeinen:

(21) $$\mathfrak{X}_2\,y'' + \mathfrak{X}_1\,y' + \mathfrak{X}_0\,y = 0,$$

in deren ersten Coefficienten $\mathfrak{X}_2$ der einzige Factor $x - \alpha$ enthalten sein mag, dem wir alsogleich, um den in Rede stehenden Ausnahmsfall vor Augen zu haben, ein particuläres Integral $CQ\,(x-\alpha)^h$ entsprechen lassen wollen, mit ganzem und positivem die Einheit überschreitendem h. Dieses particuläre Integral kann nun, wie wir gesehen haben, ohne Schwierigkeit in Reihenform aufgefunden werden; die Reihe beginnt mit einem Gliede mit dem Factor $(x-\alpha)^h$, ihre Coefficienten liefern die Gleichungen (3), (4), ... Wir wollen es uns also gefunden denken und mit η bezeichnen, und um das andere der Mac-Laurin'schen Formel widerstrebende particuläre Integral seiner Form nach kennen zu lernen, die Gleichung davon befreien, im Wege der Substitution

$$y = \eta \int z dx,$$

durch welche die (21) verwandelt wird in:

$$\int z dx \left[\mathfrak{X}_2 \eta'' + \mathfrak{X}_1 \eta' + \mathfrak{X}_0 \eta\right] + z \left[2\mathfrak{X}_2 \eta' + \mathfrak{X}_1 \eta\right] + z' \mathfrak{X}_2 \eta = 0.$$

Die mit dem Factor $\int z dx$ verbundenen Glieder verschwinden, weil der Voraussetzung nach η ein der (21) Genüge leistender Werth ist. Die integrirte Gleichung liefert demnach:

$$z = \frac{1}{\eta^2} e^{-\int \frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{X}_2} dx},$$

da nun $\mathfrak{X}_2$ den einzelnen Factor $x - \alpha$ hat, so lässt sich aus $\frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{X}_2}$ der Partialbruch $\frac{A}{x - \alpha}$ sondern. Wir nehmen also an, es sei:

$$\frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{X}_2} = \frac{A}{x - \alpha} + R,$$

so hat man bekanntlich:

$$A = \frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{X}_2} (x - \alpha) \Big\}_\alpha.$$

Andererseits erscheint aber auch der Werth des Exponenten $k = -h$ bei dem particulären Integrale:

$$\eta = \frac{CQ}{(x - \alpha)^k} = CQ\,(x - \alpha)^h,$$

gegeben durch die Formel:

$$k = -h = \frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{X}_2} (x - \alpha) \Big\}_\alpha - 1;$$

es ist daher $A = -h + 1$. Mit Rücksicht auf diese Werthe wird:

$$z = \frac{e^{-\int R dx}}{C^2 Q^2 (x - \alpha)^{h+1}} \quad \text{und} \quad y = CQ\,(x - \alpha)^h \int \frac{e^{-\int R dx}}{C^2 Q^2 (x - \alpha)^{h+1}} dx.$$

Die letzte dieser Gleichungen löst nun das Räthsel in Bezug auf den einfachsten Fall einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung ganz vollständig; da nämlich die Function R für $x = \alpha$ keine Unterbrechung der Stetigkeit mehr erleidet; so lässt sie sich, wie jeder andere rationale algebraische Bruch, nach aufsteigenden Potenzen von $x - \alpha$ in eine Reihe entwickeln, dasselbe lässt sich nicht bloss von $\int R dx$, sondern auch von $e^{-\int R dx}$ sagen; gleiches gilt von Q, Q^2 und $\frac{1}{Q^2}$, so dass man der Form nach annehmen kann:

$$\frac{e^{-\int R dx}}{C^2 Q^2 (x - \alpha)^{h+1}} = \frac{a}{(x - \alpha)^{h+1}} + \frac{b}{(x - \alpha)^h} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{g}{x - \alpha} + \ldots\ldots$$

$$\int \frac{e^{-\int R dx}}{C^2 Q^2 (x - \alpha)^{h+1}} dx = -\frac{a}{h (x - \alpha)^h} - \frac{b}{(h - 1)(x - \alpha)^{h-1}} - \ldots\ldots + g \log (x - \alpha) + \ldots$$

$$y = CgQ\,(x - \alpha)^h \log (x - \alpha) - CQ \left[\frac{a}{h} + \frac{b\,(x - \alpha)}{h - 1} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

und nun ist derjenige Bestandtheil des anderen particulären Integrales, der sich nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ in eine Reihe nicht entwickeln lässt, dem Auge unmittelbar ersichtlich; es ist nämlich der erste mit dem Factor $log(x-\alpha)$ behaftete. Dieses particuläre Integral hört aber desshalb nicht auf, für $x=\alpha$ einen von Null und Unendlich verschiedenen Werth anzunehmen, so dass ihm $k=0$ entspricht, gemäss den aus der Differentialgleichung gezogenen analytischen Andeutungen. Die ersten Differentialquotienten desselben, $h-1$ an der Zahl, sind für $x=\alpha$ annoch endlich, nur den h^{ten} macht der logarithmische Factor unendlich gross, daher die Mac-Laurin'sche Formel erst bei dem $(h+1)^{sten}$ Gliede den Dienst versagt. Hätte man zufällig $g=0$, so würde Letzteres gar nicht stattfinden, und die Mac-Laurin'sche Formel bliebe vollkommen anwendbar; es ist daher anzunehmen, dass die Gleichung $g=0$ mit der früher aufgestellten Bedingungsgleichung (16), $(0,r)=0$ für $r=+h-n+1$ entweder zusammenfalle, oder, dass mindestens die Erstere in der Letzteren als Factor enthalten sei. Wichtig ist noch zu bemerken, dass es nebst $g=0$ noch einen anderen allgemeinen Fall geben kann, in welchem das in Rede stehende particuläre Integral in Reihenform darstellbar bleibt, den nämlich, wo y als geschlossener Ausdruck nicht in der Form:

$$y = \eta_1 (x-\alpha)^h \int \frac{\eta_2 \, dx}{(x-\alpha)^{h+1}} \tag{24}$$

erscheint, zu der wir eben gelangt sind, unter η_1 und η_2 geschlossene Functionen von x verstanden, die ausser Exponentialgrössen keine anderen Transcendenten enthalten, und für $x=\alpha$ weder Null noch unendlich werden, sondern vielmehr in folgender anderen, dieselbe Form der Differentialgleichung zu Folge habenden:

$$y = \eta_1 \int \eta_2 (x-\alpha)^{h-1} \, dx \tag{25}$$

und wir schliessen daraus, dass auch die Bedingung des Vorhandenseins dieser Form in der Gleichung $(0,r)=0$ enthalten sei.

Es ist bereits in der Formenlehre §. 22 Seite 384 die Bemerkung gemacht worden, dass das Integral einer höheren Differentialgleichung auch Logarithmen, Kreisbogen, ellyptische Functionen und andere Transcendenten dieser Art enthalten könne, von denen in den algebraischen und ganzen Coefficienten keine Spur zu sehen ist. Diess sind so zu sagen die allerverborgensten analytischen Elemente, welche das allgemeine Integral beherbergen kann, denn während man eine jede darin vorkommende Exponentialgrösse, einen jeden Nenner aus dem Coefficientenbaue alsogleich und auf den ersten Blick erkennt, vermag ein Logarithmus sich zu verbergen auf eine Weise, dass die Formenlehre kein Mittel besitzt, Kunde zu geben von seinem Dasein. Das Integriren in Reihenform und zwar das ausnahmsweise eingeleitete nach aufsteigenden Potenzen der einfachen Factoren des ersten Coefficienten zieht ihn jedoch, wie wir aus der vorliegenden Discussion sehen, in allen Fällen, wo er vorhanden ist, unfehlbar an den Tag, und es ist uns namentlich klar geworden, dass man einem solchen Logarithmus begegne in der Regel bei einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung, wenn ein

particuläres Integral mit dem Factor $(x-\alpha)^h$ versehen ist, unter h eine ganze positive Zahl verstanden. Er verräth sich auf die natürlichste Weise dadurch, dass er der Reihenentwicklung vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel hindernd in den Weg tritt. Er ist nur ausnahmsweise nicht da, ungeachtet des oberwähnten Factors, wenn nämlich die $(0,r)=0$ erfüllt ist, und diess gibt offenbar der Integration in Reihenform einen besonderen Werth, der ihr aber nur zukommt in den Ausnahmsfällen und die ganz allgemein die Reihenentwicklungen nach aufsteigenden Potenzen beliebiger Variablen nicht besitzen. Eine zweite Folgerung, die uns hier entgegentritt, ist, dass das allgemeine Integral, trotz des im Grunde darin enthaltenen Logarithmus, doch wieder zu geben sei in einer Form, der (24) nämlich, in der derselbe nicht unmittelbar ersichtlich ist, sondern nur bei eingeleiteter ausführlicher Berechnung als Integrationsresultat erscheint, woraus wir dann wieder schliessen, dass sich die Integration einer Differentialgleichung jedesmal zusammensetzen lasse aus den Berechnungen von Functionen, wie η_1 und η_2, die keine Transcendente in sich enthalten, welche durch die Gleichungscoefficienten nicht unmittelbar angegeben wäre und auch der Entwicklung in Reihen nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ wenigstens vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel nicht widerstreben. Gilt nun diese Form allgemein für alle ganzen und positiven Werthe des Exponenten h, so wird sie offenbar noch allgemeiner giltig sein, zunächst für anstatt h gesetzte Buchstabengrössen von unbestimmtem Werthe, die gelegentlich sich in ganze positive Zahlen verwandeln können. Hat man daher bei einer gegebenen Differentialgleichung particuläre Integrale von der in Rede stehenden Form, versehen nämlich mit einem Factor $(x-\alpha)^n$, so vermögen sie auch unmittelbar zu dienen zur Entdeckung eines reellen oder imaginären Logarithmus im allgemeinen Integrale, und berechtigen zur Annahme der Form (24) desselben, die man daher als die allgemeinste ansehen wird, welche die einer beliebigen Differentialgleichung der zweiten Ordnung Genüge leistende Function anzunehmen vermag. Sie gibt dem einen der particulären Integrale, welches eben mit dem Factor $(x-\alpha)^h$ versehen ist, in gewisser Weise den Vorrang, den Rechner so zu sagen nöthigend, vor allem anderen zur Ermittlung dieses ersten zu schreiten, wenn er sich nicht etwa mit Formen befassen will, die sich der Herrschaft der Mac-Laurin'schen Formel entziehen, also namentlich dann, wenn ihm daran gelegen ist, wo möglich in geschlossener Form zu integriren, und nur wenn die Bedingungsgleichung $(0,r)=0$ erfüllt ist, wird man auch die zweite Form, die (25) nämlich, bei dem Integrale voraussetzen können, ja sogar bei dem Streben nach geschlossenen Ausdrücken voraussetzen müssen, nicht darum, weil dann die (24) ausser Wirksamkeit tritt, sondern weil es sehr gut möglich ist, dass die η_1 und η_2 in einer von ihnen geschlossene Ausdrücke sind und in der anderen nicht. In beiden aber werden sie es nur dann sein, wenn die Function unter dem Integralzeichen die Integration in geschlossener Form zulässt, und es wird die Integrabilität des Differentialausdruckes in jeder dieser beiden Formen die gleiche Eigenschaft auch in der anderen nothwendig zur Folge haben.

Diesen Bemerkungen kommt keineswegs nur eine auf Differentialgleichungen der zweiten Ordnung beschränkte Giltigkeit zu, sie sind vielmehr allgemein. Um jedoch diess zu zeigen, wenden wir uns jetzt zur Differentialgleichung der dritten Ordnung, als dem nächst schwierigeren Falle, d. h. zur:

$$\mathfrak{X}_3 y''' + \mathfrak{X}_2 y'' + \mathfrak{X}_1 y' + \mathfrak{X}_0 y = 0. \tag{26}$$

In ihrem ersten Coefficienten $\mathfrak{X}_3$ setzen wir abermals einen einzigen Factor $x-\alpha$ voraus, und lassen diesem, um alsogleich den der Untersuchung unterworfenen Ausnahmsfall vor Augen zu haben, das particuläre Integral $\eta_1 (x-\alpha)^h$ entsprechen mit ganzem, positivem, nicht unter 2 liegendem h. Die drei particulären Integrale also, die der Differentialgleichung Genüge leisten, werden der Reihe nach der 0ten, 1sten, und h^{ten} Potenz von $x-\alpha$ proportional aus unserer Berechnung in Reihenform hervorgehen, und das vorhandene dritte von ihnen wird den beiden ersteren zwar nicht gleich vom Hause aus, wohl aber vom $(h+1)^{\text{sten}}$ Gliede angefangen die Darstellbarkeit vermöge vorkommender unendlicher Coefficienten nehmen, es sei denn, dass die Bedingungsgleichungen $(0,r)=(1,r)=0$ für $r=h-n+1=h-2$ erfüllt sind. Da wir nun bei der Differentialgleichung der zweiten Ordnung gesehen haben, dass diese Macht des der h^{ten} Potenz von $x-\alpha$ proportionalen particulären Integrales dem Vorhandensein unbestimmter Integrale in der Integralformel ihr Dasein verdanken könne, so fassen wir auch hier eine solche Form ins Auge und bemerken, dass $k=0$, -1, $-h$ folgenden drei Formen dieser Art entsprechen könne:

$$\begin{aligned} y &= c_1 \eta_1 (x-\alpha)^h \int \frac{\eta_2\, dx}{(x-\alpha)^{h+1}} \int \eta_3\, dx \\ y &= c_1 \eta_1 \int \eta_2 (x-\alpha)^{h-1}\, dx \int \frac{\eta_3\, dx}{(x-\alpha)^h} \\ y &= c_1 \eta_1 \int \eta_2\, dx \int \eta_3 (x-\alpha)^{h-2}\, dx. \end{aligned} \tag{27}$$

In der ersten von ihnen, die wir des leichteren Verständnisses wegen entwickeln wollen, so dass die darin enthaltenen drei particulären Integrale ins Auge fallen,

$$y = c_1 \eta_1 (x-\alpha)^h + c_2 \eta_1 (x-\alpha)^h \int \frac{\eta_2\, dx}{(x-\alpha)^{h+1}} + c_3\, \eta_1\, (x-\alpha)^h \int \frac{\eta_2\, dx}{(x-\alpha)^{h+1}} \int \eta_3\, dx,$$

entsprechen diesen Letzteren bezüglich: $k=-h$, 0, -1. Das erste von ihnen verträgt anstandslos die Entwicklung mittelst der Mac-Laurin'schen Formel, selbst wenn man es, ohne früher den Factor $x-\alpha$ zu sondern, dieser Behandlung unterwirft, mit der einzigen Bemerkung, dass die Entwicklungsglieder erst vom $(h+1)^{\text{sten}}$ angefangen von der Nulle verschiedene Werthe bekommen, was mit unseren allgemeinen Deductionen auch vollkommen übereinstimmt; das zweite und dritte hingegen wird, und zwar vom $h+1^{\text{sten}}$ Gliede an, der Reihenentwicklung desshalb widerstreben, weil in ihnen, wie leicht einzusehen, Bestandtheile vorkommen werden, wie:

$$g_1 \eta_1 (x-\alpha)^h \log (x-\alpha) \quad \text{und} \quad g_2 \eta_1 (x-\alpha)^h \log (x-\alpha),$$

nur in gewissen constanten Factoren g_1 und g_2 unterschieden; die Nichtdarstellbarkeit in Reihenform wird daher ganz oder zum Theile aufhören, wenn entweder $g_1 = g_2 = 0$ ist, Gleichungen, die mit den $(0,r)=(1,r)=0$ entweder zusammenfallen, oder wenigstens in ihnen enthalten sind; oder, wenn

zwischen den Integrationsconstanten c_2 und c_3 die Bedingungsgleichung $c_2 g_1 + c_3 g_2 = 0$ aufgestellt wird, wodurch Eines der beiden letzteren particulären Integrale aufgeopfert wird. Auch diess steht mit den Resultaten unserer allgemeinen Untersuchungen in der vollsten Uebereinstimmung.

Entwickeln wir auf dieselbe Weise die zweite der Formeln (27), so geht sie über in:

$$y = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_1 \int \eta_2 (x-\alpha)^{h-1} dx + c_3 \eta_1 \int \eta_2 (x-\alpha)^{h-1} dx \int \frac{\eta_3 dx}{(x-\alpha)^h}.$$

Den hier unmittelbar ersichtlichen drei particulären Integralen entsprechen die Werthe: $k=0, -h, -1$; das erste und zweite von ihnen ist der Reihenform fähig, sohin die Bedingungsgleichung $(0,r)=0$ erfüllt, das dritte besitzt einen Bestandtheil, der den Factor $\log(x-\alpha)$ hat, der zunächst aus:

$$c_3 g \eta_1 \int \eta_2 (x-\alpha)^{h-1} \log(x-\alpha)\, dx$$

entspringt, durch das Verfahren des theilweisen Integrirens, das zum Werthe führt von:

$$\int \eta_2 (x-\alpha)^{h-1} \log(x-\alpha)\, dx = \log(x-\alpha) \int \eta_2 (x-\alpha)^{h-1} dx - \int \frac{dx}{x-\alpha} \int \eta_2 (x-\alpha)^{h-1} dx$$

und den oberwähnten Bestandtheil liefert in folgender Gestalt:

$$c_3 g \eta_1 \log(x-\alpha) \int \eta_2 (x-\alpha)^{h-1} dx$$

der die Reihenentwicklung bei dem $h+1^{\text{sten}}$ Gliede jedesmal hindern wird, wenn nicht $g=0$ ist, eine Gleichung, die in der $(1,r)=0$ enthalten sein muss. Entwickeln wir endlich auch die dritte der Gleichungen (27) auf die bereits geübte Weise, so dass sie in Gestalt:

$$y = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_1 \int \eta_2 dx + c_3 \eta_1 \int \eta_2 dx \int \eta_3 (x-\alpha)^{h-2} dx$$

erscheint; so gewahren wir in den drei particulären Integralen $k=0, -1, -h$. Der Reihenentwicklung widerstrebt keines von ihnen, die dreigliedrige Gleichung $(0,r)=(1,r)=0$ ist daher identisch erfüllt, und wir schliessen aus diesen Betrachtungen, dass, weil das Nichtstattfinden dieser Bedingungsgleichungen $(0,r)=(1,r)=0$ der allgemeine, das Stattfinden Einer derselben oder beider der specielle Fall ist, auch von den drei Formeln (27) die erste die allgemeine Form, die zweite die zunächst darauffolgende minder allgemeine sei, während die dritte unter allen die speciellste ist, ganz ausser Stand eine der beiden vorhergehenden durch ihre Giltigkeit ausser Wirksamkeit zu setzen, während sie von ihnen in der Regel ausser Geltung gebracht wird. Da indessen drei beliebige combinatorische Elemente, also auch die drei particulären Integrale einer Differentialgleichung sechs verschiedene Permutationsgruppen zulassen, und wir nur drei Formen, die (27) nämlich, kennen gelernt haben, so sind noch drei andere übrig, welche das allgemeine Integral ebenfalls anzunehmen vermag, und zwar:

$$y = c_1 \eta_1 (x-\alpha)^h \int \frac{\eta_2\, dx}{(x-\alpha)^h} \int \frac{\eta_3\, dx}{(x-\alpha)^2}$$

$$(28) \qquad y = c_1 \eta_1 (x-\alpha) \int \eta_2 (x-\alpha)^{h-2}\, dx \int \frac{\eta_3\, dx}{(x-\alpha)^{h+1}}$$

$$y = c_1 \eta_1 (x-\alpha) \int \frac{\eta_2\, dx}{(x-\alpha)^2} \int \eta_3 (x-\alpha)^{h-1}\, dx.$$

Schreibt man sie auf in entwickelter Form, so geht jede von ihnen über in eine Summe von drei particulären Integralen. Die Werthe von k, die diesen letzteren entsprechen, sind

in der ersten Form: $k = -h, \quad -1, \quad 0$

in der zweiten Form: $k = -1, \quad -h, \quad 0$

endlich in der dritten Form: $k = -1, \quad 0, \quad -h,$

Zwischen ihnen jedoch und den früheren (27) besteht ein sehr wesentlicher Unterschied. Die (27) nämlich gehören eigenthümlich der vorgelegten Differentialgleichung an, mit einem einzigen Factor $x-\alpha$ des ersten Coefficienten insoferne, als die in ihnen enthaltenen particulären Integrale für alle möglichen, der Reihenentwicklung vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel fähigen Werthe von η_1, η_2 und η_3, in eine einzige Differentialgleichung vereinigt, eine solche von der vorgelegten Gestalt, d. h. mit einem einzigen Factor $x-\alpha$ des ersten Coefficienten wirklich zur Folge haben. Die vor Augen liegenden hingegen gehören eigentlich zu einer ganz anderen Gleichung mit Factoren $x-\alpha$ beziehlich 2, 1, 1, 0 der Anfangscoefficienten, weil die in ihnen enthaltenen particulären Integrale für alle so in Reihen entwickelbaren Werthe von η_1, η_2, η_3 auf dem Wege der Vereinigung im Allgemeinen zu einer Solchen führen, und nur ausnahmsweise bekommt auch der letzte Coefficient den Factor $x-\alpha$. Hiedurch tritt eine Theilbarkeit durch eben denselben ein, nach welcher dem ersten von ihnen nur Ein solcher Multiplicator bleibt, und diess ist der specielle Fall, in welchem auch die letzterwähnten drei Formen auftreten können. Es entspricht ihnen also beziehlich eine noch etwas speciellere Geltung als den (27). Um sich von der Richtigkeit dieser Angabe zu überzeugen, analysiren wir vor allem anderen die drei Formen, um darzuthun, dass in ihnen jedesmal zwei particuläre Integrale sich der Herrschaft der Mac-Laurin'schen Reihe entziehen, und diess nicht bloss darum, weil in ihnen ein $\log(x-\alpha)$ vorkommt, sondern vielmehr, weil sie bereits zwei von einander verschiedene Transcendenten dieser Art bergen, nämlich $\log(x-\alpha)$ und $\log^2(x-\alpha)$, es sei denn, dass zwischen den constanten, in ihnen erscheinenden Parametern eine gewisse Bedingungsgleichung waltet. Betrachten wir nur die erste der drei Formeln aufmerksamer und legen wir sie dar in entwickelter Gestalt, der folgenden nämlich:

$$(29) \qquad y = c_1 \eta_1 (x-\alpha)^h + c_2 \eta_1 (x-\alpha)^h \int \frac{\eta_2\, dx}{(x-\alpha)^h} + c_3 \eta_1 (x-\alpha)^h \int \frac{\eta_2\, dx}{(x-\alpha)^h} \int \frac{\eta_3\, dx}{(x-\alpha)^2}.$$

Das erste der drei hier ersichtlichen particulären Integrale ist durch die Mac-Laurin'sche Formel ohne Anstand zu behandeln. Nicht so das zweite, denn hier erscheint η_2 in Reihenform dargestellt in folgender Gestalt:

$$\eta_2 = A_0 + A_1 (x-\alpha) + A_2 (x-\alpha)^2 + \ldots\ldots\ldots + A_{h-1} (x-\alpha)^{h-1} + \ldots\ldots \quad (30)$$

dividirt durch $(x-\alpha)^h$ und der Integration unterworfen, gibt es:

$$\int \frac{\eta_2\, dx}{(x-\alpha)^h} = -\frac{A_0}{(h-1)(x-\alpha)^{h-1}} - \frac{A_1}{(h-2)(x-\alpha)^{h-2}} - \ldots\ldots + A_{h-1} \log (x-\alpha) + \ldots\ldots$$

enthält also das der directen Entwicklung widerstrebende Glied:

$$A_{h-1} \log (x-\alpha),$$

welches so wie die anderen mit $c_2 \eta_1 (x-\alpha)^h$ zu multipliziren ist und so behandelt den Ausdruck gibt:

$$c_2 \eta_1\, A_{h-1} (x-\alpha)^h \log (x-\alpha),$$

der mit seinen fortlaufenden Differentialquotienten, $h-1$ an der Zahl, für $x=\alpha$ verschwindet, während der darauffolgende für eben diesen Werth von x unendlich wird, daher denn die Mac-Laurin'sche Formel erst bei dem $(h+1)^{\text{sten}}$ Gliede ihren Dienst versagt, gerade so, wie in den früher betrachteten Fällen. Das mit der ersten Potenz von $x-\alpha$ anfangende particuläre Integral widerstrebt also der Reihenentwicklung wegen der darin erscheinenden Transcendente $\log (x-\alpha)$, und die Rechnung wird bei dem $(h+1)^{\text{sten}}$ Gliede durch die Erscheinung eines unendlichen Coefficienten unterbrochen.

Fassen wir jetzt das dritte particuläre Integral ins Auge. Es erscheint hier zunächst in Reihenform darzustellen:

$$\eta_3 = a_0 + a_1 (x-\alpha) + a_2 (x-\alpha)^2 + \ldots\ldots\ldots, \quad (31)$$

diess dividirt durch $(x-\alpha)^2$ und sodann integrirt, liefert:

$$\int \frac{\eta_3\, dx}{(x-\alpha)^2} = -\frac{a_0}{x-\alpha} + a_1 \log (x-\alpha) + a_2 (x-\alpha) + \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Man hat nun mit $\frac{\eta_2\, dx}{(x-\alpha)^h}$ abermals zu multipliziren und wieder zu integriren. Es sei zu diesem Behufe das bereits in Reihenform dargestellte η_2 gegeben, wie es die (30) biethet, so zieht man hieraus zunächst den Werth des Produktes:

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_2}{(x-\alpha)^h}\int \frac{\eta_3\, dx}{(x-\alpha)^2} = &-\frac{a_0 A_0}{(x-\alpha)^{h+1}} + \frac{1}{(x-\alpha)^h}\Big[-a_0 A_1 + a_1 A_0 \log (x-\alpha)\Big] + \\
&+ \frac{1}{(x-\alpha)^{h-1}}\Big[a_2 A_0 - a_0 A_2 + a_1 A_1 \log (x-\alpha)\Big] + \\
&+ \frac{1}{(x-\alpha)^{h-2}}\Big[a_3 A_0 + a_2 A_1 - a_0 A_3 + a_1 A_2 \log (x-\alpha)\Big] + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33) \\
&+ \frac{1}{x-\alpha}\Big[a_h A_0 + a_{h-1} A_1 + \ldots + a_2 A_{h-2} - a_0 A_h + a_1 A_{h-1} \log (x-\alpha)\Big] + \\
&+ \Big[a_{h+1} A_0 + a_h A_1 + \ldots + a_2 A_{h-1} - a_0 A_{h+1} + a_1 A_h \log (x-\alpha)\Big] + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und bemerkt, dass bereits beim zweiten Gliede ein dem $log(x-\alpha)$ proportionaler Bestandtheil vorkomme, und dass überhaupt diese Transcendente multiplizirt erscheine mit Potenzen von $x-\alpha$, die negative und positive Exponenten und unter anderen auch den bestimmten solchen -1 besitzen. Multiplizirt man nun mit dx und integrirt; so wird man an die derartigen Produkte das Verfahren des theilweisen Integrirens in Anwendung zu bringen haben, und wird namentlich bei einem jeden Gliede von der Form der nachstehenden auf diesem Wege erhalten:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^r} \log(x-\alpha) = -\frac{1}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}}\left[\log(x-\alpha)+\frac{1}{r-1}\right]$$

$$\int dx\,(x-\alpha)^r \log(x-\alpha) = \frac{(x-\alpha)^{r+1}}{r+1}\left[\log(x-\alpha)-\frac{1}{r+1}\right].$$

Rechnet man mit diesen allgemeinen Formeln, so gelangt man zuvörderst zu dem Werthe von:

$$\begin{aligned}\int\frac{\eta_2\,dx}{(x-\alpha)^h}\int\frac{\eta_3\,dx}{(x-\alpha)^2} &= \frac{a_0A_0}{h(x-\alpha)^h}+\frac{1}{(h-1)(x-\alpha)^{h-1}}\left[a_0A_1-\frac{a_1A_0}{h-1}-a_1A_0\log(x-\alpha)\right]+\\
&+\frac{1}{(h-2)(x-\alpha)^{h-2}}\left[-a_1A_0+a_0A_2-\frac{a_1A_1}{h-2}-a_1A_1\log(x-\alpha)\right]+\\
&+\frac{1}{(h-3)(x-\alpha)^{h-3}}\left[-a_2A_0-a_2A_1+a_0A_3-\frac{a_1A_2}{h-3}-a_1A_2\log(x-\alpha)\right]+\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+\log(x-\alpha)\left[a_hA_0+a_{h-1}A_1+\dots+a_2A_{h-2}-a_0A_h\right]+\frac{a_1A_{h-1}}{2}\log^2(x-\alpha)+\\
&+(x-\alpha)\left[a_{h+1}A_0+a_hA_1+\dots+a_2A_{h-1}-a_0A_{h+1}+a_1A_h+a_1A_h\log(x-\alpha)\right]+\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

und dieser muss noch mit $c_2\eta_1(x-\alpha)$ multiplizirt werden, um das gesuchte particuläre Integral zu liefern. Hiebei ist es nicht nöthig η_1 darzustellen in entwickelter Form, wenn man nur nicht vergisst, dass diese mit jenen von η_2 und η_3 vollkommen übereinstimmt. Das in Rede stehende Integral ist also:

$$\begin{aligned}c_2\eta_1(x-\alpha)^h\int\frac{\eta_2\,dx}{(x-\alpha)^h}\int\frac{\eta_3\,dx}{(x-\alpha)^2} &= \frac{c_2a_0A_0}{h}\eta_1+\frac{c_2\eta_1}{h-1}(x-\alpha)\left[a_0A_1-\frac{a_1A_0}{h-1}-a_1A_0\log(x-\alpha)\right]+\\
&+\frac{c_2}{h-2}\eta_1(x-\alpha)^2\left[-a_1A_0+a_0A_2-\frac{a_1A_1}{h-2}-a_1A_1\log(x-\alpha)\right]+\\
&+\frac{c_2}{h-3}\eta_1(x-\alpha)^3\left[-a_2A_0-a_2A_1+a_0A_3-\frac{a_1A_2}{h-3}-a_1A_2\log(x-\alpha)\right]+\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+c_2\eta_1(x-a)^h\log(x-\alpha)\left[a_hA_0+a_{h-1}A_1+\dots+a_2A_{h-2}-a_0A_h\right]+\\
&+\frac{c_2a_1A_{h-1}}{2}\eta_1(x-\alpha)^h\log^2(x-\alpha)+\\
&+c_2\eta_1(x-\alpha)^{h+1}\left[a_{h+1}A_0+a_hA_1+\dots+a_2A_{h-1}-a_0A_{h+1}+a_1A_h+a_1A_h\log(x-\alpha)\right]+\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\tag{34}$$

Wollte man es vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel der Reihenentwicklung aufsteigend nach $x-\alpha$ unterwerfen, so würde bereits der zweite Coefficient wegen des unmittelbar im zweiten Gliede vorhandenen $log\,(x-\alpha)$ einen unendlichen Werth erhalten, und da es ein aggregativer Bestandtheil des allgemeinen Werthes von y ist, so hätte von diesem dasselbe zu gelten und es würde bereits y′ unendlich werden. Sucht man dem dadurch zu entgehen, dass man etwa $c_2=0$ setzend das ganze, mit dieser Transcendente behaftete Glied wegwirft, so wird dem ungeachtet bei dem $(h+1)^{\text{sten}}$ Reihengliede eine Unterbrechung des Ganges der Rechnung durch einen unendlichen Coefficienten entsprechend dem im früher betrachteten zweiten Integrale vorhandenen $log\,(x-\alpha)$ eintreten, so dass also die Berechnung des Integrales in Reihenform, wenn es überhaupt das in der Formel (29) enthaltene ist, nothwendigerweise in der Regel wenigstens zweimal unterbrochen werden muss durch sich darbiethende unendliche Coefficientenwerthe, beim zweiten nämlich und beim $(h+1)^{\text{sten}}$ Reihengliede. Ein einziger Fall macht hievon eine Ausnahme, der nämlich, wo der Coefficient a_1 von $log\,(x-\alpha)$ in der Entwicklung von η_2 den Werth Null erhält. Die grosse Mehrzahl der logarithmischen Glieder verschwindet dann aus der Gleichung (34), und es erscheint nunmehr in derselben nur ein einziges solches, nämlich das:

$$c_2\,\eta_1\,(x-\alpha)^h\,log\,(x-\alpha)\,\Big[a_h A_0+a_{h-1}A_1+\,\ldots\ldots\ldots\,+a_2 A_{h-2}-a_0 A_h\Big],$$

das bis auf einen constanten Factor mit dem im vorigen zweiten particulären Integrale enthaltenen übereinstimmt, und erst beim $(h+1)^{\text{sten}}$ Entwicklungsgliede zu einem unendlichen Coefficienten Veranlassung gibt.

Diess sind nun aber gerade die Erscheinungen, denen man begegnet bei der Differentialgleichung der dritten Ordnung, die in ihren Coefficienten beziehlich 2, 1, 1, 0 Factoren $x-\alpha$ biethet. In der That, lassen wir in den allgemeinen zur Integration in Gestalt von Reihen aufgestellten Formeln $n=3$ sein, und legen wir uns nur einige von ihnen, die zwei ersten und die zur Ermittlung von $y^{(h)}$ dienende vor Augen.

$$\begin{aligned}
P &= X_3\,y''' + X_2\,y'' + X_1\,y' + X_0\,y = 0.\\
P' &= X_3\,y^{IV} + \left.\begin{matrix}X_2\\+X'_3\end{matrix}\right]y''' + \left.\begin{matrix}X_1\\+X'_2\end{matrix}\right]y'' + \left.\begin{matrix}X_0\\+X'_1\end{matrix}\right]y' + X'_0\,y = 0.\\
P^{(h-1)} &= X_3\,y^{(h+2)} + \left.\begin{matrix}X_2\\+(h-1)X'_3\end{matrix}\right]y^{(h+1)} + \left.\begin{matrix}X_1\\+(h-1)X'_2\\+\binom{h-1}{2}X''_3\end{matrix}\right]y^{(h)} + \left.\begin{matrix}X_0\\+(h-1)X'_1\\+\binom{h-1}{2}X''_2\\\binom{h-1}{3}X'''_3\end{matrix}\right]y^{(h-1)} + \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Da wegen der in $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_0$ vorhandenen Factoren $x-\alpha$ beziehlich 2, 1, 1, 0 an der Zahl $X_3=X'_3=X_2=X_1=0$ besteht, so kann der ersten dieser Gleichungen nur dadurch

Genüge geleistet werden, dass man $y=0$ nimmt, was eines der particulären Integrale, das mit der 0ten Potenz von $x-\alpha$ anfangende nämlich, aufopfern heisst, gerade dasjenige, welches wir unmittelbar zuvor umständlich entwickelten. Es sind also: dort $c_2=0$ setzen, und hier $y=0$ annehmen, gleichgeltende Massregeln, und würde man sich hiezu nicht entschliessen wollen, so wäre man genöthigt, einen unendlichen Werth von y' zu statuiren. Es ist also, wie schon gesagt, die Reihenentwicklung bereits bei dem zweiten Gliede durch einen unendlichen Coefficienten unterbrochen.

Da $\mathbf{X}'_2$ und $\mathbf{X}'_1$ von Null verschieden sind, so gibt die zweite dieser Gleichungen y'' in Function von y'. Die Darauffolgende würde eben so ohne Anstand y''' in Functionen von y' u. s. w. liefern, so dass also sämmtliche Reihencoefficienten den Factor y' erhalten, der zur ersten Potenz von $x-\alpha$ gehörig ist. Die auf solche Weise fortgeführte Rechnung ist daher in der Entwicklung eines einzigen particulären Integrales, des mit dieser ersten Potenz nämlich anfangenden beschäftigt. Diess geht so fort, bis man zu der letzten dieser Gleichungen gelangt, die zur Bestimmung von $y^{(h)}$ dienen soll, ebenfalls in Form eines dem y' proportionalen Ausdruckes. Sie thut diess jedoch nicht, weil der Coefficient von $y^{(h)}$ gleich Null wird. Um sich davon zu überzeugen, hat man die zur Bestimmung des Exponenten k, der zu $x-\alpha$ gehörig ist, im gegenwärtigen Falle dienende Gleichung, d. h. die:

$$\left\{\frac{\mathfrak{X}_3}{(x-\alpha)^2}(k+2)(k+1)-\frac{\mathfrak{X}_2}{x-\alpha}(k+1)+\mathfrak{X}_1\right\}_\alpha=0 \tag{36}$$

ins Auge zu fassen, hat ferner zu bemerken, dass:

$$\left.\frac{\mathfrak{X}_3}{(x-\alpha)^2}\right\}_\alpha=\frac{1}{2}\mathbf{X}''_3,\qquad \left.\frac{\mathfrak{X}_2}{x-\alpha}\right\}_\alpha=\mathbf{X}'_2\qquad\text{und}\qquad \left.\mathfrak{X}_1\right\}_\alpha=\mathbf{X}_1=0$$

sei. Hierdurch verwandelt sie sich in:

$$\mathbf{X}''_3\,\frac{(k+2)(k+1}{2}-\mathbf{X}'_2\,(k+1)=0,$$

und wird unter anderen erfüllt durch $k=-1$. Ein fernerer Werth von k ist der Voraussetzung nach $k=-h$, da wir ein dem $(x-\alpha)^h$ proportionales particuläres Integral besitzen. Es ist daher identisch:

$$\binom{h-1}{2}\mathbf{X}''_3+(h-1)\,\mathbf{X}'_2+\mathbf{X}_1=0,$$

also der Coefficient von $y^{(h)}=0$. Wollen wir daher einen unendlichen Werth desselben vermeiden, so sind wir genöthigt auch $y'=0$ zu nehmen, was eben so viel heisst, als auch das zweite, dem $x-\alpha$ proportionale particuläre Integral wegwerfen. Dann aber bleibt $y^{(h)}$ willkührlich, gehört als Constante zu dem dritten, den Factor $(x-\alpha)^h$ besitzenden Integrale und die fernere Rechnung wird durch kein Unendlichwerden der Coefficienten mehr unterbrochen. Es ist also die volle Identität der Erscheinungen bei der in eine Reihe verwandelt gedachten Form (29) und bei der Integration einer Differentialgleichung mit 2, 1, 1, 0 Factoren $(x-\alpha)$ ihrer Coefficienten nachgewiesen, sohin auch dargethan, dass sich in der Regel diese Formen gegenseitig entsprechen. Dem oberwähnten Ausnahmsfalle

$a_1 = 0$ passt sich die Differentialgleichung nur dann an, wenn ihr letzter Coefficient $\mathfrak{X}_0$ auch einen Factor $x - \alpha$ bekommt, durch welchen wegdividirt sie 1, 0, 0, 0 solche in ihren Coefficienten aufweist. Es lässt sich hieraus schliessen, dass a_1 dem $\mathbf{X}_0$ proportional sei.

Es gibt einen einzelnen Fall, in welchem man nicht nöthig hat $y' = 0$ zu nehmen, um einen unendlichen Werth von $y^{(h)}$ zu vermeiden. Es ist diess nämlich der, wo der Coefficient von y' im Ausdrucke für $y^{(h)}$ verschwindet, oder mit anderen Worten, wo die Bedingungsgleichung $(1,r) = 0$ erfüllt ist. y' und $y^{(h)}$ treten dann als willkührliche Constanten auf, sohin unterwerfen sich zwei particuläre Integrale, das mit der ersten, und das mit der h^{ten} Potenz von $(x - \alpha)$ anfangende der Mac-Laurin'schen Formel, und diess ist der Fall, bei welchem das allgemeine Integrale durch die zweite der Formeln (28) wiedergegeben werden kann, jedoch nur bedingungsweise. Es muss nämlich das zweite Glied der Reihenentwicklung des Produktes:

$$\eta_2 \, (x - \alpha)^{h-2} \int \frac{\eta_2 \, dx}{(x - a)^{h+1}},$$

welches dem reciproken Werthe von $x - \alpha$ proportional ist, die Nulle zum Coefficienten erhalten, denn sonst würde auch diese Formel gehören zu einer Gleichung mit Factoren 2, 1, 1, 0 der Coefficienten, gerade so, wie die erste der (28), mit dem einzigen hier obwaltenden Unterschiede, dass man im allgemeinen Integrale nicht mehr die zwei Transcendenten $log\,(x - \alpha)$ und $log^2\,(x - \alpha)$ besässe, sondern nur die erste von ihnen, so dass also die obbenannte Factorenanmeldung 2, 1, 1, 0 wohl in der Regel auf zwei verschiedene, gelegentlich und bedingungsweise jedoch nur auf eine einzige logarithmische Transcendente deuten kann.

Wären endlich die beiden Bedingungen: $(0,r) = (1,r) = 0$ erfüllt, so könnte man dem allgemeinen Integrale auch die dritte der Formen (28) zutheilen, wenn man nur das zweite Glied der Entwicklung für η_2 mit dem Coefficienten Null versieht, wenn also für $x = \alpha$ die Function η'_2 verschwindet, denn sonst würde auch diese dritte Form wesentlich zu einer Differentialgleichung gehören, mit 2, 1, 1, 0 Factoren $x - \alpha$ ihrer Coefficienten, so wie die erste und zweite und mit einer einzigen Transcendente $log\,(x - \alpha)$ im Integrale.

Es liessen sich hier ähnliche Schlüsse, wie bei der früher betrachteten Differentialgleichung der zweiten Ordnung anknüpfen. Der Factorenbau des ersten Coefficienten, nach den Vorschriften der Formenlehre untersucht, gibt in der Regel auch Zeugniss von dem möglichen Vorhandensein logarithmischer Transcendenten, wie $log\,(x - \alpha)$, $log^2\,(x - \alpha)$ u. s. w. im Integrale. Ein einziger Factor $x - \alpha$ des ersten Coefficienten verstattet jedoch nur höchstens den Schluss auf eine einzige Transcendente dieser Art, die $log\,(x - \alpha)$ nämlich und diess zwar, wie wir gesehen haben, namentlich dann in der Regel, wenn zu diesem einzelnen Factor ein Exponent k gehört, der eine ganze negative, nicht unter den Ordnungsexponenten der Differentialgleichung fallende Zahl $-h$ ist, und der auf ein particuläres Integral mit dem Factor $(x - \alpha)^h$ hindeutet; jedoch erscheint der Logarithmus nicht in demselben, kann aber in den anderen Genüge leistenden Werthen enthalten sein, aber nur auf ein

und dieselbe Weise, d. h. allenthalben bis auf einen constanten Factor mit derselben Function von x multiplizirt. Durch den Gebrauch unbestimmter Integralzeichen lässt sich diese Transcendente im allgemeinen Werthe von y auch vermeiden, indem man demselben nämlich den Rechnungsumständen gemäss eine der sechs verschiedenen Formen (27) und (28) ertheilt, zu deren genauerem Verständnisse wir noch einige Bemerkungen anfügen müssen, indem wir zwei verschiedene Zwecke besonders hervorheben, die der Rechner anstreben kann. Er kann nämlich entweder wünschen, das Integral zu erhalten zusammengesetzt, bloss aus Elementen wie die Functionen η_1, η_2, η_3, die der directen Reihenentwicklung nicht widerstreben, oder er will weitergehen und will eben die η_1, η_2, η_3 wo möglich darstellen in geschlossener Form.

Um den ersteren und bescheideneren dieser beiden Wünsche zu realisiren, wird er nicht nöthig haben, mehr als ein einziges unbestimmtes Integralzeichen in seine Formeln aufzunehmen, so lange wenigstens, als der erste Gleichungscoefficient nur einzelne unwiederholte Factoren, wie $(x-\alpha)$ beherbergt. Man kann sich nämlich drei Fälle denken: den gewöhnlichen, wo zwischen den constanten Gleichungsparametern keine der Bedingungsgleichungen $(0,r)=0$, $(1,r)=0$ erfüllt ist; den zweiten, wo irgend eine von ihnen besteht; und den dritten, wo beiden genügt ist. Dem ersten entspricht zwar im Allgemeinen die erste der Formeln (27), oder die erste der (28) mit dem Zusatze: $\eta'_3=0$ für $x=\alpha$, so es beliebt, dieser den Vorzug zu geben. Allein auch die zweite, sowohl der Formeln (27), als auch der (28) vermag dem Integrale ertheilt zu werden, unbeschadet der directen Reihenentwicklungsfähigkeit von η_1, η_2, η_3, denn es kommt, wie wir bereits dargethan haben, die Transcendente $log(x-\alpha)$ in den zwei particulären Integralen, die mit der 0ten und 1sten Potenz von $x-\alpha$ anfangen, auf gleiche Weise vor. Man wird daher, diese beiden durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition combinirend, einen neuen, ebenfalls mit der 0ten Potenz anfangenden Genüge leistenden Werth erhalten, der von der Transcendente frei ist, somit die Reihenentwicklung verträgt. Stellen wir nun diesen in der Reihe voran, so haben wir gerade die zweite der Formeln (27), die demnach giltig ist, sowohl wenn man $(0,r)=0$ hat, als auch, wenn keine der beiden Relationen $(0,r)=0$ und $(1,r)=0$ erfüllt ist, und nur dann von der zweiten der Formeln (28) ausser Geltung gesetzt wird, wenn $(1,r)=0$ ist, ohne dass man zu gleicher Zeit $(0,r)=0$ hätte. Wir folgern hieraus, dass sich das allgemeine Integral in jeder beliebigen der ersten Formen der (27) und (28) wiedergeben lasse, dass es aber auch entweder in der einen, oder in der anderen der zweiten Formeln der (27) und (28) enthalten sein könne, unbeschadet wie gesagt der direkten Darstellbarkeit von η_1, η_2, η_3 in Reihenform. Da nun aber jede dieser zweiten Formeln zwei particuläre Integrale biethet, ohne der Transcendente $log(x-\alpha)$; so ist zu ihrer Darstellung offenbar kein unbestimmtes Integralzeichen vonnöthen, und es werden eben diese beiden auch auf eine der zwei folgenden Arten geschrieben werden können:

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 (x-\alpha)^k \qquad \text{oder} \qquad c_1\eta_1 (x-\alpha) + c_2\eta_2 (x-\alpha)^k$$

allwo η_1 und η_2 entwickelbar sind. Folglich wird das allgemeine Integral auch eine der zwei Formen tragen können:

Ergäbe sich endlich zufällig $(0,r) = (1,r) = 0$; so hat man gar keinen $log(x-\alpha)$ im Integrale und braucht folglich gar kein unbestimmtes Integralzeichen, kann somit jederzeit integriren in der Form:

$$y = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 (x-\alpha) + c_3 \eta_3 (x-\alpha)^k$$

unter η_1, η_2, η_3 Functionen verstanden, die der direkten Reihenentwicklung durch die Mac-Laurin'-sche Formel fähig sind. Ganz anders verhält sich die Sache, wenn man lauter geschlossene Ausdrücke in der Integralformel zu haben wünscht. Hier kann nämlich von den sechs verschiedenen Formeln (27) und (28) nach Massgabe der erfüllten oder nicht erfüllten Bedingungsgleichungen irgend eine lauter geschlossene η_1, η_2, η_3 beherbergen, während alle fünf übrigen es nicht thun. Man kann noch zusetzen, dass die Form aufsteigender Reihen für η_1, η_2, η_3 in den allerseltensten Fällen eine geschlossene sein kann, nämlich nur dann, wenn die Differentialgleichung lauter der ersten Functionsklasse angehörige particuläre Integrale birgt, wenn daher ihre Coefficienten repartirte Abfälle biethen von einer Einheit auf das Paar. In allen anderen Fällen besitzen die η_1, η_2, η_3 auch exponentielle Factoren, welche ihre Darstellbarkeit in geschlossener algebraischer Form nothwendigerweise vereiteln. Man kann ihnen indess immer, den exponentiellen Factor durch die vorhandenen analytischen Hilfsmittel sondernd, die assymptotische Gestalt und mit ihr auch gelegentlich die geschlossene Existenz wiedererringen, es ist jedoch klar, dass, um über ihr Vorhandensein oder Nichtvorhandensein ein endgiltiges Urtheil abzugeben, mehrere der sechs Formen (27) und (28), gelegentlich alle in Untersuchung zu ziehen seien. Stünde nun diese Untersuchung als ein untheilbares Ganze da, eine Rechnung, bei welcher man erst am Ende Aufschluss erhält über ja und nein; so würde man sich wohl höchst selten dazu entschliessen können. Glücklicher Weise jedoch zerfällt sie natürlich in mehrere Theile, denn das ganze allgemeine Integral vermag nur dann geschlossen zu erscheinen, wenn wenigstens ein particuläres geschlossen ist. Z. B.:

$$c_1 \eta_1 (x-\alpha)^k \int \frac{\eta_2 \, dx}{(x-\alpha)^{k+1}} \int \eta_3 \, dx$$

ist nur dann ein geschlossener Ausdruck im weiteren Sinne des Wortes, wenn η_1, η_2 und η_3, sohin auch $c_1 \eta_1 (x-\alpha)^k$ geschlossen ist. Dieses ist aber für sich ein particuläres Integral. Es kann also das ganze unmöglich geschlossen sein, wenn nicht wenigstens einer seiner Bestandtheile als geschlossener Ausdruck dasteht. Es kommt also vor allem anderen darauf an, dass man in der Differentialgleichung ein einzelnes particuläre Integral, oder auch gelegentlich eine Gruppe von solchen, zusammenhängend durch eine höhere algebraische Gleichung entdecke. Ist diess gelungen, so befreit man davon und untersucht die neuerhaltene Differentialgleichung abermals auf geschlossene Integrale u. s. w. Zur ferneren Erleichterung dieses Verfahrens dient noch, dass man bei der assymptotischen Integra-

tion an den geschlossenen Formen so zu sagen vorüberkommt, d. h. an den Bedingungsgleichungen, unter welchen sich solche ergeben können.

Wenn sich diess alles wirklich so verhält, wenn also namentlich die aus unbestimmten Integralen zusammengesetzten Formen die Eigenschaft haben, den allgemeinen Werth von y, der einer Gleichung (26) der dritten Ordnung Genüge leistet, darzustellen; so wird man allgemein und unbedingt auf folgende Weise verfahrend die Differentialgleichung von jeder Spur des $x-\alpha$ im ersten Coefficienten befreien können. Man befreit sie zuvörderst mit Hilfe der Substitution:

$$y = c_1\, \eta_1\, (x-\alpha)^h \int z dx$$

von dem ersten particulären Integrale, dem $k = -h$ entspricht. Der Gleichung in z, die dadurch erhalten wird, und die der zweiten Ordnung angehört, leistet offenbar der Werth Genüge:

$$z = \frac{\eta_2}{(x-\alpha)^{h+1}} \int \eta_3\, dx, \tag{37}$$

sodann führt man eine neue Variable u ein auf dem Wege der Substitution:

$$z = \frac{u}{(x-\alpha)^{h+1}}, \qquad \text{so ist:} \qquad u = \eta_2 \int \eta_3\, dx, \tag{38}$$

und die ebenfalls der zweiten Ordnung angehörige Gleichung in u in ihrem ersten Coefficienten von dem Factor $x-\alpha$ nothwendigerweise frei. Sollte diess die Analysis nicht bestätigen, so würde diess wohl ein Fingerzeig sein, dass man nach anderen, muthmasslich allgemeineren Formen zu forschen habe, als den in den Gleichungen (27) enthaltenen. Wir werden daher die angegebenen zwei Substitutionen der Reihe nach durchführen. Das Resultat der ersten zerfällt in zwei Theile, einen mit dem Factor $\int z dx$ versehenen, und einen zweiten, der z, z', z'' in sich enthält. Da indess $z = 0$ der Gleichung Genüge leisten muss, so zerfällt es in zwei, je für sich der Nulle gleiche Bestandtheile; der Coefficient nämlich von $\int z dx$ ist für sich Null, und die übrigen Glieder verschwinden wieder für sich. Wir kommen also durch die erste Substitution zu folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\eta''' \,.\, \mathfrak{X}_3\, (x-\alpha)^3 + \eta'' \left[3h\, \mathfrak{X}_3\, (x-\alpha)^2 + \mathfrak{X}_2\, (x-\alpha)^3\right] + \\ &+ \eta' \left[3h\, (h-1)\, \mathfrak{X}_3\, (x-\alpha) + 2h\, \mathfrak{X}_2\, (x-\alpha)^2 + \mathfrak{X}_1\, (x-\alpha)^3\right] + \\ &+ \eta \left[h\, (h-1)\, (h-2)\, \mathfrak{X}_3 + h\, (h-1)\, \mathfrak{X}_2\, (x-\alpha) + h\, \mathfrak{X}_1\, (x-\alpha)^2 + \mathfrak{X}_0\, (x-\alpha)^3\right] = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} &z'' \,.\, \eta \,.\, (x-\alpha)^3\, \mathfrak{X}_3 + z' \left[3\eta'\, (x-\alpha)^3\, \mathfrak{X}_3 + \eta \left(3h\, (x-\alpha)\, \mathfrak{X}_3 + (x-\alpha)^3\, \mathfrak{X}_2\right) + \right. \\ &+ z \left[3\eta''\, (x-\alpha)^3\, \mathfrak{X}_3 + \eta' \left(6h\, (x-\alpha)\, \mathfrak{X}_3 + 2\, (x-\alpha)^3\, \mathfrak{X}_2\right) + \right. \\ &\left. + \eta \left(3h\, (h-1)\, \mathfrak{X}_3 + 2h\, (x-\alpha)\, \mathfrak{X}_2 + (x-\alpha)^3\, \mathfrak{X}_1\right)\right] = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Jetzt führen wir die zweite dieser Substitutionen durch, und ordnen die Factoren von u, u', u'', die im Resultate vorkommen, nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$, bemerkend, dass η gar kein $x-\alpha$

in sich enthalte, $\mathfrak{X}_2$ aber, der Voraussetzung nach, einen solchen Factor beherberge, den wir dadurch anschaulich machen wollen, dass wir $\mathfrak{X}_2 = (x-\alpha)\,\mathfrak{X}$ statuiren. Wir gelangen so zu folgender Gleichung in u:

$$u''\,.\,(x-\alpha)^2\,.\,\mathfrak{X}\eta + u'\,.\,\Big[(x-\alpha)\,\big((h-2)\,\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_1\big)\,\eta + 3\,(x-\alpha)^2\,\mathfrak{X}\eta'\Big] +$$
$$+ u\,.\Big[(h-1)\,\eta\,\big((h-2)\,\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_1\big) + (x-\alpha)\,\big(3\,(h-1)\,\mathfrak{X}\eta' + 2\mathfrak{X}_1\,\eta' + \mathfrak{X}_0\eta\big) + 3\,(x-\alpha)^2\,\mathfrak{X}\eta''\Big] = 0.$$

Ihr erster Coefficient sollte von dem Factor $x-\alpha$ ganz frei sein, folglich müsste sie theilbar erscheinen durch $(x-\alpha)^2$, offenbar aber nur für solche Werthe von η, die die (39) identisch machen; wir wollen daher auch diese auf dieselbe Art nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ geordnet hinstellen:

$$h\,(h-1)\,\eta\,.\Big[(h-2)\,\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_1\Big] + (x-\alpha)\,.\,h\Big[3\,(h-1)\,\mathfrak{X}\eta' + 2\mathfrak{X}_1\eta' + \mathfrak{X}_0\eta\Big] +$$
$$+ (x-\alpha)^2\,\Big[3h\eta''\mathfrak{X} + \mathfrak{X}_2\,\eta'' + \mathfrak{X}_1\,\eta' + \mathfrak{X}_0\,\eta\Big] + (x-\alpha)^3\,.\,\eta'''\,\mathfrak{X} = 0.$$

Da diess eine identische Gleichung sein soll, und eines ihrer Glieder, das letzte nämlich, durch $(x-\alpha)^2$ theilbar ist; so muss es auch die Summe der übrigen sein, was nicht möglich ist, wenn dasjenige Glied, bei dem man keinen Factor $x-\alpha$ sieht, nicht wenigstens einen solchen in sich enthält, nämlich das:

$$(h-2)\,\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_1.$$

Wir wissen indess schon aus dem früheren, dass dem wirklich so sei. Dieses nun, verbunden mit dem zweiten, mit dem Factor $x-\alpha$ verknüpften, wird dann eine neue Sonderung dieses Multiplicators verstatten, d. h. die Summe:

$$(h-1)\,\eta\,.\Big[(h-2)\,\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_1\Big] + (x-\alpha)\,\Big[3\,(h-1)\,\mathfrak{X}\eta' + 2\mathfrak{X}_1\,\eta' + \mathfrak{X}_0\,\eta\Big]$$

wird mindestens durch $(x-\alpha)^2$ theilbar sein. Diese zwei Ausdrücke gewahrt man aber auch in den Coefficienten der Gleichung in u und in Folge ihrer Theilbarkeit durch $x-\alpha$ und $(x-\alpha)^2$ entdeckt man alsogleich einen Factor $(x-\alpha)^2$ aller ihrer Glieder, nach dessen Tilgung dem ersten Coefficienten, dem von u'', gar keine Spur von $x-\alpha$ mehr bleibt. Die Analysis bestätigt daher die allgemeine Giltigkeit der ersten der Formen (27) und (28), und würde offenbar auf dieselbe Weise auch die Giltigkeit der beiden anderen unter den entsprechenden Umständen bekräftigen.

Wir lernen überdiess aus der eben durchgeführten Rechnung noch etwas nicht ganz Unwichtiges. Wenn es uns nämlich gelungen ist, ein particuläres Integral: $c_1\,\eta_1\,(x-\alpha)^h$ in geschlossener, etwa in assymptotischer Form zu ermitteln, so vermögen wir auch, die Differentialgleichung auf dem betretenen Wege hievon befreiend, nicht bloss eine Herabsetzung derselben um eine Einheit in der Ordnungszahl zu bewirken, sondern auch eine Vereinfachung des Coefficientenbaues durch Tilgung eines allen gemeinschaftlichen Factors $(x-\alpha)$. Da diess aber kein unbedeutender Vortheil ist, so finden wir uns veranlasst, die Tragweite dieses analytischen Verfahrens etwas näher zu untersuchen, indem wir fragen, ob dasselbe allgemein für jedes h, oder nur dann anwendbar sei, wenn h der bisherigen Voraussetzung nach eine ganze positive Zahl bedeutet.

Den ganzen Rechnungsgang zu diesem Behufe nochmals aufmerksam durchgehend, gewahren wir, dass in dieselbe die Voraussetzung eines ganzen und positiven h nirgend niedergelegt ist, dass man zu denselben Formen mit derselben Schlussfolgerung gelangt wäre, auch unter der Annahme eines gebrochenen, negativen oder allgemeinen Buchstabenexponenten, dass aber zwei andere Voraussetzungen stillschweigend in das Verfahren niedergelegt sind, nämlich: Der erste Coefficient $\mathfrak{X}_n$ besitzt nicht mehr als Einen Factor $(x-\alpha)$; ferner η_1 und seine Differentialquotienten haben gar keinen, weder im Zähler noch im Nenner, oder mit anderen Worten, η ist von einer jeden Spur von $x-\alpha$ sowohl, so wie von $log(x-\alpha)$ frei, oder was dasselbe ist, aufsteigend nach dieser Grösse in Reihen direct entwickelbar. Es wird also räthlich sein, jedesmal, so oft ein einziges particuläre Integral in der Form: $c_1 \eta_1 (x-\alpha)^h$ aufgefunden worden ist, was auch die Bedeutung von h sein mag, auf dem angedeuteten Wege der Rechnung zu gleicher Zeit die Befreiung der Differentialgleichung von demselben und von jeder Spur von $x-\alpha$ zu bewirken, oder was dasselbe ist, von der Gleichung (40) in z unmittelbar zur anderen in u überzugehen. Der hiebei erreichte Vortheil wird um so grösser, wenn das ermittelte particuläre Integral nicht nur den Factor $(x-\alpha)^h$, sondern noch andere dergleichen $(x-\beta)^{h'}$, $(x-\gamma)^{h''}$, ... besitzt, wo dann eine Befreiung eintritt nicht nur von jeder Spur von $x-\alpha$, sondern auch von $x-\beta$, $x-\gamma$, ...

Nach diesen umständlichen Untersuchungen, durchgeführt an den speciellen Differentialgleichungen der zweiten und dritten Ordnung, sind wir bereits im Stande, zur allgemeinen, der n^{ten} Ordnung angehörigen zurückzukehren, und uns bei den darauf bezüglichen Erörterungen kürzer zu fassen. Wir setzen also im ersten Coefficienten der (1) einen einzigen Factor von $x-\alpha$ voraus, lassen ihn kraft der Formel:

$$-h = \frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{\mathfrak{X}'_n}\Big\}_\alpha - n + 1$$

hindeuten auf ein vorhandenes particuläres Integral $c_1 \eta_1 (x-\alpha)^h$, unter h eine gelegentlich aus der Rechnung hervorgegangene ganze positive Zahl verstehend. Es ist bereits nachgewiesen, dass dieses eine Integral durch sein Vorhandensein alle übrigen $n-1$ an der Zahl der Herrschaft der Mac-Laurin'schen Formel entziehe, und dass diess dem Vorkommen eines Bestandtheiles $\eta_1 (x-\alpha)^h \, log(x-\alpha)$ mit verschiedenen constanten Factoren jedoch in allen vermuthlich zuzuschreiben sei. Die aus unbestimmten Integralen zusammengesetzte Form, in der dieser Logarithmus zwar nicht unmittelbar ersichtlich ist, wohl aber als Integrationsresultat in derselben Weise auftritt, ist die folgende:

$$y = c_1 \eta_1 (x-\alpha)^h \int \frac{\eta_2 \, dx}{(x-\alpha)^{h+1}} \int \eta_3 \, dx \, \ldots\ldots \int \eta_n \, dx. \tag{43}$$

Sie in entwickelter Form hinzustellen, so wie wir in früheren Fällen thaten, erachten wir nicht für nöthig. Dem an diese Formen bereits gewohnten Leser wird es unmittelbar in die Augen fallen, dass die einzelnen Bestandtheile von y der Reihe nach:

$$k = -h, \quad 0, \quad -1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad -n+2$$

entsprechen. Dass bei der successiven Berechnung derselben der $log(x-\alpha)$, und zwar in Gestalt eines einzigen Gliedes dieser Art erst dann erscheine, wenn η_1 in Reihengestalt in der Rechnung vorkommt, so dass also die sämmtlichen particulären Integrale bis auf ein einziges das Bestandglied $g\eta_1(x-\alpha)^k log(x-\alpha)$ besitzen, jedoch versehen mit verschiedenen Constanten g; kurz man begegnet bei der aufsteigenden Entwicklung in Reihen des vorliegenden Werthes von y denselben analytischen Erscheinungen, die wir auch bei der Integration in Reihenform der Differentialgleichung (21) hervorgehoben haben. Es muss indess bemerkt werden, dass eine solche Uebereinstimmung gewisser Erscheinungen noch keineswegs genüge, die volle Congruenz zweier, eine Solche zeigenden Formen und somit die allgemeine Giltigkeit der (43) über allen Zweifel zu erheben; man muss vielmehr das Schlussverfahren umkehren, sagend: Wenn die Form (43) von y wirklich als die allgemeinste, jedesmal giltige dastehen soll, so oft der erste Coefficient $\mathfrak{X}_n$ nur einen einzigen Factor $x-\alpha$ beherbergt, und so oft zu demselben ein ganzer negativer Exponent k gehörig ist, so müssen sich auch alle diejenigen Folgerungen, welche man dieser Form entnimmt, auf die Differentialgleichung unmittelbar übertragen lassen, und sich an derselben bestätigen. Es reicht hiebei nicht hin, wenn man bloss zeigt, dass sie die Differentialgleichung identisch erfüllen könne, denn das versteht sich von selbst; man muss auch darthun, dass diess geschehe für solche Werthe von $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$, die für $x=\alpha$ stetig bleiben. Wenn man daher eine neue abhängige Veränderliche u anstatt y einführt, vermittelst der Substitution:

$$y = \eta_1 (x-\alpha)^k \int \frac{udx}{(x-\alpha)^{k+1}},$$

nach welcher, wie der Vergleich mit unserer eben hingestellten allgemeinen Formel lehrt, u die folgende Bedeutung hat:

$$u = \eta_2 \int \eta_3 \, dx \, \ldots\ldots \int \eta_n \, dx;$$

so muss sich unsere Differentialgleichung in y in eine andere verwandeln in u, deren allgemeines Integral der Form nach der hier vorliegende Werth ist, somit von jeder Spur von $x-\alpha$ frei, für $x=\alpha$ in keinerlei Ausnahmszustand gerathend, und nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ ohne Anstand in eine Reihe zu verwandeln. Der erste Coefficient dieser Gleichung in u wird also diesen Factor nicht mehr enthalten dürfen. Um nun diese Übereinstimmung darzuthun, führen wir die angedeutete Substitution (44) in der (1) durch. Das Resultat lässt sich zerlegen in zwei Bestandtheile, einen mit dem Factor $\int \frac{udx}{(x-\alpha)^{k+1}}$ verknüpften, und einen anderen, in dem kein Integralzeichen mehr zu sehen ist. Denkt man sich nun $\eta_1(x-\alpha)^k$ als ein wirkliches particuläres Integral, somit den substituirten Ausdruck für $u=0$ als der Differentialgleichung Genüge leistend und $\int \frac{udx}{(x-\alpha)^{k+1}}$ als Constante; so müssen offenbar die mit diesem Factor versehenen Glieder des bemeldeten Substitutionsresultates identisch für sich Null geben. Die neuerhaltene Gleichung in u wird daher zerfallen in zwei, indem jeder der beiden Bestandtheile des Gleichungspolynomes für sich verschwindet. Diese zwei, die eine identische in η und die andere in u sind die folgenden:

$$
\begin{aligned}
(46)\qquad 0 = {} & \eta^{(n)} \cdot \mathfrak{X}_n (x-\alpha)^n + \\
& + \eta^{(n-1)} \cdot \left[\binom{n}{1} h \mathfrak{X}_n (x-\alpha)^{n-1} + \mathfrak{X}_{n-1} (x-\alpha)^n\right] + \\
& + \eta^{(n-2)} \cdot \left[\binom{n}{2} h(h-1)\mathfrak{X}_n (x-\alpha)^{n-2} + \binom{n-1}{1} h\mathfrak{X}_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \mathfrak{X}_{n-2}(x-\alpha)^n\right] + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \eta^{(r-1)} \cdot \left[\begin{array}{lllll}
\binom{n}{r-1} h(h-1) & \ldots\ldots & (h-n+r) & \mathfrak{X}_n & (x-\alpha)^{r-1} + \\
+\binom{n-1}{r-1} h(h-1) & \ldots\ldots & (h-n+r+1) & \mathfrak{X}_{n-1} & (x-\alpha)^{r} + \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
+\binom{n-t}{r-1} h(h-1) & \ldots\ldots & (h-n+r+t) & \mathfrak{X}_{n-t} & (x-\alpha)^{r+t-1} + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & + \mathfrak{X}_{r-1} & (x-\alpha)^n
\end{array}\right] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \eta' \cdot \left[\begin{array}{lllll}
\binom{n}{1} h(h-1) & \ldots\ldots & (h-n+2) & \mathfrak{X}_n & (x-\alpha) + \\
+\binom{n-1}{1} h(h-1) & \ldots\ldots & (h-n+3) & \mathfrak{X}_{n-1} & (x-\alpha)^2 + \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
+\binom{n-t}{1} h(h-1) & \ldots\ldots & (h-n+t+2) & \mathfrak{X}_{n-t} & (x-\alpha)^{t} + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & + \mathfrak{X}_{1} & (x-\alpha)^n
\end{array}\right] \\
& + \eta \cdot \left[\begin{array}{lllll}
\quad h(h-1) & \ldots\ldots & (h-n+1) & \mathfrak{X}_n & + \\
+ \quad h(h-1) & \ldots\ldots & (h-n+2) & \mathfrak{X}_{n-1} & (x-\alpha) + \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
+ \quad h(h-1) & \ldots\ldots & (h-n+t+1) & \mathfrak{X}_{n-t} & (x-\alpha)^{t} + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & + \mathfrak{X}_{0} & (x-\alpha)^n
\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(47)\qquad 0 = {} & u^{(n-1)} \cdot (x-\alpha)^{n-1}\, \eta\, \mathfrak{X}_n + \\
& + u^{(n-2)} \left[\begin{array}{l}
(x-\alpha)^{n-2}\, \eta\, \mathfrak{X}_n\, [-(n-1)(h+1)+nh] + \\
\quad + (x-\alpha)^{n-1}\, [\eta' \mathfrak{X}_n \cdot n + \eta \mathfrak{X}_{n-1}]
\end{array}\right] + \\
& + u^{(n-3)} \left[\begin{array}{l}
(x-\alpha)^{n-3} \cdot \eta \mathfrak{X}_n \left(\binom{n-1}{2}(h+1)(h+2) - (n-2)nh(h+1) + \binom{n}{2}(h-1)h\right) + \\
+ (x-\alpha)^{n-2}\left[\eta' \mathfrak{X}_n \left(-(n-2)\, n\, (h+1) + 2\binom{n}{2} h\right) + \right. \\
\qquad\qquad \left. + \eta \mathfrak{X}_{n-1} \left(-(n-2)(h+1) + (n-1)\, h\right)\right] + \\
+ (x-\alpha)^{n-1}\left[\binom{n}{2} \eta'' \mathfrak{X}_n + (n-1)\, \eta' \mathfrak{X}_{n-1} + \eta \mathfrak{X}_{n-2}\right]
\end{array}\right] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
+u^{(s)}\left\{
\begin{aligned}
&(x-\alpha)^s.\,\eta\mathfrak{X}_n\left[
\begin{aligned}
&(-1)^{n-s-1}\binom{n-1}{s}(h+1)(h+2)\ldots\ldots(h+n-s-1)\\
&+(-1)^{n-s-2}\binom{n}{1}\binom{n-2}{s}h(h+1)\ldots\ldots(h+n-s-2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(-1)^{n-s-q}\binom{n}{q-1}\binom{n-q}{s}(h-q+2)(h-q+3)\ldots(h+n-s-q)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\binom{n}{s+1}(h-n+s+2)(h-n+s+3)\ldots\ldots h
\end{aligned}\right.\\[2ex]
&+(x-\alpha)^{s+1}\left\{
\begin{aligned}
&\eta'\mathfrak{X}_n\left[
\begin{aligned}
&(-1)^{n-s-2}\binom{n}{1}\binom{n-2}{s}(h+1)(h+2)\ldots(h+n-s-2)\\
&+(-1)^{n-s-3}2.\binom{n}{2}\binom{n-3}{s}h(h+1)\ldots(h+n-s-3)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(-1)^{n-s-q}(q-1)\binom{n}{q-1}\binom{n-q}{s}(h-q+3)(h-q+4)\ldots(h+n-s-q)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(n-s-1)\binom{n}{s+1}(h-n+s+3)(h-n+s+4)\ldots\ldots h
\end{aligned}\right.\\[2ex]
&+\eta\,\mathfrak{X}_{n-1}\left[
\begin{aligned}
&(-1)^{n-s-2}\binom{n-2}{s}(h+1)(h+2)\ldots(h+n-s-2)\\
&+(-1)^{n-s-3}\binom{n-1}{1}\binom{n-3}{s}h(h+1)\ldots\ldots(h+n-s-3)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(-1)^{n-s-q}\binom{n-1}{q-2}\binom{n-q}{s}(h-q+3)(h-q+4)\ldots(h+n-s-q)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\binom{n-1}{s+1}(h-n+s+3)(h-n+s+4)\ldots\ldots h
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

$$+u^{(s)}\left\{+(x-\alpha)^{s+p-1}\left\{\eta^{(p-1)}\mathfrak{X}_n\left[\begin{array}{l}(-1)^{n-s-p}\binom{n}{p-1}\binom{n-p}{s}(h+1)(h+2)\,\ldots\ldots\,(h+n-s-p)\\ +(-1)^{n-s-p-1}\cdot p\binom{n}{p}\binom{n-p-1}{s}h(h+1)\,\ldots\ldots\,(h+n-s-p-1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(-1)^{n-s-p-q}\binom{p+q-1}{q}\binom{n}{p+q-1}\binom{n-p-q}{s}(h-q+1)\times\\ \qquad\times(h-q+2)\,\ldots\ldots\,(h+n-s-p-q)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\binom{n-s-1}{n-s-p}\binom{n}{s+1}(h-n+s+p+1)(h-n+s+p+2)\,\ldots\ldots\,h\end{array}\right.\right.\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\eta^{(t)}\mathfrak{X}_{n-p+t+1}\left[\begin{array}{l}(-1)^{n-s-p}\binom{n-p+t+1}{t}\binom{n-p}{s}(h+1)(h+2)\ldots(h+n-s-p)\\ +(-1)^{n-s-p-1}(t+1)\binom{n-p+t+1}{t+1}\binom{n-p-1}{s}h(h+1)\times\\ \qquad\times(h+2)\,\ldots\ldots\,(h+n-s-p-1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(-1)^{n-s-p-q}\binom{t+q}{q}\binom{n-p+t+1}{t+q}\binom{n-p-q}{s}(h-q+1)\times\\ \qquad\times(h-q+2)\,\ldots\ldots\ldots\,(h+n-s-p-q)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\binom{n-p-s+t}{n-p-s}\binom{n-p+t+1}{s+1}(h-n+p+s+1)\times\\ \qquad\times(h-n+p+s+2)\,\ldots\ldots\ldots\,h\end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\left.+\eta\mathfrak{X}_{n-p+1}\left[\begin{array}{l}(-1)^{n-s-p}\binom{n-p}{s}(h+1)(h+2)\,\ldots\ldots\ldots\,(h+n-s-p)\\ +(-1)^{n-s-p-1}\binom{n-p+1}{1}\binom{n-p-1}{s}h(h+1)\ldots(h+n-s-p-1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(-1)^{n-s-p-q}\binom{n-p+1}{q}\binom{n-p-q}{s}(h-q+1)(h-q+2)\ldots(h+n-s-p-q)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\binom{n-p+1}{s+1}(h-n+s+p+1)\,\ldots\ldots\ldots\,h\end{array}\right.\right\}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+u^{(s)}\left\{\begin{array}{l}+(x-\alpha)^{n-1}\left[\eta^{(n-s-1)}\mathfrak{X}_n\binom{n}{s+1}+\eta^{(n-s-2)}\mathfrak{X}_{n-1}\binom{n-1}{s+1}+\dots\dots+\right.\\ \left.\qquad+\eta^{(t)}\mathfrak{X}_{s+t+1}\binom{s+t+1}{s+1}+\dots\dots+\eta\,\mathfrak{X}_{s+1}\right]\end{array}\right.$$

....

....

....

....

$$+u\left\{\begin{array}{l}\eta\,\mathfrak{X}_n\Big[\;(-1)^{n-1}(h+1)(h+2)\dots\dots(h+n-1)+\\ \qquad+(-1)^{n-2}\,.\,nh\,(h+1)\dots\dots(h+n-2)+\\ \qquad\dots\dots\dots\dots\\ \qquad+(-1)^{n-q}\binom{n}{q-1}(h-q+2)(h-q+3)\dots(h+n-q)+\\ \qquad\dots\dots\dots\dots\\ \qquad+n\,(h-n+2)(h-n+3)\dots\dots h\Big]\\ +(x-\alpha)\left\{\begin{array}{l}\eta'\mathfrak{X}_n\Big[\;(-1)^{n-2}\,.\,n\,(h+1)(h+2)\dots\dots(h+n-2)+\\ \qquad+(-1)^{n-3}\,.\,2\binom{n}{2}h\,(h+1)\dots(h+n-3)+\\ \qquad\dots\dots\dots\dots\\ \qquad+(-1)^{n-q}(q-1)\binom{n}{q-1}(h-q+3)(h-q+4)\dots\dots(h+n-q)+\\ \qquad\dots\dots\dots\dots\\ \qquad+n\,(n-s-1)(h-n+3)(h-n+4)\dots\dots h\Big]+\\ +\eta\,\mathfrak{X}_{n-1}\Big[\;(-1)^{n-2}(h+1)(h+2)\dots\dots(h+n-2)+\\ \qquad+(-1)^{n-3}(n-1)\,h\,(h+1)\dots\dots(h+n-3)+\\ \qquad\dots\dots\dots\dots\\ \qquad+(-1)^{n-q}\binom{n-1}{q-2}(h-q+3)(h-q+4)\dots\dots(h+n-q)+\\ \qquad\dots\dots\dots\dots\\ \qquad+(n-1)(h-n+3)(h-n+4)\dots\dots h\Big]\end{array}\right.\\ \dots\dots\dots\dots\end{array}\right.$$

$$
+u\left\{\begin{array}{l}
+(x-\alpha)^{p-1}\left\{\begin{array}{l}
\eta^{(p-1)}\mathfrak{X}_n\left[\begin{array}{l}
(-1)^{n-p}\binom{n}{p-1}(h+1)(h+2)\ldots\ldots\ldots\ldots(h+n-p)\\
+(-1)^{n-p-1}\,p\binom{n}{p}\,h\,(h+1)\ldots\ldots\ldots\ldots(h+n-p-1)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+(-1)^{n-p-q}\binom{p+q-1}{q}\binom{n}{p+q-1}(h-q+1)(h-q+2)\ldots(h+n-p-q)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\binom{n-1}{n-p}\,n\,(h-n+p+1)\ldots\ldots\ldots\ldots h
\end{array}\right.\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\eta^{(t)}\mathfrak{X}_{n-p+t+1}\left[\begin{array}{l}
(-1)^{n-p}\binom{n-p+t+1}{t}(h+1)(h+2)\ldots(h+n-p)\\
+(-1)^{n-p-1}(t+1)\binom{n-p+t+1}{t+1}\,h\,(h+1)\ldots(h+n-p-1)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+(-1)^{n-p-q}\binom{t+q}{q}\binom{n-p+t+1}{t+q}(h-q+1)\times\\
\qquad\times(h-q+2)\ldots\ldots\ldots\ldots(h+n-p-q)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\binom{n-p+t}{n-p}(n-p+t+1)(h-n+p+1)(h-n+p+2)\ldots h
\end{array}\right.\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\eta\,\mathfrak{X}_{n-p+1}\left[\begin{array}{l}
(-1)^{n-p}(h+1)(h+2)\ldots\ldots\ldots\ldots(h+n-s-p)\\
+(-1)^{n-p-1}(n-p+1)\,h\,(h+1)\ldots\ldots(h+n-p-1)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+(-1)^{n-p-q}\binom{n-p+1}{q}(h-q+1)(h-q+2)\ldots(h+n-p-q)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+(n-p+1)(h-n+p+1)\ldots\ldots\ldots\ldots h
\end{array}\right.
\end{array}\right.\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+(x-\alpha)^{n-1}\left[\eta^{(n-1)}\mathfrak{X}_n.n+\eta^{(n-2)}\mathfrak{X}_{n-1}(n-1)+\ldots\ldots+\eta^{(t)}\mathfrak{X}_{t+1}(t+1)+\ldots\ldots+\eta\mathfrak{X}_1\right].
\end{array}\right.
$$

Wir haben zur Bequemlichkeit des Lesers, dem es vielleicht daran gelegen ist, unseren Rechnungen zu folgen, die zweite dieser beiden Gleichungen, die in u, so hingestellt, wie sie sich unmittelbar aus den Rechnungsentwicklungen ergibt. In ihren Coefficienten lässt sich jedoch durchgehends die Zusammenziehung mehrerer Glieder in Eines bewerkstelligen. Sie ergibt sich bei einigen der

ersteren leicht, kann aber allgemein demjenigen bedeutende Schwierigkeiten biethen, dem gewisse, zur Differenzenrechnung gehörige Formeln nicht sehr geläufig und sehr frisch im Gedächtnisse sind. Wir nehmen desshalb die Reductionen der in Rede stehenden Glieder in den successiven Coefficienten vor. Der erste gestattet keine solche. Im zweiten jedoch hat man schon:

$$-(n-1)(h+1)+nh=h-n+1.$$

Der dritte erleidet dreierlei Reductionen:

$$\binom{n-1}{2}(h+1)(h+2)-(n-2)nh(h+1)+\binom{n}{2}(h-1)h=(h-n+1)(h-n+2)$$

$$-(n-2)n(h+1)+2\binom{n}{2}h=n(h-n+2)$$

$$-(n-2)(h+1)+(n-1)h=(h-n+2).$$

Sie biethen nicht die geringste Schwierigkeit. Wendet man sich jedoch zu dem allgemeinen Entwicklungsgliede, so gewahrt man als Coefficienten gewisse Summen von Factorenfolgen, die alle in der Form enthalten sind:

$$(-1)^{m-s}\binom{m+t+1}{t}\binom{m}{s}(h+1)(h+2)\,\ldots\ldots\ldots\,(h+m-s)+$$

$$+(-1)^{m-s-1}(t+1)\binom{m+t+1}{t+1}\binom{m-1}{s}h(h+1)\,\ldots\ldots\,(h+m-s-1)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{m-s-q}\binom{t+q}{q}\binom{m-q}{s}\binom{m+t+1}{t+q}(h-q+1)(h-q+2)\ldots(h+m-s-q)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\binom{t+m-s}{m-s}\binom{m+t+1}{t+m-s}(h-m+s+1)(h-m+s+2)\,\ldots\ldots\ldots\,h=K.$$

Hier lassen sich zuvörderst die in den einzelnen Gliedern als Factoren erscheinenden Binomialcoefficienten in Produkte zusammenziehen, namentlich:

$$(t+1)\binom{m+t+1}{t+1}=\frac{(m+t+1)(m+t)\,\ldots\ldots\,(m+2)(m+1)}{1\;.\;2\;\ldots\ldots\;t}=\binom{m+t+1}{t}(m+1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{t+q}{q}\binom{m+t+1}{t+q}=\frac{(t+q)(t+q-1)\ldots(t+1)(m+t+1)(m+t)\ldots(m-q+2)}{1\;.\;2\;\ldots\;q\;.\;1\;.\;2\;\ldots\;(t+q)}=\binom{m+t+1}{t}\binom{m+1}{q}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{t+m-s}{m-s}\binom{m+t+1}{t+m-s}=\binom{m+t+1}{t}\binom{m+1}{m-s}.$$

Ihnen allen entspricht der Binomialcoefficient $\binom{m+t+1}{t}$ als Factor, der somit dem ganzen Ausdrucke gemeinschaftlich ist. Sondert man ihn, so vereinfacht sich derselbe in etwas und geht über in:

$$(48)\quad K = \binom{m+t+1}{t}\left[\begin{array}{l}(-1)^{m-s}\binom{m}{s}(h+1)\ldots(h+m-s)+\\ +(-1)^{m-s-1}\binom{m+1}{1}\binom{m-1}{s}h(h+1)\ldots(h+m-s-1)+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(-1)^{m-s-q}\binom{m+1}{q}\binom{m-q}{s}(h-q+1)(h-q+2)\ldots(h+m-s-q)+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\binom{m+1}{m-s}(h-m+s+1)(h-m+s+2)\ldots\ldots(h-1)h\end{array}\right]$$

und hier käme es darauf an, die eingeklammerte Summe von Factoriellen einer ferneren Reduction zu unterwerfen. Da aber eine solche selbst erfahrnen Rechnern Schwierigkeiten biethen, und mindestens nicht augenblicklich gelingen dürfte, so wollen wir den hiezu dienenden Kunstgriff etwas ausführlicher darlegen. Die folgende allgemeine Formel der Differenzenrechnung, die derselben zu Grunde liegt, ist jedermänniglich bekannt:

$$\Delta^n f(x) = f(x+n\Delta x) - \binom{n}{1} f(x+(n-1)\Delta x) + \binom{n}{2} f(x+(n-2)\Delta x) + \ldots + (-1)^n f(x).$$

Wir schreiben in derselben $x - n\Delta x$ anstatt x, wodurch sie übergeht in:

$$\Delta^n f(x-n\Delta x) = f(x) - \binom{n}{1} f(x-\Delta x) + \binom{n}{2} f(x-2\Delta x) + \ldots\ldots + (-1)^n f(x-n\Delta x).$$

sodann verwandeln wir noch überdiess Δx in 1 und setzen $n = m+1$, diess gibt:

$$\Delta^{m+1} f(x-m-1) = f(x) - \binom{m+1}{1} f(x-1) + \binom{m+1}{2} f(x-2) + \ldots + (-1)^{m+1} f(x-m-1),$$

und nun sei für einen Augenblick:

$$f(x) = (m+x)(m+x-1)\ldots\ldots(m+x-s+1)(h+x+1)(h+x+2)\ldots\ldots(h+x+m-s);$$

so erhalten wir, diesen Werth in unsere vorliegende Formel einführend, die Gleichung:

$$\begin{aligned}\Delta^{m+1}&(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-s)(h+x-m)(h+x-m+1)\ldots\ldots(h+x-s-1) =\\ &= (m+x)(m+x-1)\ldots\ldots(m+x-s+1)(h+x+1)(h+x+2)\ldots\ldots(h+x+m-s) -\\ &- \binom{m+1}{1}(m+x-1)(m+x-2)\ldots(m+x-s)(h+x)(h+x+1)\ldots(h+x+m-s-1) +\\ &+ \binom{m+1}{2}(m+x-2)(m+x-3)\ldots(m+x-s-1)(h+x-1)(h+x)\ldots(h+x+m-s-2) +\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ (-1)^q\binom{m+1}{q}(m+x-q)(m+x-q-1)\ldots(m+x-s-q+1)(h+x-q+1)\times\\ &\qquad\times(h+x-q+2)\ldots\ldots\ldots(h+x+m-s-q) +\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ (-1)^{m+1}(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-s)(h+x-m)(h+x-m+1)\ldots\ldots(h+x-s-1).\end{aligned}$$

Sie gibt die $(m+1)^{ste}$ Differenz eines Produktes aus m einfachen Factoren des ersten Grades, oder mit anderen Worten, die $(m+1)^{ste}$ Differenz einer ganzen algebraischen Function vom Grade m, von der man weiss, dass sie immer Null sei. Man wird somit den ersten Theil dieser Gleichung ersetzen durch die Nulle; der zweite Theil wird dann, auf passende Weise entwickelt, ebenfalls identisch den Werth Null annehmen müssen, was auch x, m und h bedeuten mögen, sohin auch dann, wenn man $x=0$ schreibt. Thut man diess, und nimmt man noch ferner an, dass m und s, so wie in der Gleichung (47), ganze positive Zahlen seien, und dass man stets $m>s$ habe, so gewahrt man alsobald eine Reihe von in Folge dieser Annahmen verschwindenden Gliedern in unserer Formel, die dem letzten von Null verschieden bleibenden vorangehen. Wir wollen sie der Zahl nach zu bestimmen suchen, und fassen zu diesem Behufe nur den Factor des allgemeinen $(q+1)^{sten}$ Gliedes ins Auge, nämlich:

$$(m+x-q)\,(m+x-q-1)\,\ldots\ldots\ldots\,(m+x-s-q+1),$$

Durch Nullsetzen von x geht er über in:

$$(m-q)\,(m-q-1)\,\ldots\ldots\ldots\,(m-s-q+1).$$

verschwindet demnach für s aufeinanderfolgende Werthe des Stellenzeigers q. Sie sind der Reihe nach vom kleinsten angefangen:

$$q=m-s+1, \quad m-s+2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad m-1, \quad m.$$

Die Glieder, welche in der Reihe die Nulle zum Factor bekommen und desshalb wegfallen, sind daher das:

$$(m-s+2)^{te}, \quad (m-s+3)^{te}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad m^{te}, \quad (m+1)^{ste}.$$

Von der Nulle verschieden bleiben das 1ste, 2te, ... $(m-s+1)^{ste}$ und das $(m+2)^{te}$. Die Letzteren notirend, die Ersteren weglassend, und das $(m+2)^{te}$ nach der anderen Seite des Gleichheitszeichens hinübertragend, gelangen wir zur folgenden Formel:

$$\begin{aligned}
(-1)^{m-s}\,1\,.\,2\,\ldots\ldots\,s\,.\,(h-m)\,(h-m+1)\,\ldots\ldots\,(h-s-1) = \\
= m\,(m-1)\,\ldots\,(m-s+1)\,(h+1)\,(h+2)\,\ldots\,(h+m-s)\,- \\
-\binom{m+1}{1}(m-1)(m-2)\,\ldots\,(m-s)\,h\,(h+1)\,\ldots\,(h+m-s-1)\,+ \\
+\binom{m+1}{2}(m-2)(m-3)\,\ldots\,(m-s-1)(h-1)\,\ldots\,(h+m-s-2)\,- \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+(-1)^{m-s}\binom{m+1}{m-s}\,s\,(s-1)\,\ldots\ldots\,1\,.\,(h-m+s+1)\,\ldots\ldots\,h.
\end{aligned}$$

Sie enthält bereits die gewünschte Reduction in sich, weil ihr zweiter Theil mit $(-1)^{m-s}$ multiplizirt und durch die Factorielle $1.2\ldots.s$ dividirt gerade den eingeklammerten Factor von K in (48) liefert. Dem gemäss ist also in höchst einfacher Gestalt:

$$K = \binom{m+t+1}{t} (h-m)(h-m+1) \ldots\ldots\ldots (h-s-1),$$

und substituirt man diesen Werth von K in die Gleichung (48), so erhält man die unmittelbar zur Reduction der Coefficienten unserer Gleichung in u dienende Formel:

$$\binom{m+t+1}{t} (h-m)(h-m+1) \ldots\ldots\ldots (h-s-1) =$$

$$(49) \quad = \binom{m+t+1}{t} \left[\begin{array}{l} (-1)^{m-s} \binom{m}{s} (h+1)(h+2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (h+m-s) \\ + (-1)^{m-s-1} \binom{m+1}{1} \binom{m-1}{s} h(h+1) \ldots\ldots\ldots\ldots (h+m-s-1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (-1)^{m-s-q} \binom{m+1}{q} \binom{m-q}{s} (h-q+1)(h-q+2) \ldots\ldots (h+m-s-q) \\ + \binom{m+1}{m-s} (h-m+s+1)(h-m+s+2) \ldots\ldots (h-1)\, h. \end{array} \right]$$

Mit ihrer Hilfe verkürzen sich nun die Coefficienten der (47) sehr wesentlich, und es geht dieselbe über in die nachstehende:

$$0 = u^{(n-1)} . (x-\alpha)^{n-1} . \eta \mathfrak{X}_n +$$

$$+ u^{(n-2)} \left[\begin{array}{l} (h-n+1)(x-\alpha)^{n-2} . \eta \mathfrak{X}_n \\ + \quad (x-\alpha)^{n-1} [n\eta' \mathfrak{X}_n + \eta \mathfrak{X}_{n-1}] \end{array} \right] +$$

$$+ u^{(n-3)} \left[\begin{array}{l} (h-n+1)(h-n+2)(x-\alpha)^{n-3} . \eta \mathfrak{X}_n + \\ + \quad (h-n+2)(x-\alpha)^{n-2} . [n\eta' \mathfrak{X}_n + \eta \mathfrak{X}_{n-1}] + \\ + \quad (x-\alpha)^{n-1} \left[\binom{n}{2} \eta'' \mathfrak{X}_n + (n-1) \eta' \mathfrak{X}_{n-1} + \eta \mathfrak{X}_{n-2} \right] \end{array} \right] +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ u^{(s)} \left[\begin{array}{l} (h-n+1)(h-n+2)\ldots(h-s-1)(x-\alpha)^{s} . \eta \mathfrak{X}_n + \\ + \quad (h-n+2)\ldots(h-s-1)(x-\alpha)^{s+1} [n\eta' \mathfrak{X}_n + \eta \mathfrak{X}_{n-1}] + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (h-n+p)(h-n+p+1) \ldots (h-s-1)(x-\alpha)^{s+p-1} \left[\binom{n}{p-1} \eta^{(p-1)} \mathfrak{X}_n + \right. \\ \qquad \left. + \binom{n-1}{p-2} \eta^{(p-2)} \mathfrak{X}_{n-1} + \ldots\ldots\ldots + \eta \mathfrak{X}_{n-p+1} \right] + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (x-\alpha)^{n-1} \left[\binom{n}{s+1} \eta^{(n-s-1)} \mathfrak{X}_n + \binom{n-1}{s+1} \eta^{(n-s-2)} \mathfrak{X}_{n-1} + \ldots + \eta \mathfrak{X}_{s+1} \right] \end{array} \right] +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+u\left|\begin{array}{l} (h-n+1)(h-n+2)\ldots\ldots\ldots\ldots(h-1)\,\eta\,\mathfrak{X}_n+\\ +\quad(h-n+2)(h-n+3)\ldots\ldots(h-1)(x-\alpha)\left[n\eta'\mathfrak{X}_n+\eta\mathfrak{X}_{n-1}\right]+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(h-n+p)(h-n+p+1)\ldots\ldots(h-1)(x-\alpha)^{p-1}\times\\ \times\left[\binom{n}{p-1}\eta^{(p-1)}\mathfrak{X}_n+\binom{n-1}{p-2}\eta^{(p-2)}\mathfrak{X}_{n-1}+\ldots\ldots+\eta\mathfrak{X}_{n-p+1}\right]+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(x-\alpha)^{n-1}\left[n\eta^{(n-1)}\mathfrak{X}_n+(n-1)\,\eta^{(n-2)}\mathfrak{X}_{n-1}+\ldots\ldots+\eta\mathfrak{X}_1\right] \end{array}\right|$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir bereits übergehen zur Erörterung der zur Sprache gebrachten Übereinstimmung zwischen der aufgestellten Formel (43) und der die vorgelegte Differentialgleichung erfüllenden Reihe. Es ist angenommen worden, dass der erste Coefficient $\mathfrak{X}_n$ nur einen einzigen Factor $x-\alpha$ besitze. Um diess anschaulich zu machen, statuiren wir $\mathfrak{X}_n=(x-\alpha)\,\mathfrak{X}$. Unter dieser Annahme nun und für Werthe von η, welche die Differentialgleichung (46) identisch erfüllen, muss gezeigt werden, dass die Gleichung in u theilbar werde durch so viele Factoren $x-\alpha$, dass nach geschehener Division ihr erster Coefficient gar keinen solchen mehr behält, also gegenwärtig durch $(x-\alpha)^n$. Um diess mit Bequemlichkeit thun zu können, ist es erspriesslich, nach geschehener Substitution des Werthes für $\mathfrak{X}_n$ beide Gleichungen, sowohl die Gleichung (46) in η, als auch die (47) in u aufsteigend nach Potenzen von $x-\alpha$ zu ordnen, und zwar die erste überhaupt, die zweite coefficientenweise. Führt man diess durch, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0= &\ (x-\alpha)^n\ \mathfrak{X}\eta^{(n)}+\\ &+(x-\alpha)^{n-1}\left[(nh\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_{n-1})\,\eta^{(n-1)}+\mathfrak{X}_{n-2}\eta^{(n-2)}+\mathfrak{X}_{n-3}\eta^{(n-3)}+\ldots\ldots+\mathfrak{X}_0\eta\right]+\\ &+(x-\alpha)^{n-2}h\Big[\left(\binom{n}{2}(h-1)\,\mathfrak{X}+\binom{n-1}{1}\mathfrak{X}_{n-1}\right)\eta^{(n-2)}+(n-2)\,\mathfrak{X}_{n-2}\,\eta^{(n-3)}+\\ &\qquad\qquad+(n-3)\,\mathfrak{X}_{n-3}\,\eta^{(n-4)}+\ldots\ldots\ldots+\mathfrak{X}_1\eta\Big]+\\ &+(x-\alpha)^{n-3}h(h-1)\left[\left(\binom{n}{3}(h-2)\mathfrak{X}+\binom{n-1}{2}\mathfrak{X}_{n-1}\right)\eta^{(n-3)}+\binom{n-2}{2}\mathfrak{X}_{n-2}\eta^{(n-4)}+\ldots+\mathfrak{X}_2\eta\right]+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+(x-\alpha)^2.\,h\,(h-1)\ldots\ldots(h-n+4)\Big[\left(\binom{n}{2}(h-n+3)\,\mathfrak{X}+\binom{n-1}{2}\mathfrak{X}_{n-1}\right)\eta''+\\ &\qquad\qquad+(n-2)\,\mathfrak{X}_{n-2}\,\eta'+\mathfrak{X}_{n-3}\eta\Big]+\\ &+(x-\alpha)\,h\,(h-1)\ldots\ldots(h-n+3)\left[\left(n\,(h-n+2)\,\mathfrak{X}+(n-1)\,\mathfrak{X}_{n-1}\right)\eta'+\mathfrak{X}_{n-2}\,\eta\right]+\\ &\quad h\,(h-1)\ldots\ldots(h-n+2)\left[(h-n+1)\,\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_{n-1}\right]\eta. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(51)\quad 0 = {} & u^{(n-1)} \,.\, (x-\alpha)^n \,.\, \mathfrak{X}\eta \;+ \\
& + u^{(n-2)} \,.\, \left[\begin{aligned} & (x-\alpha)^{n-1} \,.\, \big((h-n+1)\,\mathfrak{X} + \mathfrak{X}_{n-1}\big)\,\eta \;+ \\ & + (x-\alpha)^n \,.\, n\mathfrak{X}\eta' \end{aligned}\right] + \\
& + u^{(n-3)} \,.\, \left[\begin{aligned} & (x-\alpha)^{n-2}.(h-n+2)\,\big[(h-n+1)\,\mathfrak{X} + \mathfrak{X}_{n-1}\big]\,\eta \;+ \\ & + (x-\alpha)^{n-1}.\big[\big(n\,(h-n+2)\,\mathfrak{X} + (n-1)\,\mathfrak{X}_{n-1}\big)\,\eta' + \mathfrak{X}_{n-2}\,\eta\big] + \\ & + (x-\alpha)^n \,.\, \binom{n}{2}\,\mathfrak{X}\eta'' \end{aligned}\right] + \\
& + u^{(n-4)} \,.\, \left[\begin{aligned} & (x-\alpha)^{n-3}.(h-n+3)\,(h-n+2)\,\big[(h-n+1)\,\mathfrak{X} + \mathfrak{X}_{n-1}\big]\,\eta \;+ \\ & + (x-\alpha)^{n-2}.(h-n+3)\,\big[\big[n\,(h-n+2)\,\mathfrak{X} + (n-1)\,\mathfrak{X}_{n-1}\big]\,\eta' + \mathfrak{X}_{n-2}\,\eta\big] + \\ & + (x-\alpha)^{n-1}.\Big[\Big(\binom{n}{2}(h-n+3)\mathfrak{X} + \binom{n-1}{2}\mathfrak{X}_{n-1}\Big)\eta'' + (n-2)\,\mathfrak{X}_{n-2}\eta' + \mathfrak{X}_{n-3}\eta\Big] + \\ & + (x-\alpha)^n \,.\, \binom{n}{3}\,\mathfrak{X}\,\eta''' \end{aligned}\right] +
\end{aligned}
$$

. . . .

$$
+ u^{(s)} \left[\begin{aligned} & (x-\alpha)^{s+1}.(h-s-1)\ldots(h-n+3)(h-n+2)\,\big[(h-n+1)\,\mathfrak{X} + \mathfrak{X}_{n-1}\big]\,\eta \;+ \\ & + (x-\alpha)^{s+2}.(h-s-1)\ldots(h-n+4)(h-n+3)\,\big[\big(n(h-n+2)\mathfrak{X} + (n-1)\mathfrak{X}_{n-1}\big)\,\eta' + \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad + \mathfrak{X}_{n-2}\,\eta\big] + \\ & + (x-\alpha)^{s+3}.(h-s-1)\ldots(h-n+5)(h-n+4)\Big[\Big(\binom{n}{2}\,(h-n+3)\,\mathfrak{X} + \\ & \qquad\qquad + \binom{n-1}{2}\mathfrak{X}_{n-1}\Big)\,\eta'' + (n-2)\,\mathfrak{X}_{n-2}\,\eta' + \mathfrak{X}_{n-3}\,\eta\Big] + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (x-\alpha)^n \binom{n}{s+1}\,\mathfrak{X}\,\eta^{(n-s-1)} \end{aligned}\right] +
$$

. . . .

$$
+ u \left[\begin{aligned} & (x-\alpha)\,(h-1)\ldots(h-n+3)(h-n+2)\,\big[(h-n+1)\,\mathfrak{X} + \mathfrak{X}_{n-1}\big]\,\eta \;+ \\ & + (x-\alpha)^2(h-1)\ldots(h-n+4)(h-n+3)\,\big[\big(n(h-n+2)\mathfrak{X} + (n-1)\mathfrak{X}_{n-1}\big)\eta' + \mathfrak{X}_{n-2}\eta\big] + \\ & + (x-\alpha)^3(h-1)\ldots(h-n+5)(h-n+4)\Big[\Big[\binom{n}{2}\,(h-n+3)\,\mathfrak{X} + \binom{n-1}{2}\,\mathfrak{X}_{n-1}\Big]\,\eta'' + \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad + (n-2)\,\mathfrak{X}_{n-2}\,\eta' + \mathfrak{X}_{n-3}\,\eta\Big] + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (x-\alpha)^n \binom{n}{1}\,\mathfrak{X}\,\eta^{(n-1)}. \end{aligned}\right]
$$

Nun wende man sich zuvörderst an die erste dieser Beiden, und fasse dasjenige Glied ins Auge, in welchem kein Factor $x-\alpha$ unmittelbar ersichtlich ist. Wenn es auch wirklich keinen enthielte, so wäre die ganze Gleichung durch $(x-\alpha)$ nicht theilbar, und da sie Glieder mit solchen Factoren bis zu n an der Zahl enthält, die alle für $x=\alpha$ verschwinden, so wäre das Polynom aus Gliedern zusammengesetzt, deren einige für diesen Werth von x der Nulle gleich werden, während andere davon verschieden bleiben. Es wäre also für $x=\alpha$ die Gleichung keine identische, sohin auch überhaupt keine solche, und ein Identischwerden ist nur auf folgende Weise denkbar: Die Glieder, in welchen kein Factor $x-\alpha$ unmittelbar ersichtlich ist, d. h. die:

$$h\,(h-1)\,\ldots\ldots\ldots\,(h-n+2)\left[(h-n+1)\,\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_{n-1}\right]\eta$$

besitzen gleichwohl wenigstens Einen solchen. Diess bestätigt sich durch den Werth des Exponenten h, der, wie man weiss, gezogen ist aus der Formel:

$$-h=\left.\frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{\mathfrak{X}}\right\}_{\alpha}-n+1.$$

Fügt man jetzt die mit dem Factor $x-\alpha$ behafteten Glieder hinzu, so muss die Summe, d. h.:

$$h(h-1)\,\ldots\ldots\,(h-n+3)\left[\begin{array}{l}(x-\alpha)\left[\left(n\,(h-n+2)\,\mathfrak{X}+(n-1)\,\mathfrak{X}_{n-1}\right)\eta'+\mathfrak{X}_{n-2}\,\eta\right]+\\+(h-n+2)\,\left((h-n+1)\,\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_{n-1}\right)\eta\end{array}\right]$$

wie wohl man an ihr nur einen einzigen Factor $x-\alpha$ gewahr wird, doch deren mindestens zwei erhalten, denn die übrigen besitzen zwei und können daher identisch aufgehoben werden, nur durch einen solchen hinzugefügten Ausdruck, der deren ebenfalls zwei hat. Nun füge man die Glieder mit $(x-\alpha)^2$ hinzu, so muss die Summe, d. h.:

$$h(h-1)\ldots(h-n+4)\left[\begin{array}{l}(x-\alpha)^2\left[\left(\binom{n}{2}(h-n+3)\mathfrak{X}+\binom{n-1}{2}\mathfrak{X}_{n-1}\right)\eta''+\binom{n-2}{1}\mathfrak{X}_{n-2}\eta'+\mathfrak{X}_{n-3}\eta\right]+\\+(x-\alpha)\,(h-n+3)\,\left[\left(n\,(h-n+2)\,\mathfrak{X}+(n-1)\,\mathfrak{X}_{n-1}\right)\eta'+\mathfrak{X}_{n-2}\,\eta\right]+\\+(h-n+3)\,(h-n+2)\,\left[(h-n+1)\,\mathfrak{X}+\mathfrak{X}_{n-1}\right]\eta\end{array}\right]$$

aus demselben Grunde theilbar erscheinen mindestens durch $(x-\alpha)^3$ u. s. w., bis man endlich, das letzte mit $(x-\alpha)^n$ verbundene Glied:

$$(x-\alpha)^n\,\mathfrak{X}\eta^{(n)}$$

hinzusetzend, das vollständige Gleichungspolynom vorliegen hat, das bei richtig gewähltem η identisch der Nulle gleichen muss. Aus der eben nachgewiesenen Theilbarkeit nun der Ausdrücke (52), (53), (54) durch $x-\alpha$, $(x-\alpha)^2$, $(x-\alpha)^3$, ... $(x-\alpha)^n$ lässt sich auch unmittelbar die Theilbarkeit der Gleichung in u durch $(x-\alpha)^n$, und die hiemit verbundene Befreiung des ersten Coefficienten von jeder Spur dieses Factors erschliessen. In der That ist der erste Coefficient dem $(x-\alpha)^n$

proportional; der zweite wird es ebenfalls in Folge der Theilbarkeit des Ausdruckes (52) durch $(x-\alpha)$; der dritte ebenso kraft der Multiplicatoren von $x-\alpha$ und $(x-\alpha)^2$ in (52) und (53) u. s. f. bis zu dem letzten.

Die Giltigkeit des eben geführten Beweises ist, wie bei der Differentialgleichung der dritten Ordnung, so auch hier keineswegs auf ganze positive Werthe von h beschränkt, gleichwohl aber an einige in die Rechnung stillschweigend niedergelegte Bedingungen gebunden, namentlich: Erstens, der erste Coefficient $\mathfrak{X}_n$ darf nicht mehr als einen einzigen Factor $x-\alpha$ haben, denn hätte er deren z. B. nur zwei, während $\mathfrak{X}_{n-1}$ davon frei bleibt, so könnte der Gleichung in η durchaus nicht mehr identisch Genüge geleistet werden, weil bereits der Bestandtheil (52) des Gleichungspolynoms, der nothwendig einen Factor $x-\alpha$ besitzen sollte, denselben nicht haben kann, nachdem ihn sein erster Bestandtheil hat, sein zweiter aber nicht. Der ganze Beweis würde daher unter solchen Umständen seine Grundlage verlieren. Diess hat, wie wir wissen, darin seinen natürlichen Grund, dass zwei Factoren $x-\alpha$ des ersten Coefficienten hindeuten auf eine ganz andere Form des Integrales, nicht mit dem Factor $(x-\alpha)^k$, sondern mit einer Exponentialgrösse als Multiplicator, die $(x-\alpha)$ zum Nenner des Exponenten hat. In wie weit und mit welchen Modificationen unser Beweis fortbestehe in dem Falle wo die Gleichungscoefficienten beziehlich 2, 1, 0, oder auch 3, 2, 1, 0, oder allgemein r, $r-1$, $r-2$, ... 2, 1, 0 Factoren $x-\alpha$ aufweisen, soll im folgenden Paragraphe erörtert werden.

Zweitens: das der Gleichung (50) identisch Genüge leistende η darf keinen Factor oder Divisor $x-\alpha$ mehr enthalten, auch kein $\log(x-\alpha)$ darf sich darin vorfinden, weil sonst $x-\alpha$ in den Nennern der Differentialquotienten von η erschiene und in Folge dessen die Art der Reduction auf Null des Gleichungspolynomes (50) eine andere, von der oben auseinandergesetzten wesentlich verschiedene werden würde, während in den ersten Coefficienten der Gleichung in u durch Multiplication mit diesem Nenner dasselbe $x-\alpha$ wieder als Factor fallen wird. Wenn es daher gelungen ist, irgend ein particuläres Integral $\eta(x-\alpha)^h$, gleichviel was der Exponent h für eine Zahl ist, aufzufinden, und wenn die Function η den eben genannten Erfordernissen entspricht; so kann man durch Einführung der neuen Veränderlichen u von der vorgelegten Differentialgleichung in y unmittelbar übergehen zur (51), und wird damit nicht bloss die Herabsetzung um die Einheit in der Ordnungszahl erzielen, sondern auch die Coefficienten von jeder Spur von $x-\alpha$ frei machen. Letzteres ist ein sehr zu beachtender Vortheil, den man durch die Substitution (44), respective Einführung einer neuen Veränderlichen u erreicht, und durch die einfache andere:

$$y = \eta\,(x-\alpha)^h \int z\,dx$$

nicht erreichen würde. In der That lehrt jetzt der Vergleich dieses Ausdruckes mit der allgemeinen Form (43), dass:

$$z = \frac{\eta_1}{(x-\alpha)^{h+1}} \int \eta_2\,dx \int \eta_3\,dx \;\ldots\ldots\ldots\; \int \eta_n\,dx \tag{55}$$

sei. Der vollständige Werth von z besteht daher aus $n-1$ Theilen, welche beziehlich in ihren Nennern die folgenden Potenzen von $x-\alpha$:

$$(x-\alpha)^{h+1}, \; (x-\alpha)^{h}, \; (x-\alpha)^{h-1} \; \dots\dots\dots\dots \; (x-\alpha)^{h-n+3}$$

besitzen. Die entsprechende Differentialgleichung in z wird daher nothwendig in ihre Coefficienten der Reihe nach: $n-1$, $n-2$, ... 2, 1, 0 solche Factoren aufnehmen müssen, während die in u gar keinen mehr hat. Erstere ist daher um $n-1$ Einheiten in der Gradzahl der Coefficienten höher gebaut, was die Behandlung nothwendigerweise erschwert. Man sieht sich nun freilich genöthigt, von den vielen $x-\alpha$ durch eine neue Substitution die Gleichung zu befreien und es gelingt diess auch, jedoch ist es kürzer, durch den unmittelbaren Übergang von der (1) in y zu der (51) in u beide Substitutionen in eine zusammenzuziehen.

Wenn nun aber auch die Identität der Erscheinungen, die bei der Integration der Gleichung (1) in Reihenform und bei der Entwicklung des aus unbestimmten Integralen zusammengefügten Ausdruckes (43) vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel vorkommen, nachgewiesen ist; so folgt doch hieraus weder die Identität der auf diesen zwei Wegen erhaltenen Reihen, noch das ausschliessliche Recht der Form (43) als allgemeines Integral der Differentialgleichung unter allen Umständen zu gelten. Die erste nicht, weil die Integration in Reihenform, so wie wir sie hier eingeleitet haben, zu einer bestimmten Combination der in irgend einer Form gedachten particulären Integrale, z. B. in der assymptotischen führt, bestimmt durch die Annahme, dass die successiven Differentialquotienten des allgemeinen Integrales y, y', y'' ... für $x-\alpha$ genommen, zugleich die Integrationsconstanten vorstellen. In Folge dieser Annahme werden dann alle Glieder des in Reihenform entwickelten assymptotischen Integrales, die den Factor $x-\alpha$ nicht besitzen, dem ersten particulären Integrale zugeworfen, alle mit dem Factor $x-\alpha$ verbundenen dem zweiten zugesellt, alle mit $(x-\alpha)^2$ dem dritten zugeschlagen u. s. w. Diess gibt, wie schon gesagt, das allgemeine Integral in einer bestimmten Combination seiner assymptotischen Bestandtheile. Die Integralform (43) dagegen enthält keineswegs diese bestimmte Combination, sondern stellt vielmehr annoch eine unendliche Mannigfaltigkeit ähnlicher Combinationen dar, die aus dieser Einen Bestimmten, wenn man will, erhalten werden können durch Multiplication mit gewissen Constanten und Addition. Es sind daher die η_1, η_2, ... η_n keineswegs vollkommen bestimmte Functionen, und es gibt unendlich viele verschiedene Ausdrücke, die alle, der Behandlung vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel fähig, in die (43) hineingesetzt, das allgemeine Integral geben. Auch ist diese Form nicht die einzige, die das Integral anzunehmen vermag, denn zerlegt man sie in ihre Bestandtheile, so entsprechen denselben beziehlich die in der Reihe enthaltenen Werthe von k, nämlich:

$$k = -h, \; 0, \; -1, \; -2, \; \dots\dots\dots\dots, \; -n+2.$$

Da ihrer n an der Zahl sind, und da eine jede Gruppe aus n combinatorischen Elementen so viele verschiedene Permutationen zulässt, als das Produkt $1.2.3\ldots n$ Einheiten in sich enthält; so wird man zu der (43) noch eine bedeutende Anzahl anderer hinzufügen können, welche die durch die

Werthe von k charakterisirten particulären Integrale in anderen stets und anderen Ordnunge
Unter ihnen wird es einige geben, welche der Differentialgleichung (1) eigenthümlich ange
dem Sinne, dass sie stets zu einer solchen mit einem Factor $(x-\alpha)$ des ersten Coefficienten
sind, was auch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ bedeuten mögen, andere werden wieder eigenthümlich nicht
sondern irgend einer anderen dem Coefficientenbaue nach von ihr verschiedenen Gleichung ei
nur ausnahmsweise, d. h. für verschwindende Werthe gewisser in $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ vorhanden
ficientenverbindungen auch das Integral der (1) darstellen. Endlich wird es auch solche geben
nicht nur der Gleichung (1) eigenthümlich sind, sondern auch kraft ihrer Form schon gewiss
gentlich erfüllte Bedingungen bereits in sich enthalten. Von der Sorte der letzteren machen
folgende Reihe namhaft:

$$
(56)\quad
\begin{aligned}
y &= \eta_1 \int \eta_2 (x-\alpha)^{h-1} dx \int \frac{\eta_3 dx}{(x-\alpha)^h} \int \eta_4 dx \ldots\ldots\ldots\ldots \int \eta_n dx \\
y &= \eta_1 \int \eta_2 dx \int \eta_3 (x-\alpha)^{h-2} dx \int \frac{\eta_4 dx}{(x-\alpha)^{h-1}} \int \eta_5 dx \ldots\ldots \int \eta_n dx \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y &= \eta_1 \int \eta_2 dx \int \eta_3 dx \ldots\ldots\ldots\ldots \int \eta_{n-1} (x-\alpha)^{h-n+2} dx \int \frac{\eta_n dx}{(x-\alpha)^{h-n+3}} \\
y &= \eta_1 \int \eta_2 dx \int \eta_3 dx \ldots\ldots\ldots\ldots \int \eta_{n-1} dx \int \eta_n (x-\alpha)^{h-n+2} dx.
\end{aligned}
$$

Zerlegt man sie alle in ihre Bestandtheile, so entsprechen denselben beziehlich die folgenden
für k:

$$
\begin{aligned}
k &= 0,\ -h,\ -1,\ -2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ -n+2 \\
k &= 0,\ -1,\ -h,\ -2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ -n+2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k &= 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots\ldots\ldots\ -h,\ -n+2 \\
k &= 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots\ldots\ldots\ -n+2,\ -h
\end{aligned}
$$

und es enthält zudem eine jede dieser Formen bereits die Erfüllung gewisser Bedingungsgleich
sich. In der ersten nämlich ist die einzige $(0,r)=0$ erfüllt, in der zweiten hat man $(0,r)=(1$
in der dritten besteht bereits $(0,r)=(1,r)=(2,r)=0$, in der letzten endlich hat man Bed
gleichungen $n-1$ an der Zahl, nämlich die:

$$(0,r) = (1,r) = \ldots\ldots\ldots = (n-2,r) = 0,$$

denen durch die Form selber Genüge geleistet ist.

Es ist nicht schwer, diejenige Formel aufzustellen, die einem bestimmten Systeme v
then für k angehörig ist. Es sei in der That:

$$k = -\beta, \ -\gamma, \ -\delta, \ \ldots\ldots\ldots \ -\lambda, \ -\mu,$$

das in Rede stehende System und:

$$y = \eta_1 (x-\alpha)^{\mathfrak{b}} \int \eta_2 (x-\alpha)^{\mathfrak{c}} dx \int \eta_3 (x-\alpha)^{\mathfrak{d}} dx \ldots\ldots \int \eta_{n-1} (x-\alpha)^{\mathfrak{l}} dx \int \eta_n (x-\alpha)^{\mathfrak{m}} dx$$

die entsprechende Form des Integrales; so ergeben sich nach einer leichten Überlegung alsobald die folgenden Werthe der Exponenten $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots \mathfrak{m}$:

$$\mathfrak{b} = \beta, \ \mathfrak{c} = \gamma - \beta - 1, \ \mathfrak{d} = \delta - \gamma - 1, \ \ldots\ldots. \ \mathfrak{m} = \mu - \lambda - 1.$$

Hat man aber die Integralform bereits aufgestellt, so ist es auch nicht schwer zu beurtheilen, ob sie die Erfüllung der Bedingungsgleichungen in sich enthalte, denn die direct mittelst der Mac-Laurin-schen Formel behandelbaren Bestandtheile dienen unmittelbar zur Bestimmung derselben, ferner ob sie der vorgelegten Differentialgleichung oder irgend einer anderen eigenthümlich angehöre; die Beschaffenheit der logarithmischen Transcendenten, zu denen man, die Integrationen ausführend, gelangt, wird zunächst diejenigen Coefficienten der Reihenentwicklung namhaft machen, die unendliche Werthe bekommen, und hieraus wird man den Schluss machen auf die Form der Differentialgleichung, die der hingestellten Integralformel eigenthümlich angehört. Hat man nur einen einzigen Factor $x-\alpha$ im ersten Coefficienten, so fällt auch nur eine einzige Transcendente, die $\log(x-\alpha)$ nämlich, gemeiniglich in das Integral und diese kann man nach Belieben entweder nur in einem einzigen particulären Integrale oder in mehreren solchen, jedoch überall auf dieselbe Weise, d. h. mit derselben Function von x enthalten denken. Hieraus folgt, dass wenn man nur wünscht, das allgemeine Integral zusammenzusetzen aus Bestandtheilen, die der Mac-Laurin'schen Formel nicht widerstreben, man auch nicht nöthig habe, eine grössere Anzahl von unbestimmten Integralzeichen aufzunehmen. Ein einziges reicht zu diesem Zwecke vollkommen hin. Sind wir nämlich durch Integration in Reihenform zu den particulären Integralen gelangt, die beziehlich der $0^{\text{ten}}, 1^{\text{sten}}, \ldots n-2^{\text{ten}}$ Potenz von $x-\alpha$ proportional sind, und haben wir, wie diess gewöhnlich geschieht, in Erfahrung gebracht, dass sie alle den aggregativen logarithmischen Bestandtheil $\eta(x-\alpha)^k \log(x-\alpha)$ besitzen, so fügen wir von diesen particulären Integralen das letzte, das der $n-2^{\text{ten}}$ Potenz proportionale, multiplizirt mit verschiedenen Constanten zu den ersteren hinzu; dadurch eliminirt sich aus ihnen diese Transcendente, und man erhält jedesmal eine neue Folge Genüge leistender Werthe, die ebenfalls beziehlich der $0^{\text{ten}}, 1^{\text{sten}}, \ldots n-3^{\text{ten}}$ Potenz von $x-\alpha$ proportional erscheinen, die aber die directe Reihenentwicklung ohne Anstand zulassen. Wenn daher die Form (43) auch die allgemeine des Integrales ist; so ist doch desswegen die vorletzte der Gleichungen (56) nicht minder geltend. Einer Ausnahme hievon würde man nur begegnen, wenn diess zur Elimination der Transcendente gebrauchte letzte Integral dieselbe gar nicht enthielte, wenn es also laut der erfüllten Bedingungsgleichung $(n-2,r)=0$ direct in Reihenform darstellbar wäre, ein Fall, in welchem dann ein anderes zu diesem Eliminationszwecke zu verwenden sein wird. Verlangt man also von den $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ nichts als Entwickelbarkeit vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel, so bedarf nur ein einziges der particulären Integrale zu seiner

Darstellung eines unbestimmten Integralzeichens, das die Transcendente enthaltende nämlich, und es kann das allgemeine Integral auch in folgender Form wiedergegeben werden:

$$(57)\qquad y = c_1\eta_1 + c_2\eta_2(x-\alpha) + \ldots\ldots + c_{n-1}\eta_{n-1}(x-\alpha)^k + c_n\eta_{n-1}(x-\alpha)^k\int\frac{\eta_n\,dx}{(x-\alpha)^{k-n+2}}.$$

Anders würde die Sache sich verhalten, wenn man $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ wo möglich in geschlossener Form zu besitzen wünscht. In der Unzahl der verschiedenen Gestalten, die diess allgemeine Integral anzunehmen fähig ist, kann es möglicherweise nur eine einzige, ja oft auch gar keine geben, der die Eigenschaft zukommt, aus lauter geschlossenen Ausdrücken in irgend einem Sinne zusammengesetzt zu sein, und es ist bei dem Streben nach geschlossenen Formen ein glücklicher Umstand, dass man die ganze Untersuchung mit der sehr speciellen Frage einleiten kann, ob es wohl irgend ein einziges particuläres Integral der Differentialgleichung gebe, welches vorkommt in geschlossener Form.

Um den in diesem Paragraphe der Betrachtung unterworfenen Hauptfall eines einzigen Factors $x-\alpha$ im ersten Coefficienten vollständig zu erledigen, wird es jetzt noch nothwendig sein, zu erforschen, was es mit der Integration in Reihenform für eine Bewandtniss habe, wenn der zu diesem Factor gehörige Exponent k nicht, wie wir vorausgesetzt, eine ganze negative Zahl, sondern positiv oder gebrochen oder ein Buchstabensymbol ist, oder wenn er zwar ganz und negativ, jedoch numerisch unter der Ordnungszahl der Gleichung gelegen ist. Lassen wir zuvörderst das letztere stattfinden. Die Betrachtung der Gleichungen (3), (4), (5) und (6), die die Werthe der Reihencoefficienten liefern sollen, lehrt dann unmittelbar, dass die erste von ihnen gebe: $y^{(n-1)}$ in Function von $y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \ldots y', y$, als nach diesen Grössen linearen Ausdruck. Die darauffolgende zweite gibt ebenso $y^{(n)}$, die dritte liefert $y^{(n+1)}$ in Function eben derselben analytischen Elemente, und die so geführte Rechnung wird nirgends durch das Erscheinen eines unendlichen Coefficienten unterbrochen. Man erhält daher ohne Anstand in Reihenform die particulären Integrale, die beziehlich der 0ten, 1sten, 2ten, ... $n-2$ten Potenz von $x-\alpha$ proportional sind und nur dasjenige gewinnt man nicht, dem eben das $x-\alpha$ des ersten Coefficienten mit dem ihm zugehörigen, hier ganzen, negativen, numerisch unter der Zahl n liegenden Exponenten $k=-h$ entspricht. Es gibt also hier zwei particuläre Integrale mit dem Factor $(x-\alpha)^k$. Das eine entzieht sich der Mac-Laurin'schen Formel, die übrigen alle bleiben ihr unterthan. Das ist also gewissermassen das Umgekehrte des früher betrachteten Falles, wo der mit $(x-\alpha)^k$ verbundene Genüge leistende Werth darstellbar ist in Reihenform, nicht aber die übrigen. Eine besondere Beachtung verdient der specielle Fall $h=n-1$, dessen schon in der Transformationslehre §. 1 Seite 20 Erwähnung geschah. Da h gezogen ist aus der Formel:

$$(58)\qquad -h = \frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{\mathfrak{X}'_n}\Big\}_\alpha - n + 1,$$

so kommt er dann vor, wenn $\mathfrak{X}_{n-1}\Big\}_\alpha = 0$ ist, wenn also die Anfangscoefficienten der Gleichung 1, 1, oder 1, 1, 1, 0 u. s. w. Factoren $x-\alpha$ aufweisen. Im Allgemeinen gibt dann die Gleichung $y^{(n-2)}$ linear ausgedrückt durch $y^{(n-3)}, y^{(n-4)}, \ldots y', y$. Die darauffolgende zweite liefert aber

in Function von $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, ... y', y oder nach geschehener Substitution des aus der ersten gewonnenen Werthes für $y^{(n-2)}$ ausgedrückt durch $y^{(n-1)}$, $y^{(n-3)}$, $y^{(n-4)}$ ... y', y mit einer in der Constantenreihe ersichtlichen Lücke, in welcher $y^{(n-2)}$ fehlt. Hier ist es also nicht das dem $h = n - 1$ entsprechende, dieser Potenz von $(x - \alpha)$ proportionale particuläre Integral, welches sich der Reihenentwicklung entzieht, sondern vielmehr sein nächster Nachbar, das mit $(x - \alpha)^{n-2}$ verknüpfte. Es kann aber auch das nächst darauffolgende sein, das mit $(x - \alpha)^{n-3}$ anfangende, wenn die ersten drei Reihencoefficienten den Factor $x - \alpha$ gemeinschaftlich haben u. s. w. Beiläufig ebenso verhält sich die Sache, wenn k eine gebrochene Zahl ist. Man bekommt dann particuläre Integrale $n - 1$ an der Zahl ohne Anstand in Reihenform, weil man nirgends bei der ganzen Rechnung auf einen unendlichen Coefficienten stosst, und nur das eine mit dem Nenner $(x - \alpha)^k$ versehene entzieht sich der Reihenentwicklung. Wir werden später sehen, dass man diese durch den einfachen Kunstgriff der Sonderung dieses Nenners dennoch einzuleiten im Stande sei. Auch den Fall, wo k eine ganze positive Zahl ist, vermögen wir an dieser Stelle noch nicht vollständig zu erledigen und bemerken nur vorläufig, dass das mit dem Nenner $(x - \alpha)^k$ versehene particuläre Integral sich der Reihenentwicklung entziehe, und zwar nicht bloss wegen dieses vorhandenen Nenners, weil die Sonderung desselben die Darstellbarkeit in Reihenform noch nicht nothwendig herbeiführt, sondern noch überdiess wegen einer darin enthaltenen Transcendente, wie $\log(x - \alpha)$. Diesem Falle entspricht eine der folgenden verschiedenen Integralformen:

$$y = \frac{\eta_1}{(x-\alpha)^k} \int \eta_2 \, (x-\alpha)^{k-1} \, dx \int \eta_3 \, dx \int \eta_4 \, dx \; \ldots\ldots\ldots \int \eta_n \, dx$$

$$y = \eta_1 \int \frac{\eta_2 \, dx}{(x-\alpha)^{k+1}} \int \eta_3 \, (x-\alpha)^k \, dx \int \eta_4 \, dx \; \ldots\ldots\ldots\ldots \int \eta_n \, dx$$

....

$$y = \eta_1 \int \eta_2 \, dx \int \eta_3 \, dx \; \ldots\ldots\ldots\ldots \int \eta_{n-1} \, dx \int \frac{\eta_n \, dx}{(x-\alpha)^{k+n-1}}.$$

Nur in der ersten von ihnen ist das in Rede stehende particuläre Integral nach erfolgter Sonderung seines Nenners der Reihenentwicklung fähig. In allen übrigen muss sie nothwendigerweise durch das Erscheinen eines unendlichen Coefficienten unterbrochen werden, der von dem vorhandenen logarithmischen Bestandtheile herrührt.

Es ist nur noch übrig, über allgemeine Buchstabenwerthe von k einige Worte zu sagen. Das Erscheinen eines Logarithmus im allgemeinen Integrale ist keineswegs der allgemeine Fall, oder, was dasselbe ist, es ist nicht Regel sondern Ausnahme, weil, wie wir gesehen haben, es gebunden ist an die Bedingung, dass der Exponent k eine entweder ganze positive oder negative Zahl sei. Dadurch, dass k sich als Buchstabengrösse darstellt, welche bei den verschiedenen möglichen Bedeutungen aller der Parameter, die sie enthält, eine grosse Anzahl positiver sowohl als auch negativer ganzer Zahlen, vielleicht auch alle möglichen von $-\infty$ bis $+\infty$ vorstellen kann, vervielfältigen sich die

Fälle, in denen der Logarithmus im Integrale auftritt. Gleichwohl werden sie dadurch noch nicht Regel, sondern bleiben Ausnahme, da zwischen je zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen eine unendliche Menge gebrochener liegt. Nicht so verhält es sich mit derjenigen Form, die man anstatt der logarithmischen zur Vermeidung derselben setzt und die unbestimmte Integralzeichen beherbergt, denn der Logarithmus hört begreiflicherweise auf im Integrale zu erscheinen, wenn k keine ganze Zahl ist. Die mit unbestimmten Integralen versehene Form hingegen wird desshalb doch nicht aufhören giltig zu sein. Man kann daher sagen, dass das sehr gewöhnliche Erscheinen allgemeiner Buchstabenwerthe für k diese mit unbestimmten Integralzeichen ausgerüstete Form zur allgemeinen Regel mache.

Durch die Ergebnisse dieses Paragraphes hat sich unser Gesichtskreis abermals erweitert, insoferne als wir eine neue Bedeutung der einfachen Factoren des ersten Coefficienten kennen gelernt haben, die gelegentlich auch auf logarithmische Transcendenten und zwar reelle oder imaginäre, also auf Logarithmen und Kreisbögen hinzudeuten vermögen. Man erlangt jedoch von solchen Vorkommnissen nicht auf die leichte Weise Kunde, mit der man andere charakteristische Eigenschaften der particulären Integrale, die zu ihrer Sonderung dienen und Gegenstand der Formenlehre sind, entdeckt. Man muss vielmehr bereits wirklich integriren, und zwar in Form von aufsteigenden Reihen. Hiedurch gewinnt aber die Integration in Reihenform für uns einen ganz besonderen Werth, den man ihr nicht angesehen hätte auf den ersten Blick, aber nicht in denjenigen Fällen, in welchen sich eine solche Integration ohne Schwierigkeit durchführen lässt, und auch erwiesenermassen zu convergirenden Reihen führt, nämlich nach aufsteigenden Potenzen solcher Grössen, wie $x-\alpha$, die in den ersten Gleichungscoefficienten nicht als Factor eingehen, sondern gerade in den Ausnahmsfällen, wo die Mac-Laurin'sche Formel ihren Dienst verweigert.

Da es also gerade die Ausnahmsfälle sind, die über die besondere Beschaffenheit des Integrales Aufschluss geben, so sehen wir uns veranlasst, sie sorgfältig durchzugehen und aufmerksam in ihrer vollen Bedeutung zu verfolgen. Der nächste Paragraph soll daher die Untersuchungen des gegenwärtigen vervollständigen und allgemein in allen Fällen, d. h. für jeden Bau der Coefficienten aus Factoren $x-\alpha$ die Art angeben, in welcher logarithmische Transcendenten im Integrale entweder wirklich vorkommen, oder auch nur gelegentlich vorzukommen vermögen, sammt der damit in Verbindung stehenden Zusammensetzung aus unbestimmten Integralen. Da aber zudem noch in den hier besprochenen Ausnahmsfällen der Integration in Reihenform sehr oft der Vorwurf nicht mehr gemacht werden kann, dass die gewonnenen Reihen nur zwischen sehr engen Grenzen convergiren, da im Gegentheile die Convergenz oft gerade so wie bei der Exponentialreihe, oder derjenigen für den Sinus oder Cosinus für beliebige Werthe der Variablen nachgewiesen werden kann, so fällt unter solchen Umständen auch der Vorwurf der Undurchsichtigkeit meistentheils von selbst weg, und wir sehen uns veranlasst, die auf solche Weise wichtig gewordene Darstellung des allgemeinen Integrales in Reihenform einer besonderen Beachtung in einem folgenden dritten Paragraphe zu würdigen, und zu diesem Zwecke auf Grundlage der ermittelten Form passende Methoden aufzustellen.

§. 2.

Integration in Form von aufsteigenden Reihen.

(Fortsetzung.)

Wir haben im nächstvorhergehenden Paragraphe den am häufigsten wiederkehrenden Ausnahmsfall ins Auge gefasst, wo der erste Differentialgleichungs-Coefficient einen einzelnen unwiederholten Factor $x-\alpha$ birgt, und die analytischen Erscheinungen zu deuten gesucht, die sich bei der Entwicklung des Integrales nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ darbiethen. Gegenwärtig wollen wir auch den anderen, wenn auch seltener vorkommenden Fällen unsere Aufmerksamkeit schenken, wo die Anfangscoefficienten $2, 1, 0$ oder $3, 2, 1, 0$, oder allgemein $r, r-1, \ldots\ldots 2, 1, 0$ solche Factoren bergen. Wir fangen bei dem ersten und einfachsten derselben an, setzen daher voraus, dass in der Gleichung (1) des vorhergehenden Paragraphes:

$$\mathfrak{X}_n = (x-\alpha)^2 \underset{n}{\mathfrak{X}}, \qquad \mathfrak{X}_{n-1} = (x-\alpha) \underset{n-1}{\mathfrak{X}} \tag{60}$$

sei. Wir bleiben ferner bei der Annahme, dass $\mathrm{y}, \mathrm{y}', \ldots\ldots \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \ldots\ldots \mathbf{X}_n$ dasjenige bedeute, was aus $y, y', \ldots\ldots, \mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \ldots\ldots \mathfrak{X}_n$ wird, wenn man dem x den besonderen Werth α beilegt; dass man dem gemäss unter der gegenwärtigen Voraussetzung habe:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n &= \mathbf{X}'_n = \mathbf{X}_{n-1} = 0 \\ \mathbf{X}''_n &= 2\underset{n}{\mathbf{X}}, \qquad \mathbf{X}'_{n-1} = \underset{n-1}{\mathbf{X}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{X}^{(p)}_n &= p\,(p-1)\,\underset{n}{\mathbf{X}}^{(p-2)}, \qquad \mathbf{X}^{(p)}_{n-1} = p\,\underset{n-1}{\mathbf{X}}^{(p-1)}. \end{aligned} \tag{61}$$

Unsere Differentialgleichung ist daher jetzt:

$$(x-\alpha)^2 \underset{n}{\mathfrak{X}} \cdot y^{(n)} + (x-\alpha) \underset{n-1}{\mathfrak{X}} y^{(n-1)} + \mathfrak{X}_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_1 y' + \mathfrak{X}_0 y = 0, \tag{62}$$

und die Gleichungen (3), (4), (5) und (6), die wir zur Bestimmung von $\mathrm{y}^{(n)}, \mathrm{y}^{(n+1)}, \ldots \mathrm{y}^{(n+r)}$ benützten, werden, wenn auch in etwas anderer Weise, auch hier noch zu dem ähnlichen Zwecke dienen. Zwei Anfangsglieder einer jeden derselben erhalten nämlich, gemäss den gemachten Voraussetzungen, den Factor Null. Streicht man sie dem zufolge, so liegt in einem solchen Verfahren bereits die stillschweigende Voraussetzung, dass der andere Factor, der jedesmal ein Differentialquotient von y genommen für $x=\alpha$ ist, einen unendlichen Werth anzunehmen nicht vermöge. Da ferner jetzt, nach den Ergebnissen der Formenlehre, das allgemeine Integral vorkömmt in folgender Gestalt:

$$y = c_0 y_0 + c_1 y_1 (x-\alpha) + c_2 y_2 (x-\alpha)^2 + \ldots\ldots + c_{n-3} y_{n-3} (x-\alpha)^{n-3} + c_{n-2} \frac{y_{n-2}}{(x-\alpha)^{k_1}} + c_{n-1} \frac{y_{n-1}}{(x-\alpha)^{k_2}}, \tag{63}$$

allwo k_1 und k_2 die Wurzeln sind der Gleichung des zweiten Grades t.

$$\left.\frac{\mathfrak{X}_n}{(x-\alpha)^2}(k+n-1)(k+n-2) - \frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{x-\alpha}(k+n-2) + \mathfrak{X}_{n-2}\right\}_{\alpha} = 0, \tag{64}$$

oder was dasselbe ist:

$$\underset{n}{\mathrm{X}}(k+n-1)(k+n-2) - \underset{n-1}{\mathrm{X}}(k+n-2) + \mathrm{X}_{n-2} = 0, \tag{65}$$

folglich zwei dem Unendlichwerden ausgesetzte Bestandtheile hat, die beiden letzten nämlich; so heisst die oberwähnten zwei Glieder streichen auch noch mit anderen Worten, $c_{n-2} = c_{n-1} = 0$ setzend, zwei particuläre Integrale wegwerfen. Und wirklich führt die auf solche Weise eingeleitete Rechnung nicht zu einem Werthe von y mit n willkührlichen Constanten, sondern nur mit $n-2$ solchen; denn legen wir uns die Gleichungen (3), (4), (5) und (6) auf die angedeutete Weise bereits verkürzt vor, — so sind:

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}_{n-2}\,\mathrm{y}^{(n-2)} + \mathrm{X}_{n-3}\,\mathrm{y}^{(n-3)} + \dots\dots\dots + \mathrm{X}_1\,\mathrm{y}' + \mathrm{X}_0\,\mathrm{y} = 0, \tag{66}$$

$$\mathrm{P}' = \left[\mathrm{X}_{n-2} + \underset{n-1}{\mathrm{X}}\right]\mathrm{y}^{(n-1)} + \left[\mathrm{X}_{n-3} + \mathrm{X}'_{n-2}\right]\mathrm{y}^{(n-2)} + \dots\dots\dots + \left[\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}'_2\right]\mathrm{y}'' + \left[\mathrm{X}_0 + \mathrm{X}'_1\right]\mathrm{y}' + \mathrm{X}'_0\,\mathrm{y} = 0. \tag{67}$$

$$\mathrm{P}'' = \left[\mathrm{X}_{n-2} + 2\underset{n-1}{\mathrm{X}} + 2\underset{n}{\mathrm{X}}\right]\mathrm{y}^{(n)} + \left[\mathrm{X}_{n-3} + 2\mathrm{X}'_{n-2} + 2\underset{n-1}{\mathrm{X}'}\right]\mathrm{y}^{(n-1)} + \left[\mathrm{X}_{n-4} + 2\mathrm{X}'_{n-3} + \mathrm{X}''_{n-2}\right]\mathrm{y}^{(n-2)} + \dots + \left[\mathrm{X}_0 + 2\mathrm{X}'_1 + \mathrm{X}''_2\right]\mathrm{y}'' + \left[2\mathrm{X}'_0 + \mathrm{X}''_1\right]\mathrm{y}' + \mathrm{X}''_0\,\mathrm{y} = 0. \tag{68}$$

....

$$\mathrm{P}^{(r)} = \left[\mathrm{X}_{n-2} + 1\binom{r}{1}\underset{n-1}{\mathrm{X}} + 1.2\binom{r}{2}\underset{n}{\mathrm{X}}\right]\mathrm{y}^{(n+r-2)} + \left[\mathrm{X}_{n-3} + \binom{r}{1}\mathrm{X}'_{n-2} + 2\binom{r}{2}\underset{n-1}{\mathrm{X}'} + 2.3\binom{r}{3}\underset{n}{\mathrm{X}'}\right]\mathrm{y}^{(n+r-3)} + \left[\mathrm{X}_{n-4} + \binom{r}{1}\mathrm{X}'_{n-3} + \binom{r}{2}\mathrm{X}''_{n-2} + 3\binom{r}{3}\underset{n-1}{\mathrm{X}''} + 3.4\binom{r}{4}\underset{n}{\mathrm{X}''}\right]\mathrm{y}^{(n+r-4)} + \dots + \mathrm{X}^{(r)}_0\,\mathrm{y} = 0; \tag{69}$$

so gewahrt man alsobald, dass die erste von ihnen liefere $\mathrm{y}^{(n-2)}$ in linearer Function von $\mathrm{y}^{(n-3)}$, $\mathrm{y}^{(n-4)}$, ... y', y und zwar gebrochen durch $\underset{n-2}{\mathrm{X}} = \mathrm{M}_0$. Die nächstfolgende gibt dann mit Hilfe der vorhergehenden $\mathrm{y}^{(n-1)}$ in linearer Function eben derselben Grössen und gebrochen durch das Produkt:

$$\mathrm{X}_{n-2}\left(\mathrm{X}_{n-2} + \underset{n-1}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{M}_1. \tag{70}$$

Die dritte führt zu einem eben so gestalteten Werthe mit Hilfe der beiden ersten, der aber bereits gebrochen ist durch das Produkt aus drei Factoren:

$$\mathrm{X}_{n-2}\left(\mathrm{X}_{n-2} + \underset{n-1}{\mathrm{X}}\right)\left(\mathrm{X}_{n-2} + 2\underset{n-1}{\mathrm{X}} + 1.2\underset{n}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{M}_2, \tag{71}$$

und so gewahrt man jedesmal beim Uebergange von einer der Bestimmungsgleichungen zur nächstfolgenden den Zuwachs von einem dreigliedrigen Factor im Nenner, bis man zur $P^{(r)} = 0$ gelangt, die den Werth gibt von $y^{(n+r-2)}$, der so wie die anderen linear ist nach $y^{(n-3)}, y^{(n-4)}, \ldots\ldots y', y$ und gebrochen durch das Produkt aus $r+1$ Factoren:

$$X_{n-2}\,(X_{n-2} + \underset{n-1}{X})\,(X_{n-2} + 2\underset{n-1}{X} + 1.2\underset{n}{X}) \,\ldots\ldots\, (X_{n-2} + r\underset{n-1}{X} + r(r-1)\underset{n}{X}) = M_r \tag{72}$$

von denen zu bemerken kommt, dass sie alle aus dem letzten hervorgehen, indem man der Zahl r alle möglichen ganzen positiven Werthe von 0 bis r anweist. Besagten Werth von $y^{(n+r-2)}$ geben wir jetzt wieder in der im vorigen Paragraphe bereits gebrauchten Bezeichnung, setzend:

$$M_r\, y^{(n+r-2)} = (0,r)\, y + (1,r)\, y' + \ldots\ldots + (n-3,r)\, y^{(n-3)}, \tag{73}$$

und stellen mit Hilfe derselben den auf diesem Wege erhaltenen Werth von y hin in der folgenden, bereits bekannten Gestalt, indem wir nach $y, y', \ldots\ldots y^{(n-3)}$ das Rechnungsresultat ordnen:

$$\begin{aligned} y = \;& y\left[1 + \frac{(0,0)}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{1\ldots(n-2)} + \frac{(0,1)}{M_1}\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\right] \\ & + y'\left[\frac{(x-\alpha)}{1} + \frac{(1,0)}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{1\ldots(n-2)} + \frac{(1,1)}{M_1}\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\right] \\ & + y''\left[\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \frac{(2,0)}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{1\ldots(n-2)} + \frac{(2,1)}{M_1}\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + y^{(n-3)}\left[\frac{(x-\alpha)^{n-3}}{1\ldots(n-3)} + \frac{(n-3,0)}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{1\ldots(n-2)} + \frac{(n-3,1)}{M_1}\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\right] \end{aligned} \tag{74}$$

Diese Formel stellt nicht das allgemeine Integral dar, weil man darin nicht n, sondern nur $n-2$ willkührliche Constanten gewahrt. Man hat also nicht den Werth von y errungen, den die Vorschriften der Formenlehre andeuten, und der in die Gleichung (63) niedergelegt ist, sondern nur einen Theil desselben, nämlich den:

$$y = c_0 y_0 + c_1 y_1 (x-\alpha) + c_2 y_2 (x-\alpha)^2 + \ldots\ldots\ldots + c_{n-3} y_{n-3} (x-\alpha)^{n-3}, \tag{75}$$

und die zwei letzten particulären Integrale mit den Constanten c_{n-2} und c_{n-1}, denen die 2, 1, 0 Factoren der Anfangscoefficienten entsprechen, haben sich der Entwicklung in Reihen mittelst der Mac-Laurin'schen Formel entzogen. Diess alles ist jedoch nur so lange richtig, als in der Rechnung keine unendlichen Coefficientenwerthe erscheinen; so lange also keines der Symbole $\frac{(s,r)}{M_r}$ die Nulle im Nenner hat, oder mit anderen Worten, so lange der dreigliedrige Ausdruck:

$$X_{n-2} + r\underset{n-1}{X} + r(r-1)\underset{n}{X} \tag{76}$$

für gar kein ganzes positives r, die Nulle mit eingeschlossen, verschwinden kann. Vergleicht man ihn mit dem Polynome der algebraischen Gleichung (65), deren Wurzeln die Exponenten k_1 und k_2 sind,

so sieht man alsogleich, dass er für $r = -k - n + 2$ sich in dieses Polynom verwandle, das für $k = k_1$ und $k = k_2$ verschwindet. Man wird daher bei irgend einer Coefficientengruppe einen verschwindenden Nenner haben können, wenn entweder $r = r_1 = -k_1 - n + 2$ oder $r = r_2 = -k_2 - n + 2$ eine ganze positive Zahl oder Null ist, was wieder nur dann stattfindet, wenn irgend einer der Exponenten k_1 und k_2 oder auch beide ganzen negative Zahlen, etwa $-h_1$ und $-h_2$ sind, die numerisch nicht unter $n-2$ fallen, die letzten zwei particulären Integrale also nicht die Nenner $(x-\alpha)^{k_1}$ und $(x-\alpha)^{k_2}$ besitzen, sondern vielmehr mit den Factoren $(x-\alpha)^{h_1}$ und $(x-\alpha)^{h_2}$ versehen sind. Solche Factoren entziehen bekanntlich an und für sich den damit behafteten Ausdruck der Herrschaft der Mac-Laurin'schen Formel nicht, nur werden die Anfangsglieder der Entwicklung erst von dem $(h_1+1)^{\text{sten}}$ und $(h_2+1)^{\text{sten}}$ Gliede von Null verschieden ausfallen, ein Erscheinen der zwei particulären Integrale, die die Rechnung anfänglich zu verweigern schien, ist daher im ferneren Verfolge derselben zu erwarten. Wir finden uns desshalb veranlasst, zu untersuchen, ob und wie ein solches erfolge unter den angedeuteten Umständen. Wir nehmen also an, die (65) habe entweder eine ganze negative Wurzel $-h_1$, oder besitze deren sogar zwei: $-h_1$ und $-h_2$, wo wir dann $h_1 \leqq h_2$ voraussetzen wollen. In der zur Formel (74) führenden Rechnung biethet sich dann anfänglich keine Schwierigkeit, allein wie man zur Gleichung: $P^{(r)} = 0$ gelangt, gewahrt man die Nulle als Coefficienten des daraus zu bestimmenden $y^{(n+r-2)}$, unter r die Zahl $h_1 - n + 2$ verstanden. Das $y^{(h_1)}$ bekommt also den verschwindenden Coefficienten M_r und sein Werth, wie er durch die (73) gegeben ist, wird unendlich, und zwar so, dass alle darin vorkommenden Symbole $\frac{(0,r)}{M_r}, \frac{(1,r)}{M_r}, \ldots\ldots \frac{(n-3,r)}{M_r}$ die in der Formel (74) eine Verticalreihe von Coefficienten bilden, unendliche Werthe erhalten. Diess hat dann offenbar ein ähnliches Unendlichwerden von $y^{(h_1+1)}$, $y^{(h_1+2)}$, ... zur Folge. Die in der (74) enthaltenen, particuläre Integrale $n-2$ an der Zahl vorstellenden Reihen werden also unbrauchbar und es scheint, als habe ein einzelnes, die Gestalt $y_{k_1}(x-\alpha)^{h_1}$ tragende particuläre Integral bloss durch seine Existenz die übrigen der Herrschaft der Mac-Laurin'schen Formel entzogen. Sucht man nun nach den Mitteln, dem störenden Unendlichwerden von $y^{(h_1)}$ zu entgehen, so verfällt man zuerst auf das Verschwindenlassen der willkührlichen Constanten $y, y', \ldots\ldots y^{(n-2)}$. In Folge desselben bekommt $y^{(h_1)}$ den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$. Die Gleichung $P^{(r)} = 0$, aus der es gezogen ist, oder was dasselbe ist die (73), dient zu seiner Bestimmung nicht mehr und ist für jedes $y^{(h_1)}$ identisch erfüllt. Die darauffolgenden $P^{(r+1)} = 0$, $P^{(r+2)} = 0$, ... liefern $y^{(h_1+1)}$, $y^{(h_1+2)}$, ... in Function von $y^{(h_1)}$ und beziehlich gebrochen durch:

$$N_1 = (h_1-n+3)(h_1-n+2)\underset{n}{X} + (h_1-n+3)\underset{n-1}{X} + X_{n-2}, \tag{77}$$

$$\begin{aligned} N_2 = \Big[(h_1-n+3)(h_1-n+2)\underset{n}{X} + (h_1-n+3)\underset{n-1}{X} + X_{n-2}\Big] \times \\ \times \Big[(h_1-n+4)(h_1-n+3)\underset{n}{X} + (h_1-n+4)\underset{n-1}{X} + X_{n-2}\Big]. \end{aligned} \tag{78}$$

....

Das $(n-1)^{\text{ste}}$ particuläre Integral taucht also, wie zu erwarten war, in der Rechnung auf in der Form

$$y^{(h_1)}\left[\frac{(x-\alpha)^{h_1}}{1\ldots h_1}+\frac{(h_1,\,h_1-n+3)}{N_1}\,\frac{(x-\alpha)^{h_1+1}}{1\ldots(h_1+1)}+\frac{(h_1,\,h_1-n+4)}{N_2}\,\frac{(x-\alpha)^{h_1+2}}{1\ldots(h_1+2)}+\ldots\right].$$

Dafür sind aber die übrigen, sonst in der (74) enthaltenen weggeworfen worden, so dass sich jetzt die Rechnung mit der Entwicklung eines einzigen Genüge leistenden Werthes beschäftigt. Diese gelingt dann auch ohne fernere Unterbrechung, wenn $-h_1$ die einzige ganze negative Wurzel der (65) ist; wird hingegen durch ein abermaliges Erscheinen eines unendlichen Coefficientenwerthes unterbrochen, wenn es eine zweite Wurzel $-h_2$ dieser Art gibt, und $h_2 > h_1$ ist. Und zwar wird die Gleichung $P^{(h_2-n+3)}=0$, welche sonst zur Bestimmung von $y^{(h_2)}$ dient, diesen Dienst jetzt versagen, weil die zu bestimmende Grösse in derselben abermals den Factor Null bekommt, sohin einen unendlichen Werth erhalten würde, wenn man nicht auch $y^{(h_1)}=0$ statuirte. Diess heisst aber nichts anderes, als auch das $(n-1)^{\text{ste}}$ particuläre Integral (79) wegwerfen, nach dessen Beseitigung allerdings $y^{(h_2)}$ unbestimmt bleibt, und als neue Integrationsconstante in der Rechnung auftritt, $y^{(h_2+1)}$, $y^{(h_2+2)}$, ... aber demselben proportionale Werthe annehmen, die beziehlich gebrochen sind durch:

$$L_1 = (h_2-n+3)\,(h_2-n+2)\,\underset{n}{X} + (h_2-n+3)\,\underset{n-1}{X} + X_{n-2}$$

$$\begin{aligned}L_2 = &\left[(h_2-n+3)\,(h_2-n+2)\,\underset{n}{X} + (h_2-n+3)\,\underset{n-1}{X} + X_{n-2}\right]\times\\ &\times\left[(h_2-n+4)\,(h_2-n+3)\,\underset{n}{X} + (h_2-n+4)\,\underset{n-1}{X} + X_{n-2}\right]\end{aligned}$$

....

die Rechnung daher mit der Entwicklung eines einzigen n^{ten} particulären Integrales beschäftigt ist in der Reihengestalt:

$$y^{(h_2)}\left[\frac{(x-\alpha)^{h_2}}{1\ldots h_2}+\frac{(h_2,\,h_2-n+3)}{L_1}\,\frac{(x-\alpha)^{h_2+1}}{1\ldots(h_2+1)}+\frac{(h_2,\,h_2-n+4)}{L_2}\,\frac{(x-\alpha)^{h_2+2}}{1\ldots(h_2+2)}+\ldots\right]$$

in der sich gar keine unendlichen Coefficienten mehr vorfinden können. Nur dieses letzte n^{te}, mit dem der Gradzahl nach am höchsten stehenden Factor $(x-\alpha)^{h_2}$ versehene particuläre Integral ist daher der ungestörten Reihenentwicklung vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel fähig und scheint durch sein Dasein dem anderen dem $(x-\alpha)^{h_1}$ proportionalen particulären Integrale die gleiche Entwicklungsfähigkeit zu entziehen, welches letztere dann wieder auf die übrigen $n-2$ an der Zahl denselben Einfluss übt. Die Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphes lassen vermuthen, dass diess alles durch gewisse Transcendenten $log\,(x-\alpha)$, $log^2\,(x-\alpha)$ veranlasst werde und es kommt uns zu, über die Art und Weise ihres Vorhandenseins zunächst Aufschluss zu suchen.

Wir schlagen zu diesem Zwecke den kürzesten Weg ein, unsere Aufmerksamkeit wieder auf die aus unbestimmten Integralen zusammengesetzten Formen lenkend. Da sich nämlich, wie wir eben dargethan haben, jederzeit wenigstens Ein particuläres Integral, das mit dem höchsten Factor $(x-\alpha)^{h_2}$ verknüpfte nämlich, ohne Anstand ergibt in Reihenform; so setzen wir es in irgend einer

z. B. dieser Reihenform selbst berechnet voraus und befreien die Differentialgleichung von demselben allein nicht vermittelst der Substitutionsgleichung:

$$y = \eta_1 (x-\alpha)^{k_1} \int z dx,$$

in welcher $\eta_1 (x-\alpha)^{k_1}$ eben dieses ermittelte particuläre Integral darstellt, weil sie, wie schon a einem anderen Orte bemerkt wurde, zu gar zu vielen Factoren $(x-\alpha)$ in den Coefficienten der trans formirten Gleichung Veranlassung gibt, sondern vermittelst der anderen vortheilhafteren, bereits ir vorhergehenden Paragraphe geübten:

$$y = \eta_1 (x-\alpha)^{k_1} \int \frac{u dx}{(x-\alpha)^{k_1+1}}. \tag{83}$$

Die daraus hervorgehende Transformirte in u ist eben die (49) von §. 1. Sie muss jedoch nach ge höriger Substitution der hier geltenden Coefficientenwerthe (60) nach Potenzen von $x-\alpha$ neu geord net werden, und es hat dasselbe auch mit der identischen Gleichung in η, der (46) nämlich, zu ge schehen. Diess durchgeführt ergibt die folgenden zwei Gleichungen in η und u:

$$\begin{aligned}
0 = \quad & (x-\alpha)^n \cdot \underset{n}{\mathfrak{X}} \eta^{(n)} + \\
& + (x-\alpha)^{n-1} \left[\binom{n}{1} h \underset{n}{\mathfrak{X}} + \underset{n-1}{\mathfrak{X}}\right] \eta^{(n-1)} + \\
& + (x-\alpha)^{n-2} \left[\left[\binom{n}{2} h(h-1) \underset{n}{\mathfrak{X}} + \binom{n-1}{1} h \underset{n-1}{\mathfrak{X}} + \mathfrak{X}_{n-2}\right] \eta^{(n-2)} + \mathfrak{X}_{n-3} \eta^{(n-3)} + \ldots\ldots + \mathfrak{X}_0 \eta \right. \\
& + (x-\alpha)^{n-3} h \left[\left[\binom{n}{3} (h-1)(h-2) \underset{n}{\mathfrak{X}} + \binom{n-1}{2} (h-1) \underset{n-1}{\mathfrak{X}} + \binom{n-2}{1} \mathfrak{X}_{n-2}\right] \eta^{(n-3)} \right. \\
& \qquad + (n-3) \mathfrak{X}_{n-3} \eta^{(n-4)} + \ldots\ldots + \mathfrak{X}_1 \eta \Big] + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (x-\alpha)^2 . h(h-1)\ldots(h-n+5) \left[\left[\binom{n}{2} (h-n+4)(h-n+3) \underset{n}{\mathfrak{X}} + \binom{n-1}{2} (h-n \right.\right. \\
& \qquad + \binom{n-2}{2} \mathfrak{X}_{n-2}\Big] \eta'' + \binom{n-3}{1} \mathfrak{X}_{n-3} \eta' + \\
& + (x-\alpha) . h(h-1)\ldots(h-n+4) \left[\left[\binom{n}{1} (h-n+3)(h-n+2) \underset{n}{\mathfrak{X}} + \binom{n-1}{1} (h- \right.\right. \\
& \qquad + \binom{n-2}{1} \mathfrak{X}_{n-2}\Big] \eta' + \mathfrak{X}_{n-3} \eta \Big] +
\end{aligned} \tag{84}$$

$$0 = u^{(n-1)} \cdot (x-\alpha)^{n+1} \cdot \underset{n}{\mathfrak{X}}\eta +$$

$$+ u^{(n-2)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (x-\alpha)^{n} \cdot \left[(h-n+1)\underset{n}{\mathfrak{X}} + \underset{n-1}{\mathfrak{X}}\right]\eta + \\ + (x-\alpha)^{n+1} \cdot n\underset{n}{\mathfrak{X}}\eta' \end{array} \right\} +$$

$$+ u^{(n-3)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (x-\alpha)^{n-1} \cdot \left[(h-n+2)(h-n+1)\underset{n}{\mathfrak{X}} + (h-n+2)\underset{n-1}{\mathfrak{X}} + \mathfrak{X}_{n-2}\right]\eta + \\ + (x-\alpha)^{n} \cdot \left[n(h-n+2)\underset{n}{\mathfrak{X}} + (n-1)\underset{n-1}{\mathfrak{X}}\right]\eta' + \\ + (x-\alpha)^{n+1} \cdot \binom{n}{2}\underset{n}{\mathfrak{X}}\eta'' \end{array} \right\} +$$

....

....

....

$$+ u^{(s)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (x-\alpha)^{s+2} \cdot (h-s-1)(h-s-2) \ldots\ldots\ldots\ldots (h-n+3) \times \\ \qquad \times \left[(h-n+2)(h-n+1)\underset{n}{\mathfrak{X}} + (h-n+2)\underset{n-1}{\mathfrak{X}} + \mathfrak{X}_{n-2}\right]\eta + \\ + (x-\alpha)^{s+3} \cdot (h-s-1)(h-s-2) \ldots\ldots\ldots\ldots (h-n+4) \times \\ \quad \times \left[\left[n(h-n+3)(h-n+2)\underset{n}{\mathfrak{X}} + (n-1)(h-n+3)\underset{n-1}{\mathfrak{X}} + (n-2)\mathfrak{X}_{n-2}\right]\eta' + \mathfrak{X}_{n-3}\eta\right] + \\ + (x-\alpha)^{s+4} \cdot (h-s-1)(h-s-2) \ldots\ldots\ldots\ldots (h-n+5) \times \\ \quad \times \left[\begin{array}{l} \left[\binom{n}{2}(h-n+4)(h-n+3)\underset{n}{\mathfrak{X}} + \binom{n-1}{2}(h-n+4)\underset{n-1}{\mathfrak{X}} + \binom{n-2}{2}\mathfrak{X}_{n-2}\right]\eta'' + \\ \qquad + (n-3)\mathfrak{X}_{n-3}\eta' + \mathfrak{X}_{n-4}\eta \end{array} \right] + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (x-\alpha)^{n-1} \cdot \left[\begin{array}{l} \left[\binom{n}{s+3}(h-s-1)(h-s-2)\underset{n}{\mathfrak{X}} + \binom{n-1}{s+2}(h-s-1)\underset{n-1}{\mathfrak{X}} + \right. \\ \quad \left. + \binom{n-2}{s+1}\mathfrak{X}_{n-2}\right]\eta^{(n-s-3)} + \binom{n-3}{s+1}\mathfrak{X}_{n-3}\eta^{(n-s-4)} + \ldots + \mathfrak{X}_{s+1}\eta \end{array} \right] + \\ + (x-\alpha)^{n} \cdot \left[\binom{n}{s+2}(h-s-1)\underset{n}{\mathfrak{X}} + \binom{n-1}{s+1}\underset{n-1}{\mathfrak{X}}\right]\eta^{(n-s-2)} + \\ + (x-\alpha)^{n+1}\binom{n}{s+1}\underset{n}{\mathfrak{X}}\eta^{(n-s-1)} \end{array} \right\} +$$

....

....

....

$$
+u\left\{\begin{aligned}
&(x-\alpha)^2 (h-1)(h-2)\ldots\ldots(h-n+3)\times\\
&\quad\times\left[(h-n+2)(h-n+1)\mathfrak{X}_n+(h-n+2)\mathfrak{X}_{n-1}+\mathfrak{X}_{n-2}\right]\eta+\\
&+(x-\alpha)^3 (h-1)(h-2)\ldots\ldots(h-n+4)\times\\
&\quad\times\left[\left[n.(h-n+3)(h-n+2)\mathfrak{X}_n+(n-1)(h-n+3)\mathfrak{X}_{n-1}+(n-2)\mathfrak{X}_{n-2}\right]\eta'+\mathfrak{X}_{n-3}\eta\right]+\\
&+(x-\alpha)^4 (h-1)(h-2)\ldots\ldots(h-n+5)\times\\
&\quad\times\left[\left[\binom{n}{2}.(h-n+4)(h-n+3)\mathfrak{X}_n+\binom{n-1}{2}(h-n+4)\mathfrak{X}_{n-1}+\binom{n-2}{2}\mathfrak{X}_{n-2}\right]\eta''+\right.\\
&\qquad\left.+\binom{n-3}{1}\mathfrak{X}_{n-3}\eta'+\mathfrak{X}_{n-4}\eta\right]+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(x-\alpha)^{n-1}\left[\left[\binom{n}{3}(h-1)(h-2)\mathfrak{X}_n+\binom{n-1}{2}(h-1)\mathfrak{X}_{n-1}+(n-2)\mathfrak{X}_{n-2}\right]\eta^{(n-3)}+\right.\\
&\qquad\left.+(n-3)\mathfrak{X}_{n-3}\eta^{(n-4)}+\ldots\ldots+\mathfrak{X}_1\eta\right]+\\
&+(x-\alpha)^n\left[\binom{n}{2}(h-1)\mathfrak{X}_n+(n-1)\mathfrak{X}_{n-1}\right]\eta^{(n-2)}+\\
&+(x-\alpha)^{n+1}.\,n\,\mathfrak{X}_n\eta^{(n-1)}
\end{aligned}\right.
$$

Da die erste von ihnen die in η durch den ermittelt gedachten Werth dieser Grösse tisch erfüllt sein soll, so müssen offenbar vor allem anderen diejenigen Glieder, in welchen man Factor $x-\alpha$ sieht, d. h. die

$$(h-n+2)(h-n+1)\mathfrak{X}_n+(h-n+2)\mathfrak{X}_{n-1}+\mathfrak{X}_{n-2}$$

mindestens Einen solchen erhalten, nachdem sie sonst die übrigen, mit diesem Factor vers zuheben nicht im Stande wären. Kraft der (65) erweist sich diess als vollkommen richtig zu ihnen die der ersten Potenz von $x-\alpha$ proportionalen hinzu, so muss aus demselbe Summe mindestens durch $(x-\alpha)^2$ theilbar sein u. s. w., bis nach hinzugefügtem letzt ganze identisch verschwindende Polynom vorliegt. Betrachtet man, diess vorausgesetzt, ten der Gleichung in u, so bemerkt man in dem ersten derselben den Factor $(x-\alpha)^n$ ist auf dieselbe Weise $(x-\alpha)^n$ unmittelbar ersichtlich; die darauffolgenden übrige mit Rücksicht auf die eben besprochene Art und Weise, wie die Gleichung in η iden falls diesen gemeinsamen Factor $(x-\alpha)^n$, so dass also die ganze Gleichung durch erscheint, und wirklich dividirt in ihrem ersten Coefficienten nur einen einzigen Fa hält, sohin sich in eine derjenigen ähnliche verwandelt, die wir im vorhergehend umständlicheren Untersuchung unterworfen haben. Es wäre nun zunächst der gev zeigte Exponent anzugeben, der diesem im ersten Coefficienten übrig bleibend

spricht. Wir wissen von ihm, dass er in einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung, deren Anfangscoefficienten $\mathfrak{X}_n$ und $\mathfrak{X}_{n-1}$ sind, unter solchen Umständen den Werth:

$$k = \frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{\mathfrak{X}_n}(x-\alpha)\Big\}_\alpha - n + 1$$

annehme. Passen wir jetzt diese Formel der Gleichung in u an, $\mathfrak{X}_n$ in $\eta \underset{n}{\mathfrak{X}}(x-\alpha)$, $\mathfrak{X}_{n-1}$ hingegen in $\eta \underset{n}{\mathfrak{X}}(h_1 - n + 1) + \eta \underset{n-1}{\mathfrak{X}} + n\eta' \underset{n}{\mathfrak{X}}(x-\alpha)$ und n in $n-1$ verwandelnd, so wird hier:

$$k = \frac{\underset{n-1}{\mathbf{X}}}{\underset{n}{\mathbf{X}}} + h_1 - 2n + 3. \tag{86}$$

Man erinnere sich nun, dass $-h_1$ und $-h_2$ die vorausgesetzten ganzen negativen Wurzeln der (65) seien. Entwickelt und geordnet nach Potenzen von k nimmt sie die Gestalt an:

$$k^2 + \left(2n - 3 - \frac{\underset{n-1}{\mathbf{X}}}{\underset{n}{\mathbf{X}}}\right)k + (n-1)(n-2) - (n-2)\frac{\underset{n-1}{\mathbf{X}}}{\underset{n}{\mathbf{X}}} + \frac{\underset{n-2}{\mathbf{X}}}{\underset{n}{\mathbf{X}}} = 0. \tag{87}$$

Der erste Coefficient ist bekanntlich die Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen, folglich hat man:

$$h_1 + h_2 = 2n - 3 - \frac{\underset{n-1}{\mathbf{X}}}{\underset{n}{\mathbf{X}}}, \qquad \text{also} \qquad \frac{\underset{n-1}{\mathbf{X}}}{\underset{n}{\mathbf{X}}} = 2n - 3 - h_1 - h_2,$$

und hieraus, mit Rücksicht auf die (86):

$$k = -h_2.$$

Es hat also die Gleichung in u ein particuläres Integral mit dem Factor $(x-\alpha)^{h_2}$, und da wir aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphes wissen, dass die aus unbestimmten Integralen zusammengefügte Hauptform des allgemeinen Integrales einer ähnlichen Gleichung mit einem einzigen Multiplicator $x-\alpha$ des ersten Coefficienten die folgende sei:

$$u = \eta_2 (x-\alpha)^{h_2} \int \frac{\eta_3\, dx}{(x-\alpha)^{h_2+1}} \int \eta_4\, dx \, \ldots\ldots\ldots \int \eta_n\, dx; \tag{88}$$

so erhalten wir, dieses allgemeine u in die Substitutionsgleichung (83) setzend, den allgemeinen der (62) angehörigen Werth von y:

$$y = \eta_1 (x-\alpha)^{h_1} \int \frac{\eta_2 (x-\alpha)^{h_2}\, dx}{(x-\alpha)^{h_1+1}} \int \frac{\eta_3\, dx}{(x-\alpha)^{h_2+1}} \int \eta_4\, dx \, \ldots\ldots\ldots \int \eta_n\, dx. \tag{89}$$

Eine nähere Untersuchung dieser Form gibt jetzt Aufschluss über die Beschaffenheit der Transcendenten, die der directen Reihenentwicklung vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel hinderlich sind. Legen wir behufs derselben die in Reihenform darstellbaren η_1 und η_2 dar in entwickelter Gestalt:

$$\eta_2 = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 (x - \alpha) + \mathfrak{a}_2 (x - \alpha)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta_3 = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 (x - \alpha) + \mathfrak{A}_2 (x - \alpha)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und berechnen wir nach gehöriger Substitution derselben in die (89) wirklich integrirend auf dem bereits im vorigen Paragraphe betretenen Wege das zweite und dritte der in ihr enthaltenen particulären Integrale; so gelangen wir zu folgenden zwei Formeln:

$$\eta_1 (x - \alpha)^{h_2} \int \frac{\eta_2 (x-\alpha)^{h_1} dx}{(x-\alpha)^{h_2+1}} =$$

$$(92) \quad = \eta_1 (x-\alpha)^{h_1} \Big[- \frac{\mathfrak{a}_0}{h_2 - h_1} - \frac{\mathfrak{a}_1 (x-\alpha)}{h_2 - h_1 - 1} - \frac{\mathfrak{a}_2 (x-\alpha)^2}{h_2 - h_1 - 2} - \ldots\ldots - \mathfrak{a}_{h_2-h_1-1} (x-\alpha)^{h_2-h_1-1} +$$

$$+ \mathfrak{a}_{h_2-h_1+1} (x-\alpha) + \frac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1+2}}{2} (x-\alpha)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big] +$$

$$+ \mathfrak{a}_{h_2-h_1} \eta_1 (x-\alpha)^{h_2} \log (x-\alpha)$$

$$\eta_1 (x-\alpha)^{h_2} \int \frac{\eta_2 (x-\alpha)^{h_1} dx}{(x-\alpha)^{h_2+1}} \int \frac{\eta_3 dx}{(x-\alpha)^{h_1+1}} =$$

$$(93) \quad = \eta_1 \begin{cases} \frac{\mathfrak{a}_0 \mathfrak{A}_0}{h_1 h_2} + \left(\frac{\mathfrak{a}_0 \mathfrak{A}_1}{h_1 - 1} + \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{A}_0}{h_1} \right) \frac{x-\alpha}{h_2 - 1} + \left(\frac{\mathfrak{a}_0 \mathfrak{A}_2}{h_1 - 2} + \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{A}_1}{h_1 - 1} + \frac{\mathfrak{a}_2 \mathfrak{A}_0}{h_1} \right) \frac{(x-\alpha)^2}{h_2 - 2} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \left(\frac{\mathfrak{a}_0 \mathfrak{A}_{h_1-1}}{1} + \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{A}_{h_1-2}}{2} + \frac{\mathfrak{a}_2 \mathfrak{A}_{h_1-3}}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\mathfrak{a}_{h_1-1} \mathfrak{A}_0}{h_1} \right) \frac{(x-\alpha)^{h_1-1}}{h_2 - h_1 + 1} + \\ + \left(- \frac{\mathfrak{a}_2 \mathfrak{A}_{h_1}}{h_2 - h_1} + \frac{\mathfrak{a}_0 \mathfrak{A}_{h_1-1}}{1} + \frac{\mathfrak{a}_2 \mathfrak{A}_{h_1-2}}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\mathfrak{a}_{h_1} \mathfrak{A}_0}{h_1} \right) \frac{(x-\alpha)^{h_1}}{h_2 - h_1} + \\ + \left(- \frac{\mathfrak{a}_0 \mathfrak{A}_{h_1+1}}{1} - \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{A}_{h_1}}{h_2 - h_1 - 1} + \frac{\mathfrak{a}_2 \mathfrak{A}_{h_1-1}}{1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\mathfrak{a}_{h_1+1} \mathfrak{A}_0}{h_1} \right) \frac{(x-\alpha)^{h_1+1}}{h_2 - h_1 - 1} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \begin{bmatrix} - \frac{\mathfrak{a}_0 \mathfrak{A}_{h_2-1}}{h_2 - h_1 - 1} - \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{A}_{h_2-2}}{h_2 - h_1 - 2} - \ldots\ldots - \frac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1-2} \mathfrak{A}_{h_1+1}}{1} - \frac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1-1} \mathfrak{A}_{h_1}}{1} \\ + \frac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1} \mathfrak{A}_{h_1-1}}{1} + \frac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1+1} \mathfrak{A}_{h_1-2}}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\mathfrak{a}_{h_2-1} \mathfrak{A}_0}{h_1} \end{bmatrix} \frac{(x-\alpha)^{h_2-}}{1} \\ + \begin{bmatrix} \frac{\mathfrak{a}_0 \mathfrak{A}_{h_2+1}}{h_2 - h_1 + 1} + \frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{A}_{h_2}}{h_2 - h_1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1} \mathfrak{A}_{h_1+1}}{1} - \frac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1+1} \mathfrak{A}_{h_1}}{1} - \\ - \frac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1+2} \mathfrak{A}_{h_1-1}}{1} - \frac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1+2} \mathfrak{A}_{h_1-2}}{2} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{\mathfrak{a}_{h_2+1} \mathfrak{A}_0}{h_1} \end{bmatrix} \frac{(x-}{} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$+\mathfrak{A}_{h_1}\eta_1(x-\alpha)^{h_1}\log(x-\alpha)\left[\begin{array}{l}-\dfrac{\mathfrak{a}_0}{h_2-h_1}-\dfrac{\mathfrak{a}_1(x-\alpha)}{h_2-h_1-1}-\dfrac{\mathfrak{a}_2(x-\alpha)^2}{h_2-h_1-2}-\ldots-\dfrac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1-1}(x-\alpha)^{h_2-h_1-1}}{1}+\\ +\dfrac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1+1}(x-\alpha)^{h_2-h_1+1}}{1}+\dfrac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1+2}(x-\alpha)^{h_2-h_1+2}}{2}+\ldots\ldots\ldots\end{array}\right]+$$

$$+\eta_1(x-\alpha)^{h_2}\log(x-\alpha)\left[\begin{array}{l}\dfrac{\mathfrak{a}_0\mathfrak{A}_{h_2}}{h_2-h_1}+\dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}_{h_2-1}}{h_2-h_1-1}+\dfrac{\mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_{h_2-2}}{h_2-h_1-2}+\ldots\ldots\ldots+\dfrac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1-1}\mathfrak{A}_{h_1-1}}{1}-\\ -\dfrac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1+1}\mathfrak{A}_{h_1-1}}{1}-\dfrac{\mathfrak{a}_{h_2-h_1+2}\mathfrak{A}_{h_1-2}}{2}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-\dfrac{\mathfrak{a}_{h_2}\mathfrak{A}_0}{h_1}\end{array}\right]+$$

$$+\mathfrak{a}_{h_2-h_1}\mathfrak{A}_{h_1}\eta_1(x-\alpha)^{h_2}\log^2(x-\alpha).$$

Wie man sieht, findet sich in dem zweiten mit $(x-\alpha)^{h_1}$ anfangenden particulären Integrale die einzige Transcendente $\log(x-\alpha)$ und zwar multiplizirt mit $\eta_1(x-\alpha)^{h_2}$. Sie vermag sohin durch ihr Vorhandensein erst den Reihencoefficienten $y^{(h_2)}$ unendlich zu machen; es entspricht ihr also die zweite Unterbrechung in der zur Integration in Reihenform durchgeführten Rechnung. Das dritte hingegen der particulären Integrale birgt zwei Transcendenten: die $\log(x-\alpha)$ multiplizirt mit einer Function, die bei $(x-\alpha)^{h_1}$ anfängt, und die $\log^2(x-\alpha)$, die mit $\eta_1(x-\alpha)^{h_2}$ multiplizirt erscheint. Der ersteren ist offenbar die erste Unterbrechung, der zweiten die zweite im Gange der Rechnung zuzuschreiben. Würde man jetzt nach einander die unbestimmten Integrale in der Formel (89) hinzufügend den vierten, fünften, ... n^{ten} der Genüge leistenden Werthe ebenso der Berechnung unterwerfen; so würde man sehen, dass sie der Form nach von dem eben hingestellten dritten (93) nur gering abweichen, darin nämlich, dass ihre Anfangsglieder beziehlich versehen sind mit den Factoren $(x-\alpha)$, $(x-\alpha)^2$, ... $(x-\alpha)^{n-2}$, übrigens aber erscheint in ihnen allen derselbe $\log(x-\alpha)$ multiplizirt mit, bis auf einen constanten Factor, derselben Function von x und derselbe $\log^2(x-\alpha)$ multiplizirt mit $H\eta_1(x-\alpha)^{h_2}$, allwo bloss die Constante H von Ausdruck zu Ausdruck variiren kann. Es ist gar nicht nöthig, um sich hievon zu überzeugen, die η_4, η_5, ... η_n, ebenso wie die η_2 und η_3 in Reihenform darzustellen und wirklich zu integriren, denn man sieht bei einiger Ueberlegung, dass in der so gestalteten Berechnung eines jeden beliebigen m^{ten} particulären Integrales ein Logarithmus erst dann erscheinen könne, wenn η_2 an die Reihe kommt und es wird die mit dieser Function vorgenommene Integration jedesmal nur ein einziges isolirtes Glied, wie $G\log(x-\alpha)$ liefern, jedoch werden anderen Werthen von m, andere von G entsprechen. Die fernere Rechnung jedoch, in der η_2 und η_1 zugezogen werden, geht denselben Gang für jedes beliebige m und G und das logarithmische Glied erfährt einerlei Veränderung, daher sich denn auch die Resultate nur in constanten Factoren unterscheiden können. Es ist also klar ersichtlich, dass $n-2$ particuläre Integrale der Differentialgleichung, diejenigen, denen kein Factor $x-\alpha$ der Anfangscoefficienten entspricht, einerlei Form die (93) nämlich besitzen werden, mit derselben sogar in den Werthen sämmtlicher mit $\mathfrak{a}$ bezeichneten Grössen übereinstimmend, und nur in jenen der $\mathfrak{A}$ genannten und namentlich von $\mathfrak{A}_h$ unter einander abweichend, dergestalt, dass wenn man diese $n-2$ particulären Integrale behufs der

Elimination des die Reihenentwicklung störenden Logarithmus mit gewissen Constanten multipl...
addirt, zugleich die zweite Potenz dieser Transcendente mit herausfällt und eine Form, wie die des nächstvorhergehenden Integrales (92) erhalten wird.

Diese Eigenschaften der Form (89) stehen aber in voller Uebereinstimmung mit denjenigen, welche das in Reihenform dargestellte Integral unserer Differentialgleichung (62) kraft den Ergebnissen der Rechnung aufweist. Um sie mit Klarheit darzuthun, wird man wieder die zur Bestimmung von $y^{(n+r-3)}$ dienende allgemeine Gleichung (73) ins Auge fassen. Verschwindet in (72) der letzte Factor von M_r für irgend ein r; so kann man dem Unendlichwerden von $y^{(n+r-3)}$ dadurch entgehen, dass man zwischen den Constanten $y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n-3)}$ die Beziehungsgleichung:

$$(94)\qquad (0,r)\, y + (1,r)\, y' + (2,r)\, y'' + \ldots\ldots\ldots + (n-3,r)\, y^{(n-3)} = 0$$

feststellt. Diese liefert dann in der Regel, und namentlich so lange $(n-3,r)$ von Null verschieden bleibt, einen Werth von $y^{(n-3)}$, der so aussieht:

$$(95)\qquad y^{(n-3)} = g_0 y + g_1 y' + g_2 y'' + \ldots\ldots\ldots + g_{n-4} y^{(n-4)}$$

und durch den die Willkührlichkeit einer dieser Constanten aufgehoben ist, während gewissermassen zum Ersatze dafür das $y^{(n+r-3)}$ als neue willkührliche Constante in der Rechnung auftritt. Demgemäss wäre zunächst in der Formel (74), die die particulären Integrale in Reihenform zeigt, entwickelt jedoch überall nur bis zu dem Gliede mit $(x-\alpha)^{n+r-3}$ inclusive, und namentlich im letzten derselben $y^{(n-3)}$ durch seinen eben angenommenen Werth zu ersetzen. Hiedurch verschwindet die letzte Reihe, fügt sich jedoch, beziehlich mit $g_0, g_1, \ldots\ldots g_{n-4}$ multiplizirt, den übrigen von der ersten angefangen an. Wenn daher die Formel (74) kürzer geschrieben und die darin enthaltenen Reihen dur...
$y_0, y_1, \ldots\ldots\ldots y_{n-3}$ ersetzt, die folgende ist:

$$(96)\qquad y = y\, y_0 + y' y_1 + \ldots\ldots\ldots + y^{(n-3)} y_{n-3};$$

so geht sie jetzt durch das Aufgeben des letzten particulären Integrales über in:

$$(97)\qquad y = y\,(y_0 + g_0 y_{n-3}) + y'(y_1 + g_1 y_{n-3}) + \ldots\ldots\ldots + y^{(n-4)}(y_{n-4} + g_{n-4} y_{n-3})$$

und wir sehen, dass wiewohl $y_0, y_1, \ldots\ldots y_{n-4}$ die directe Reihenentwicklung nicht zulassen, ungeachtet die Summen $y_0 + g_0 y_{n-3}$, $y_1 + g_1 y_{n-3}$, ... vorderhand wenigstens, und wen... neue Unterbrechung eintritt, derselben ohne Anstand fähig seien, was offenbar nur herrühr... von einer Transcendente, deren irgend ein Differentialquotient für $x = \alpha$ unendlich wird, di... gleicher Weise sich in allen Genüge leistenden Werthen vorfindet, nur durch die Factoren g... von denselben unterschieden; ganz in Uebereinstimmung mit dem über die allgemeine ... Gesagten.

... man jetzt, nachdem man solchergestalt dem Unendlichwerden von $y^{(n}$...
... $y^{(n+r-1)}$ aus der Gleichung: $P^{(r+1)} = 0$; so wird sic...
... $X = N_1$

als Factor dieses Differentialquotienten ergeben, und sein Werth wird zunächst aus:

$$y^{(n+r-2)},\quad y^{(n+r-3)}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad y',\quad y$$

linear zusammengesetzt erscheinen. Die erste dieser Grössen ist eine willkührliche Constante, die zweite eine Function von y, y', ... $y^{(n-4)}$ gebrochen durch M_{r-1}, die übrigen entsprechende Ausdrücke, zusammengesetzt aus denselben Elementen. Die zur Bestimmung von $y^{(n+r-1)}$ dienende Formel ist daher der Gestalt nach:

$$N_1 y^{(n+r-1)} = (n+r-2,r+1)\, y^{(n+r-2)} + \frac{(0,r+1)}{M_{r-1}}\, y + \frac{(1,r+1)}{M_{r-1}}\, y' + \ldots\ldots + \frac{(n-4,r+1)}{M_{r-1}}\, y^{(n-4)}, \tag{99}$$

und man hat in ähnlicher Weise mit der Gleichung $P^{(r+2)} = 0$ verfahrend:

$$N_2\, y^{(n+r)} = (n+r-2,r+2)\, y^{(n+r-2)} + \frac{(0,r+2)}{M_{r-1}}\, y + \frac{(1,r+2)}{M_{r-1}}\, y' + \ldots\ldots + \frac{(n-4,r+2)}{M_{r-1}}\, y^{(n-4)}, \tag{100}$$

allwo:

$$N_2 = \left[X_{n-2} + (r+1)\, X_{n-1} + (r+1)\, r\, X_{n}\right]\left[X_{n-2} + (r+2)\, X_{n-1} + (r+2)(r+1)\, X_{n}\right] \tag{101}$$

ist, u. s. w.

Es hat also in der Integralformel (74) durch das Verschwinden von M_r eine Veränderung Platz gegriffen durch das Verschwinden eines alten, Auftauchen eines neuen Integrales, die der folgende neue Werth von y dem Auge ersichtlich macht:

$$y = y\left[1 + \frac{g_0(x-\alpha)^{n-3}}{1\ldots(n-3)} + \frac{(0,0)+g_0(n-3,0)}{1\ldots(n-2)\,M_0}(x-\alpha)^{n-2} + \ldots + \frac{(0,r-1)+g_0(n-3,r-1)}{1\ldots(n+r-3)\,M_{r-1}}(x-\alpha)^{n+r-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(0,r+1)\,(x-\alpha)^{n+r-1}}{1\ldots(n+r-1)\,N_1 M_{r-1}} + \frac{(0,r+2)\,(x-\alpha)^{n+r}}{1\ldots(n+r)\,N_2 M_{r-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right] +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ y^{(n-4)}\left[\frac{(x-\alpha)^{n-4}}{1\ldots(n-4)} + \frac{g_{n-4}(x-\alpha)^{n-3}}{1\ldots(n-3)} + \frac{(n-4,0)+g_{n-4}(n-3,0)}{1\ldots(n-2)\,M_0}(x-\alpha)^{n-2} + \right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{102}$$

$$+ \frac{(n-4,r-1)+g_{n-4}(n-3,r-1)}{1\ldots(n+r-3)\,M_{r-1}}(x-\alpha)^{n+r-2} + \frac{(n-4,r+1)\,(x-\alpha)^{n+r-1}}{1\ldots(n+r-1)\,N_1 M_{r-1}} +$$

$$\left. + \frac{(n-4,r+2)\,(x-\alpha)^{n+r}}{1\ldots(n+r)\,N_2 M_{r-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right] +$$

$$+ y^{(n+r-2)}\left[\frac{(x-\alpha)^{n+r-2}}{1\ldots(n+r-2)} + \frac{(n+r-2,r+1)}{1\ldots(n+r-1)\,N_1}(x-\alpha)^{n+r-1} + \frac{(n+r-2,r+2)}{1\ldots(n+r)\,N_2}(x-\alpha)^{n+r} + \ldots\right].$$

Wenn keines der mit N_1, N_2, N_3, ... bezeichneten Produkte jetzt mehr zum Factor die Nulle bekommt, was jedesmal bei positiven oder gebrochenen Werthen der zweiten Wurzel k_2 der (65) der Fall ist: so bleibt diese Formel auch giltig und biethet gar keine unendlichen Coefficienten mehr, und stellt also ein Integral mit $n-2$ Constanten vor. Anders verhält sich die Sache, wenn es eine zweite Wurzel $k_2 = -h_2$ dieser algebraischen Gleichung gibt, unter h_2 eine ganze positive Zahl, die grösser als h_1 ist, verstanden. Hat man $h_2 = r + s$; so ist das Trinom:

$$X_{n-2} + (r+s-1) \underset{n-1}{X} + (r+s-1)(r+s-2) \underset{n}{X},$$

das den letzten Factor von N_{s-1} bildet, annoch von der Nulle verschieden, hingegen der letzte Factor von N_s, d. h. der:

$$X_{n-2} + (r+s) \underset{n-1}{X} + (r+s)(r+s-1) \underset{n}{X}$$

wieder der Nulle gleich. Die mit dem Divisor N_s versehenen Coefficienten der vorliegenden Formel (102) werden also unendlich, sohin tritt eine neue Transcendente die Reihenentwicklung hindernd auf, und wir sind zum zweiten Male genöthigt, die Elimination derselben durch Aufopferung eines particulären Integrales zu bewerkstelligen. Die Gleichung, in der die unendlichen Coefficienten zuerst erscheinen, ist die:

$$\text{(103)} \quad N_s y^{(n+r+s-2)} = (n+r-2, r+s) y^{(n+r-2)} + \frac{(0, r+s)}{M_{r-1}} y + \frac{(1, r+s)}{M_{r-1}} y' + \ldots\ldots + \frac{(n-4, r+s)}{M_{r-1}} y^{(n-4)},$$

und um den aus ihr hervorgehenden unendlichen Werth von $y^{(n+r+s-2)}$ in einen unbestimmten zu verwandeln, der die Rolle einer neuen Integrationsconstante zu übernehmen fähig ist, sind wir abermals genöthigt, zwischen der $y^{(n+r-2)}$, y, y', ... $y^{(n-4)}$ eine solche Relation festzustellen, dass:

$$\text{(104)} \quad (n+r-2, r+s) y^{(n+r-2)} + \frac{(0, r+s)}{M_{r-1}} y + \frac{(1, r+s)}{M_{r-1}} y' + \ldots\ldots + \frac{(n-4, r+s)}{M_{r-1}} y^{(n-4)} = 0$$

ausfällt, und die für irgend eine dieser Grössen, am passendsten die $y^{(n+r-2)}$, einen linearen Werth in Function der übrigen gibt, der aussieht, wie folgt:

$$\text{(105)} \quad y^{(n+r-2)} = f_0 y + f_1 y' + \ldots\ldots\ldots + f_{n-4} y^{(n-4)}.$$

Nun lässt sich die zur Ermittlung der ferneren Reihencoefficienten dienende Rechnung wieder fortsetzen und erleidet auch keine Unterbrechung mehr. Man hat aber wieder ein particuläres Integral, das letzte nämlich der in der Formel (102) enthaltenen aufgeopfert, dafür aber ein neues erhalten, das einzige, dessen Entwicklung in Reihenform in der Regel kein Hinderniss im Wege steht. Ausnahmsweise werden wohl auch die übrigen die directe Anwendung der Mac-Laurin'schen Formel gestatten, wenn gewisse Beziehungsgleichungen zwischen den constanten Parametern der Gleichung erfüllt sind, z. B. das der 0ten Potenz von $(x-\alpha)$ proportionale, dem die Integrationsconstante y angehört.

ihr allgemeines Integral aber nach den Vorschriften der Formenlehre:

$$(108)\quad \begin{aligned} y = \quad & c_0 y_0 + c_1 y_1 + \ldots + c_{n-\rho-1} y_{n-\rho-1} + \\ & + c_{n-\rho} y_{n-\rho} (x-\alpha)^{h_1} + c_{n-\rho+1} y_{n-\rho+1} (x-\alpha)^{h_2} + \ldots + c_{n-1} y_{n-1} (x-\alpha)^{h_\rho}. \end{aligned}$$

Die algebraische Gleichung, deren Wurzeln: $-h_1$, $-h_2$, ... $-h_\rho$ sind, ist:

$$(109)\quad \underset{n}{X}(k+n-1)(k+n-2)\ldots(k+n-\rho) - \underset{n-1}{X}(k+n-2)(k+n-3)\ldots(k+n-\rho)+\ldots+(-1)^\rho X_{n-\rho} = 0,$$

und verwandeln sich zufällig, oder durch die Voraussetzung des Rechners h_1, h_2, ... h_ρ in lauter positive ganze Zahlen, aufsteigend geordnet; so lässt sich zeigen, dass die Integration in Reihenform ρ-Mal durch das Erscheinen einer unendlichen Coefficientengruppe unterbrochen werde, und dass man jedesmal gezwungen sei, um das lästige Unendlichwerden zu vermeiden, Ein particuläres Integral aufzuopfern, dass aber der Reihenentwicklung eines unter ihnen, des letzten nämlich, dem $(x-\alpha)^{h_\rho}$ proportionalen niemals ein analytisches Hinderniss im Wege steht. Man wird es also immer berechnen und die Differentialgleichung davon befreien können, was wir vermittelst der Substitution:

$$(110)\quad y = \eta\,(x-\alpha)^{h_\rho} \int \frac{u\,dx}{(x-\alpha)^{h_\rho+1}}$$

bewerkstelligen, unter $\eta\,(x-\alpha)^{h_\rho}$ eben diesen einen entwickelbaren particulären Werth verstand[...] Das Substitutionsresultat zerlegt sich in die zwei Gleichungen (46) und (49) des vorhergehenden P[...] graphes: die Identische in η und die Transformirte in u. Sie sind aber nach Einführung der C[...] [...]nwerthe (106) zuerst nach Potenzen von $x-\alpha$ neu zu ordnen, und sehen dann folge[...]

$$+ (x-\alpha)^{n-\rho} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{r} \binom{n}{\rho} h(h-1) \ldots\ldots\ldots\ldots (h-\rho+1) \mathfrak{X}_n + \\ + \binom{n-1}{\rho-1} h(h-1) \ldots\ldots\ldots (h-\rho+2) \mathfrak{X}_{n-1} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_{n-\rho} \end{array} \right] \eta^{(n-\rho)} + \\ + \mathfrak{X}_{n-\rho-1} \eta^{(n-\rho-1)} + \mathfrak{X}_{n-\rho-2} \eta^{(n-\rho-2)} + \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_0 \eta \end{array} \right\}$$

$$+ (x-\alpha)^{n-\rho-1} h \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{r} \binom{n}{\rho+1} (h-1)(h-2) \ldots\ldots\ldots (h-\rho) \mathfrak{X}_n + \\ + \binom{n-1}{\rho} (h-1)(h-2) \ldots\ldots (h-\rho+1) \mathfrak{X}_{n-1} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{n-\rho}{1} \mathfrak{X}_{n-\rho} \end{array} \right] \eta^{(n-\rho-1)} + \\ + \binom{n-\rho-1}{1} \mathfrak{X}_{n-\rho-1} \eta^{(n-\rho-2)} + \binom{n-\rho-2}{1} \mathfrak{X}_{n-\rho-2} \eta^{(n-\rho-3)} + \ldots + \mathfrak{X}_1 \eta \end{array} \right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (x-\alpha)^2 . h(h-1) \ldots (h-n+\rho+3) \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{r} \binom{n}{2} (h-n+\rho+2)(h-n+\rho+1) \times \\ \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (h-n+3) \mathfrak{X}_n + \\ + \binom{n-1}{2} (h-n+\rho+2)(h-n+\rho+1) \times \\ \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (h-n+4) \mathfrak{X}_{n-1} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{n-\rho}{2} \mathfrak{X}_{n-\rho} \end{array} \right] \eta'' + \\ + \binom{n-\rho-1}{1} \mathfrak{X}_{n-\rho-1} \eta' + \mathfrak{X}_{n-\rho-2} \eta \end{array} \right\}$$

$$+ (x-\alpha) h(h-1) \ldots (h-n+\rho+2) \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{r} \binom{n}{1} (h-n+\rho+1)(h-n+\rho) \times \\ \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (h-n+2) \mathfrak{X}_n + \\ + \binom{n-1}{1} (h-n+\rho+1)(h-n+\rho) \times \\ \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (h-n+3) \mathfrak{X}_{n-1} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{n-\rho}{1} \mathfrak{X}_{n-\rho} \end{array} \right] \eta' + \\ + \mathfrak{X}_{n-\rho-1} . \eta \end{array} \right\}$$

$$+ h(h-1) \ldots (h-n+\rho+1) \left[\begin{array}{r} (h-n+\rho)(h-n+\rho-1) \ldots\ldots (h-n+1) \mathfrak{X}_n + \\ + (h-n+\rho)(h-n+\rho-1) \ldots\ldots (h-n+2) \mathfrak{X}_{n-1} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_{n-\rho} \end{array} \right] \eta$$

$$0 = u^{(n-1)} \cdot (x-\alpha)^{n-1} . \eta \underset{n}{\mathfrak{X}} +$$

$$+ u^{(n-2)} \left\{ \begin{array}{l} (x-\alpha)^{n-2} \left[(h-n+1) \underset{n}{\mathfrak{X}} + \underset{n-1}{\mathfrak{X}} \right] \eta + \\ + (x-\alpha)^{n-1} . n \underset{n}{\mathfrak{X}} \eta' \end{array} \right\} +$$

$$+ u^{(n-3)} \left\{ \begin{array}{l} (x-\alpha)^{n-3} \left[(h-n+2)(h-n+1) \underset{n}{\mathfrak{X}} + (h-n+2) \underset{n-1}{\mathfrak{X}} + \underset{n-2}{\mathfrak{X}} \right] \eta + \\ + (x-\alpha)^{n-2} \left[\quad n \quad (h-n+2) \underset{n}{\mathfrak{X}} + (n-1) \underset{n-1}{\mathfrak{X}} \right] \eta' + \\ + (x-\alpha)^{n-1} . \binom{n}{2} \underset{n}{\mathfrak{X}} \eta'' \end{array} \right\} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(112) \qquad + u^{(n-\rho-1)} \left\{ \begin{array}{l} (x-\alpha)^{n-\rho-1} \left[\begin{array}{r} (h-n+\rho)(h-n+\rho-1) \ldots\ldots (h-n+1) \underset{n}{\mathfrak{X}} + \\ + (h-n+\rho)(h-n+\rho-1) \ldots\ldots (h-n+2) \underset{n-1}{\mathfrak{X}} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \mathfrak{X}_{n-\rho} \end{array} \right] \eta + \\ + (x-\alpha)^{n-\rho} \left[\begin{array}{r} (h-n+\rho)(h-n+\rho-1) \ldots (h-n+2) \binom{n}{1} \underset{n}{\mathfrak{X}} + \\ + (h-n+\rho)(h-n+\rho-1) \ldots (h-n+3) \binom{n-1}{1} \underset{n-1}{\mathfrak{X}} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \binom{n-\rho}{1} \mathfrak{X}_{n-\rho} \end{array} \right] \eta' + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (x-\alpha)^{n-1} . \binom{n}{\rho} \underset{n}{\mathfrak{X}} \eta^{(\rho)} \end{array} \right\} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ u^{(s)} \left\{ \begin{array}{l} (x-\alpha)^{s} (h-s-1)(h-s-2) \ldots\ldots\ldots (h-n+\rho+1) \times \\ \qquad \times \left[\begin{array}{r} (h-n+\rho)(h-n+\rho-1) \ldots\ldots (h-n+1) \underset{n}{\mathfrak{X}} + \\ + (h-n+\rho)(h-n+\rho-1) \ldots\ldots (h-n+2) \underset{n-1}{\mathfrak{X}} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \mathfrak{X}_{n-\rho} \end{array} \right] \eta + \\ + (x-\alpha)^{s+1} (h-s-1)(h-s-2) \ldots\ldots\ldots (h-n+\rho+2) \times \\ \qquad \times \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{r} (h-n+\rho+1)(h-n+\rho) \ldots (h-n+2) \binom{n}{1} \underset{n}{\mathfrak{X}} + \\ + (h-n+\rho+1)(h-n+\rho) \ldots (h-n+3) \binom{n-1}{1} \underset{n-1}{\mathfrak{X}} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \binom{n-\rho}{1} \mathfrak{X}_{n-\rho} \end{array} \right] \eta' \\ + \mathfrak{X}_{n-\rho-1} \eta \end{array} \right] + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (x-\alpha)^{n-1} . \binom{n}{s+1} \underset{n}{\mathfrak{X}} \eta^{(n-s-1)} \end{array} \right.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+u\left\{\begin{array}{l}
(h-1)(h-2)\,\ldots\ldots\ldots\,(h-n+\rho+1)\times \\
\times\left[\begin{array}{l}
(h-n+\rho)(h-n+\rho-1)\,\ldots\ldots\,(h-n+1)\,\mathfrak{X}_n+ \\
+(h-n+\rho)(h-n+\rho-1)\,\ldots\ldots\,(h-n+2)\,\mathfrak{X}_{n-1}+ \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\mathfrak{X}_{n-\rho}
\end{array}\right]\eta+ \\
+(x-\alpha)(h-1)(h-2)\,\ldots\ldots\ldots\,(h-n+\rho+2)\times \\
\times\left[\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}
(h-n+\rho+1)(h-n+\rho)\ldots(h-n+2)\binom{n}{1}\mathfrak{X}_n+ \\
+(h-n+\rho+1)(h-n+\rho)\ldots(h-n+3)\binom{n-1}{1}\mathfrak{X}_{n-1}+ \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\binom{n-\rho}{1}\mathfrak{X}_{n-\rho}
\end{array}\right]\eta'+ \\
+\mathfrak{X}_{n-\rho-1}\,\eta
\end{array}\right] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+(x-\alpha)^{n-1}\,.\,n\mathfrak{X}_n\eta^{(n-1)}
\end{array}\right\}$$

Zum Identischwerden der ersten ist nothwendig, dass die Summe aller Glieder, in denen man keinen Factor $x-\alpha$ sieht, wenigstens durch Einen solchen theilbar sei, d. h. für $x=\alpha$ verschwindet. Das Polynom der (109) überzeugt uns von dem wirklichen Stattfinden dieses Umstandes. Fügt man jetzt die Glieder mit $x-\alpha$ hinzu, so muss die Summe die Sonderung des Factors $(x-\alpha)^2$ verstatten u. s. w., bis endlich nach hinzugefügtem letzten Gliede das ganze identisch verschwindende Gleichungspolynom vorliegt. Diess vorausgesetzt, lehrt die Ansicht der zweiten Gleichung, dass ihr erster Coefficient den Factor $(x+\alpha)^{n+\rho-1}$, der zweite den $(x-\alpha)^{n+\rho-2}$, der dritte den $(x-\alpha)^{n+\rho-3}$ besitze u. s. w., bis zu dem $(\rho-1)^{\text{sten}}$, der mit allen darauffolgenden durch $(x-\alpha)^n$ theilbar wird. Dieser letztere ist daher Factor des ganzen Gleichungspolynoms, kann gestrichen werden, und liefert sodann eine abgekürzte Gleichung in u mit $\rho-1$, $\rho-2$, ... 2, 1, 0 Factoren $x-\alpha$ der Anfangscoefficienten. Man wird nun für diese letztere die Gleichung in k construiren können. Sie wird dem Grade $\rho-1$ angehören, und wird, wie sich ohne Schwierigkeit durch einige Rechnungsentwicklungen beweisen lässt, die Wurzeln:

$$k=-h_1,\quad k=-h_2,\ \ldots\ldots\ldots\ k=-h_{\rho-1}$$

besitzen, weil sie die durch den Wurzelfactor $(k+h_\rho)$ getheilte (109) ist. Jedoch ist dieser Beweis überflüssig, denn man hat kraft der Substitutionsformel (110):

$$u=(x-\alpha)^{h_\rho+1}\,.\,\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{\eta\,(x-\alpha)^{h_\rho}}\right].$$

Fasst man nun irgend einen Bestandtheil von y ins Auge, z. B. den mit $(x-\alpha)^{h_1}$ verknüpften, so wird ihm, wie eine leichte Ueberlegung lehrt, ein ähnlicher Bestandtheil von u mit genau demselben

Factor entsprechen. Die Wurzeln der Gleichung in k in der gegebenen und in der transformirten Differentialgleichung werden daher übereinstimmen müssen, bis auf eine einzige dem Integrale zugehörige, von der man befreit hat, und die desshalb aus der (112) in u nicht mehr hervorgehen kann. Nun kann man mit der erhaltenen Transformirten offenbar verfahren auf dieselbe Weise, indem man sagt: Das höchste mit dem Factor $(x-\alpha)^{h_{\rho-1}}$ versehene particuläre Integral derselben ist jedesmal in Reihenform zu ermitteln. Man kann sohin auch davon befreien vermittelst der Substitution:

$$u = \eta_2 (x-\alpha)^{h_{\rho-1}} \int \frac{v\,dx}{(x-\alpha)^{h_{\rho-1}+1}}. \tag{114}$$

Diese führt zu einer neuen Transformirten in v mit $\rho-2$, $\rho-1$, ... 2, 1, 0 Factoren $x-\alpha$ in den Anfangscoëfficienten, der man abermals genau dieselbe Behandlung angedeihen lässt u. s. w. Hieraus ergibt sich mit Klarheit die allgemeine Form des Integrales der (107), nämlich:

$$\begin{aligned} y = \eta_1 (x-\alpha)^{h_\rho} \int \frac{\eta_2 (x-\alpha)^{h_{\rho-1}} dx}{(x-\alpha)^{h_\rho+1}} \int \frac{\eta_3 (x-\alpha)^{h_{\rho-2}} dx}{(x-\alpha)^{h_{\rho-1}+1}} \cdots\cdots \int \frac{\eta_\rho (x-\alpha)^{h_1} dx}{(x-\alpha)^{h_2+1}} \int \frac{\eta_{\rho+1} dx}{(x-\alpha)^{h_1+1}} \times \\ \times \int \eta_{\rho+2} dx \cdots\cdots\cdots\cdots \int \eta_n dx, \end{aligned} \tag{115}$$

welche auch über die Art des Vorkommens der logarithmischen Transcendenten in den einzelnen Bestandtheilen Aufschluss gibt. Das erste particuläre Integral enthält nämlich gar keine solche. Das zweite besitzt nur $\log(x-\alpha)$ multiplizirt mit der Function $\eta_1 (x-\alpha)^{h_\rho}$. Das dritte hat die zwei Transcendenten $\log x-\alpha$ und $\log^2 x-\alpha$, die erste multiplizirt mit einer Function, die, in Reihenform wiedergegeben, mit $(x-\alpha)^{h_{\rho-1}}$ anfängt, die zweite mit dem Factor $\eta(x-\alpha)^{h_\rho}$ verknüpft. Der vierte Bestandtheil von y begreift eben so in sich drei Transcendenten $\log(x-\alpha)$, $\log^2(x-\alpha)$ und $\log^3(x-\alpha)$, beziehlich multiplizirt mit Reihen, die mit $(x-\alpha)^{h_{\rho-2}}$, $(x-\alpha)^{h_{\rho-1}}$, $(x-\alpha)^{h_\rho}$ anfangen u. s. w. Das ρ^{te} particuläre Integral endlich sammt den folgenden, mit denen es der Form nach genau übereinstimmt, enthält $\log(x-\alpha)$, $\log^2(x-\alpha)$, ... $\log^\rho(x-\alpha)$ durch Multiplication verbunden beziehlich mit Ausdrücken in Reihenform, deren Anfangsglieder den Potenzen $(x-\alpha)^{h_1}$, $(x-\alpha)^{h_2}$, ... $(x-\alpha)^{h_\rho}$ proportional sind. Diese Ergebnisse werden uns von Nutzen sein im folgenden Paragraphe, wo wir, diese Transcendenten als Factoren sondernd, das Gebieth der Mac-Laurin'schen Formel auch über Ausdrücke, die dieselben enthalten, ausdehnen werden.

Um aber die Übereinstimmung der Erscheinungen, die bei der Entwicklung der Form (115) in Reihen, und bei der Integration der Differentialgleichung selber in dieser Gestalt vorkommen, klar darzulegen, bezeichnen wir die particulären Integrale, so wie sie aus der Zerlegung der (115) in ihre Bestandtheile hervorgehen, mit $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_\rho, y_{\rho+1}, \ldots\ldots y_n$, so zwar: dass:

$$y_1 = \eta_1 (x-\alpha)^{h_\rho}$$

$$y_2 = \eta_1 (x-\alpha)^{h_\rho} \int \frac{\eta_2 (x-\alpha)^{h_{\rho-1}} dx}{(x-\alpha)^{h_\rho+1}}$$

$$y_3 = \eta_1 (x-\alpha)^{h_\rho} \int \frac{\eta_2 (x-\alpha)^{h_{\rho-1}} dx}{(x-\alpha)^{h_\rho+1}} \int \frac{\eta_3 (x-\alpha)^{h_{\rho-2}} dx}{(x-\alpha)^{h_{\rho-1}+1}}$$

....

$$y_\rho = \eta_1 (x-\alpha)^{h_\rho} \int \frac{\eta_2 (x-\alpha)^{h_{\rho-1}} dx}{(x-\alpha)^{h_\rho+1}} \int \frac{\eta_3 (x-\alpha)^{h_{\rho-2}} dx}{(x-\alpha)^{h_{\rho-1}+1}} \cdots\cdots\cdots \int \frac{\eta_\rho (x-\alpha)^{h_1} dx}{(x-\alpha)^{h_2+1}}$$

$$y_{\rho+1} = \eta_1 (x-\alpha)^{h_\rho} \int \frac{\eta_2 (x-\alpha)^{h_{\rho-1}} dx}{(x-\alpha)^{h_\rho+1}} \int \frac{\eta_3 (x-\alpha)^{h_{\rho-2}} dx}{(x-\alpha)^{h_{\rho-1}+1}} \cdots\cdots \int \frac{\eta_\rho (x-\alpha)^{h_1} dx}{(x-\alpha)^{h_2+1}} \int \frac{\eta_{\rho+1} dx}{(x-\alpha)^{h_1+1}}$$

....

$$y_n = \eta_1 (x-\alpha)^{h_\rho} \int \frac{\eta_2 (x-\alpha)^{h_{\rho-1}} dx}{(x-\alpha)^{h_\rho+1}} \int \frac{\eta_3 (x-\alpha)^{h_{\rho-2}} dx}{(x-\alpha)^{h_{\rho-1}+1}} \cdots\cdots \int \frac{\eta_{\rho+1} dx}{(x-\alpha)^{h_1+1}} \int \eta_{\rho+2} dx \ldots \int \eta_n dx$$

wird; nehmen noch überdiess vorläufig, um einen bestimmteren Fall vor Augen zu haben, an, dass $h_1, h_2, \ldots\ldots h_\rho$ sämmtlich ganz positiv und nicht unter n gelegen seien; so sind dieselben $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ wiedergegeben in Reihenform, gleichviel ob aus der (115) oder aus der Differentialgleichung selber gezogen, auch darzustellen in der folgenden Gestalt:

$$y_1 = \eta_1 (x-\alpha)^{h_\rho}$$

$$y_2 = {}_0\mathfrak{y}_2 (x-\alpha)^{h_{\rho-1}} + {}_1\mathfrak{y}_2 (x-\alpha)^{h_\rho} \log (x-\alpha)$$

$$y_3 = {}_0\mathfrak{y}_3 (x-\alpha)^{h_{\rho-2}} + {}_1\mathfrak{y}_3 (x-\alpha)^{h_{\rho-1}} \log (x-\alpha) + {}_2\mathfrak{y}_3 (x-\alpha)^{h_\rho} \log^2 (x-\alpha)$$

....

$$y_\rho = {}_0\mathfrak{y}_\rho (x-\alpha)^{h_1} + {}_1\mathfrak{y}_\rho (x-\alpha)^{h_2} \log (x-\alpha) + {}_2\mathfrak{y}_\rho (x-\alpha)^{h_3} \log^2 (x-\alpha) + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots + {}_{\rho-1}\mathfrak{y}_\rho (x-\alpha)^{h_\rho} \log^{\rho-1} (x-\alpha)$$

$$y_{\rho+1} = {}_0\mathfrak{y}_{\rho+1} + {}_1\mathfrak{y}_{\rho+1} (x-\alpha)^{h_1} \log (x-\alpha) + {}_2\mathfrak{y}_{\rho+1} (x-\alpha)^{h_2} \log^2 (x-\alpha) + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots + {}_\rho\mathfrak{y}_{\rho+1} (x-\alpha)^{h_\rho} \log^\rho (x-\alpha)$$

....

$$y_n = {}_{n-\rho-1}\mathfrak{y}_n (x-\alpha)^{n-\rho-1} + {}_{n-\rho}\mathfrak{y}_n (x-\alpha)^{h_1} \log (x-\alpha) + {}_{n-\rho+1}\mathfrak{y}_n (x-\alpha)^{h_2} \log^2 (x-\alpha) + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots + {}_n\mathfrak{y}_n (x-\alpha)^{h_\rho} \log^\rho (x-\alpha)$$

Multiplizirt man sie mit beliebigen Constanten und addirt dann, so dass man das allgemeine Integral erhält; so sieht auch dieses gerade so aus, wie jedes der letzten particulären Integrale $n-\rho$ an der Zahl, d. h. man hat der Form nach:

$$y = Y_1 + Y_2 (x-\alpha)^{h_1} \log (x-\alpha) + Y_3 (x-\alpha)^{h_2} \log^2 (x-\alpha) + \ldots\ldots + Y_{\rho+1} (x-\alpha)^{h_\rho} \log^\rho (x-\alpha),$$

unter allen mit $\mathfrak{y}$ oder Y bezeichneten Grössen solche Functionen von x verstanden, die für $x = \alpha$ weder Null werden noch unendlich, und überhaupt der Reihenentwicklung nicht widerstreben. Überdem weiss man noch, dass ${}_1\mathfrak{y}_2, {}_2\mathfrak{y}_3, \ldots\ldots {}_{\rho-1}\mathfrak{y}_\rho$ von η_1 nur in constanten Factoren unterschieden

seien. Unterwirft man das so gestaltete allgemeine Integral der Reihenentwicklung, so beginnt die Rechnung mit der Darstellung der letzten $n-\rho$ particulären Integrale:

$$y_{\rho+1},\ y_{\rho+2},\ \ldots\ldots\ldots\ y_n,$$

die der Reihe nach in dieselbe eingehen, und wird offenbar beim $(h_1+1)^{\text{sten}}$ Gliede durch das Erscheinen eines unendlichen Coefficientenwerthes, des für $y^{(h_1)}$ nämlich, unterbrochen. Um diesem Unendlichwerden zu entgehen, opfert man eines, etwa das letzte y_n der obenangedeuteten particulären Integrale auf, indem man es, mit bestimmten Constanten multiplizirt, zur Summe der vorhergehenden hinzufügt. Hiedurch verschwindet nicht bloss die höchste ρ^{te} Potenz des Logarithmus ganz, sondern auch die Anfangsglieder der Multiplicatoren der sämmtlichen übrigen Logarithmen, dergestalt, dass jetzt das allgemeine Integral vorkömmt in folgender Form, die der von y_ρ ähnlich ist:

$$y = Y_1 + Y_2\,(x-\alpha)^{h_2}\log(x-\alpha) + Y_3\,(x-\alpha)^{h_3}\log^2(x-\alpha) + \ldots\ldots + Y_\rho\,(x-\alpha)^{h_\rho}\log^{\rho-1}(x-\alpha).$$

Zu gleicher Zeit tritt aber auch das particuläre Integral y_ρ in der Rechnung auf. Sie wird zum zweiten Male unterbrochen beim $(h_2+1)^{\text{sten}}$ Gliede durch das Auftauchen eines unendlichen Werthes von $y^{(h_2)}$. Um dem zu entgehen, opfert man jetzt ein zweites particuläres Integral, das y_ρ nämlich, indem man die ihm anhängende willkührliche Constante eine solche lineare Function der übrigen sein lässt, dass nach Hinzufügung desselben die Coefficienten der Logarithmen eine abermalige Reduction erfahren, bestehend in dem Wegfallen der Anfangsglieder, so dass der Werth von y in die folgende auch dem $y_{\rho-1}$ zukommende Form übergeht:

$$y = Y_1 + Y_2\,(x-\alpha)^{h_2}\log(x-\alpha) + Y_3\,(x-\alpha)^{h_3}\log^2(x-\alpha) + \ldots\ldots + Y_{\rho-1}\,(x-\alpha)^{h_\rho}\log^{\rho-2}(x-\alpha).$$

Jetzt lässt sich die Rechnung wieder fortsetzen, in welcher gleichzeitig die ersten Glieder von $y_{\rho-1}$ aufgetreten sind, und wird abermals durch ein unendliches $y^{(h_3)}$ unterbrochen, was zur Aufopferung von $y_{\rho-1}$ zwingt und dem y dieselbe Form mit $y_{\rho-2}$ ertheilt, nämlich:

$$y = Y_1 + Y_2\,(x-\alpha)^{h_2}\log(x-\alpha) + Y_3(x-\alpha)^{h_3}\log^2(x-\alpha) + \ldots\ldots + Y_{\rho-2}\,(x-\alpha)^{h_\rho}\log^{\rho-3}(x-\alpha)$$

und so geht es fort, bis zum Erscheinen von y_2 in der Rechnung, nach welchem das durch die successiv aufgegebenen particulären Integrale unvollständig gemachte, aber auch zugleich von den höheren Potenzen des Logarithmus befreite y nur ein Glied mit $\log(x-\alpha)$ beherbergt, welches durch die Aufopferung von y_2 ebenfalls verschwindet, indem y_1 eintritt, dessen Berechnung dann in Gemeinschaft mit den übrigen annoch zurückgebliebenen particulären Integralen keiner weiteren analytischen Schwierigkeit unterliegt.

Wären einige der Exponenten $h_1,\ h_2,\ \ldots\ h_\rho$ ganz, positiv und kleiner als die Ordnungszahl n der Differentialgleichung, so würden gleichwohl die ersten der Gleichungen (117) ρ an der Zahl ungeändert fortbestehen, die letzten $n-\rho$ hingegen insoferne eine Änderung erleiden, als diejenigen mit einem Factor $\log(x-\alpha)$ oder $\log^2(x-\alpha)$ u. s. w. verbundenen Glieder, bei welchen in der Formel eine niedrigere Potenz von $(x-\alpha)$ als Factor ersichtlich ist, als die dem particulären

Integrale überhaupt zukommenden wegzufallen haben. Der Gang der Rechnung ist ein etwas anderer, von dem früher dargestellten verschiedener. Die Sache verhält sich nämlich beiläufig so, als hätte man die Rechnung nicht vom Anfange durchgeführt, sondern wäre in die Mitte hineingerathen, nachdem schon mehrere particuläre Integrale aufgegeben worden.

Wären einige der Wurzeln $h_1, h_2, \ldots h_\rho$ gebrochen, so kömmt zwar ihnen entsprechend ein particuläres Integral mit dem Factor $(x-\alpha)^h$ vor, es steht jedoch seiner Berechnung kein Hinderniss im Wege, auch erzeugt es in den übrigen keinen Logarithmus, daher man in diesen übrigen nur alle jene Glieder, in welchen dieses gebrochene h vorkömmt, auszulassen haben wird.

Befinden sich unter den Werthen des Exponenten k auch ganze positive oder gebrochene, hätte sohin irgend eines der particulären Integrale den Divisor $(x-\alpha)^k$; so würde sich dieses der Mac-Laurin'schen Formel, oder was dasselbe ist, der bisher vorgetragenen Integrationsweise entziehen. In einem solchen Falle bleibt nichts übrig, als eine Sonderung dieses Divisors zu bewerkstelligen vermittelst der einfachen Substitution:

$$y = \frac{z}{(x-\alpha)^k},$$

und dann nachzusehen, ob hiedurch die Darstellbarkeit in Reihenform wieder hergestellt sei oder nicht. Die transformirte Gleichung in z befindet sich bereits unter (9) des §. 1 der Transformationslehre, nur werden wir sie hier zuvörderst dem einfachsten und gewöhnlichsten aller Fälle anpassen, wo nämlich $\mathfrak{X}_n$ nur einen einzigen Factor $x-\alpha$ besitzt, welchem eben ein ganzes und positives k entsprechen soll, gegeben durch die bekannte Formel:

$$k = \frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{\mathfrak{X}_n}(x-\alpha)\Big\}_{\alpha} - n + 1.$$

Die bereits durch $(x-\alpha)$ dividirte (9) des §. 1 der Transformationslehre ist in einem solchen Falle unter der Voraussetzung: $\mathfrak{X}_n = (x-\alpha)\,\mathfrak{X}$ folgende:

$$\begin{aligned}
&(x-\alpha)^{n-1} . z^{(n)} \quad . \mathfrak{X} - \\
&-(x-\alpha)^{n-2} . z^{(n-1)} \Big[nk\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_{n-1} \Big] + \\
&+(x-\alpha)^{n-3} . z^{(n-2)} \Big[\binom{n}{2} k(k+1)\mathfrak{X} - (n-1)k\mathfrak{X}_{n-1} + \mathfrak{X}_{n-2}(x-\alpha) \Big] - \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+(-1)^{n-2}(x-\alpha) . z'' \Big[\binom{n}{2} k(k+1)\ldots(k+n-3)\mathfrak{X} - \binom{n-1}{2} k(k+1)\ldots(k+n-4)\mathfrak{X}_{n-1} + \\
&\qquad\qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + (-1)^{n-2}\mathfrak{X}_2 (x-\alpha)^{n-3} \Big] + \\
&+(-1)^{n-1} \qquad z' \Big[n\,k(k+1)\ldots(k+n-2)\mathfrak{X} - (n-1)k(k+1)\ldots(k+n-3)\mathfrak{X}_{n-1} + \\
&\qquad\qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + (-1)^{n-1}\mathfrak{X}_1 (x-\alpha)^{n-2} \Big] + \\
&+(-1)^{n} \qquad z \Big[\frac{1}{x-\alpha}\Big(k(k+1)\ldots(k+n-1)\mathfrak{X} - k(k+1)\ldots(k+n-2)\mathfrak{X}_{n-1} \Big) + \\
&\qquad + k\ldots(k+n-3)\mathfrak{X}_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} . k\mathfrak{X}_1 (x-\alpha)^{n-3} + (-1)^n \mathfrak{X}_0 (x-\alpha)^{n-2} \Big] = 0.
\end{aligned}$$

Die $n-1$, $n-2$, ... 2, 1, 0, 0 Factoren der Coefficienten können nur denjenigen particulären Integralen entsprechen, die aus den der 0ten, 1sten, ..., $n-2^{\text{ten}}$ Potenz von $(x-\alpha)$ proportionalen Werthen von y dadurch hervorgehen, dass man sie mit $(x-\alpha)^k$ multiplizirt. Diese sind aber, wie wir wissen, nach aufsteigenden Potenzen von $x-\alpha$ in Reihen ohne Anstand entwickelbar. Der Coefficientenbau deutet also nothwendigerweise auf eine Gruppe von $(n-1)$ Integralen, die darstellbar in Reihenform beziehlich mit $(x-\alpha)^k$, $(x-\alpha)^{k+1}$ ..... $(x-\alpha)^{k+n-2}$ anfangen. Sie interessiren uns hier offenbar nicht, und unsere Aufmerksamkeit gehört nur dem einzigen, durch die eingeleitete Transformation vom Divisor $(x-\alpha)^k$ befreiten. Gleichwohl wird es jedoch erspriesslich, zu bemerken, dass die ersteren auch nach geschehener Multiplication mit $(x-\alpha)^k$ unter der gemachten Voraussetzung eines ganzen positiven k die Reihenentwicklung zulassen müssen, wenn auch nur erst die späteren Entwicklungsglieder von Null verschieden ausfallen können, und zwar beziehlich das:

$$(k+1)^{\text{ste}}, \quad (k+2)^{\text{te}}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (k+n-1)^{\text{ste}}.$$

Es steht daher zu erwarten, dass sie auf irgend eine Weise im Verfolge der Rechnung von selbst auftreten werden.

Um jetzt die Ermittlung in Reihenform des einen particulären Integrales einzuleiten, dem unser Augenmerk gilt, beginnen wir mit einer Vereinfachung der Transformirten (118) vermittelst der Annahmen:

$$\mathfrak{P}_0 = (-1)^{n-2} k(k+1)\dots(k+n-3) \left[\begin{array}{l} z'\left[-n\,(k+n-2)\,\mathfrak{X} + (n-1)\,\mathfrak{X}_{n-1}\right] + \\ + z\left[(k+n-2)(k+n-1)\dfrac{\mathfrak{X}}{x-\alpha} - (k+n-2)\dfrac{\mathfrak{X}_{n-1}}{x-\alpha} + \mathfrak{X}_{n-2}\right] \end{array} \right]$$

$$\mathfrak{P}_1 = (-1)^{n-3} k(k+1)\dots(k+n-4) \left[z''\left[-\binom{n}{2}(k+n-3)\mathfrak{X} + \binom{n-1}{2}\mathfrak{X}_{n-1}\right] + z'.(n-2)\mathfrak{X}_{n-2} + z\mathfrak{X}_{n-3} \right]$$

....

(119)
$$\mathfrak{P}_s = (-1)^{n-s-2} k(k+1)\dots(k+n-s-3) \left[\begin{array}{l} z^{(s+1)}\left[-\binom{n}{s+1}(k+n-s-2)\,\mathfrak{X} + \binom{n-1}{s+1}\mathfrak{X}_{n-1}\right] + \\ + z^{(s)}\binom{n-2}{s}\mathfrak{X}_{n-2} + z^{(s-1)}\binom{n-3}{s-1}\mathfrak{X}_{n-3} + \\ + \dots + z^{(s-t)}\binom{n-t-2}{s-t}\mathfrak{X}_{n-t-2} + \dots\dots + z\mathfrak{X}_{n-s-2} \end{array} \right]$$

....

$$\mathfrak{P}_{n-2} = z^{(n-1)}\left[-nk\mathfrak{X} + \mathfrak{X}_{n-1}\right] + z^{(n-2)}\mathfrak{X}_{n-2} + z^{(n-3)}\mathfrak{X}_{n-3} + \dots\dots + z''\mathfrak{X}_2 + z'\mathfrak{X}_1 + z\mathfrak{X}_0$$
$$\mathfrak{P}_{n-1} = z^{(n)}\mathfrak{X}.$$

Sie findet sich vermittelst derselben nach den explicit darin enthaltenen $x-\alpha$ vorläufig geordnet und geht über in:

(120) $$0 = \mathfrak{P}_0 + (x-\alpha)\mathfrak{P}_1 + (x-\alpha)^2\mathfrak{P}_2 + \dots\dots + (x-\alpha)^{n-2}\mathfrak{P}_{n-2} + (x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{P}_{n-1}.$$

Nur zur Ermittlung von $\mathfrak{P}_0$ in Reihengestalt könnte es räthlicher sein, von wegen des in zweien Gliedern nur scheinbar vorhandenen Divisors $x-\alpha$, einen etwas anderen Weg einzuschlagen insoferne, als man die Summe dieser beiden für sich und den Rest des Werthes von $\mathfrak{P}_0$ wieder für sich in eine Reihe umgestaltet, Letzteren auf dieselbe Weise, wie die $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots\ldots \mathfrak{P}_{n-1}$ behandelt wurden, Erstere mit Hilfe der Formel:

$$(124)\quad \frac{(k+n-1)\,\mathfrak{X}_0-\mathfrak{X}_{n-1}}{x-\alpha}=(k+n-1)\,X'-X'_{n-1}+\frac{1}{2}\Big[(k+n-1)\,X''-X''_{n-1}\Big]\,(x-\alpha)+\ldots\ldots$$

Der auf diesem Wege ermittelte Werth von $\mathfrak{P}_0$ ist der Gestalt nach dem (122) für $\mathfrak{P}_s$ congruent, nämlich:

$$(125)\quad \mathfrak{P}_0=P_0+P'_0\,(x-\alpha)+P''_0\,\frac{(x-\alpha)^2}{2}+\ldots\ldots\ldots$$

und es besteht für einen beliebigen dieser Reihencoefficienten etwa den $P_0^{(p)}$ eine der obigen (123) ähnliche, auf dem eben angedeuteten Wege zu erhaltende Formel; sie ist:

$$(126)\quad \begin{aligned}
P_0^{(p)}=(-1)^{n-2}k(k+1)\ldots(k+n-3)\Big[&z^{(p+1)}\big(-n(k+n-2)\,X+(n-1)\,X_{n-1}\big)+\\
&+z^{(p)}\begin{bmatrix}(k+n-2)\,(k+n-1)\,X'-(k+n-2)\,X'_{n-1}+X_{n-2}+\\+p\,\big[-n\,(k+n-2)\,X'+(n-1)\,X'_{n-1}\big]\end{bmatrix}\\
&+z^{(p-1)}\begin{bmatrix}\frac{p}{2}\big[(k+n-2)\,(k+n-1)\,X''-(k+n-2)\,X''_{n-1}+2X'_{n-2}\big]+\\ \binom{p}{2}\big[-n\,(k+n-2)\,X''+(n-1)\,X''_{n-1}\big]\end{bmatrix}+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+z^{(p-t)}\begin{bmatrix}\frac{p(p-1)\ldots(p-t+1)}{2.3\ldots(t+1)}\big[(k+n-2)(k+n-1)X^{(t+1)}-(k+n-2)X^{(t+1)}_{n-1}+(t+1)X^{(t)}_{n-2}\big]+\\ \binom{p}{t+1}\quad\big[-n\,(k+n-2)\,X^{(t+1)}+(n-1)\,X^{(t+1)}_{n-1}\big]\end{bmatrix}+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+z'\begin{bmatrix}(k+n-2)\,(k+n-1)\,X^{(p)}-(k+n-2)\,X^{(p)}_{n-1}+pX^{(p-1)}_{n-2}-\\-n\,(k+n-2)\,X^{(p)}+(n-1)\,X^{(p)}_{n-1}\end{bmatrix}+\\
&+z.\Big[\frac{1}{p+1}\big[(k+n-2)\,(k+n-1)\,X^{(p+1)}-(k+n-2)\,X^{(p+1)}_{n-1}\big]+X^{(p)}_{n-2}\Big]\Big].
\end{aligned}$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichung (118) aber wird dieselbe, der vorausgesetzten Beschaffenheit von z wegen, das ein Genüge leistender Werth sein soll, offenbar identisch machen müssen. Es wird sich also die durch Substitution erhaltene Gleichung in eine unbegrenzte Anzahl anderer zerfällen lassen, indem man berechtigt ist, die Coefficienten der verschiedenen Po

von $x - \alpha$ je für sich der Nulle gleich zu setzen. Das durch eine solche Zerlegung erhaltene System von Gleichungen, die zur Bestimmung von z, z', z'' ..... dienen sollen, ist das folgende:

$$
\begin{aligned}
0 &= P_0 \\
0 &= P'_0 + P_1 \\
0 &= P''_0 + 2P'_1 + 1.2P_2 \\
0 &= P'''_0 + 3P''_1 + 2.3P'_2 + 1.2.3P_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= P_0^{(p)} + pP_1^{(p-1)} + p(p-1)P_2^{(p-2)} + \ldots + p(p-1)\ldots\ldots 1P_p \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= P_0^{(n-1)} + (n-1)P_1^{(n-2)} + (n-1)(n-2)P_2^{(n-3)} + \ldots + (n-1)(n-2)\ldots\ldots 1P_{n-1} \\
0 &= P_0^{(n)} + nP_1^{(n-1)} + n(n-1)P_2^{(n-2)} + \ldots\ldots + n(n-1)\ldots\ldots 2P'_{n-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= P_0^{(p)} + pP_1^{(p-1)} + p(p-1)P_2^{(p-2)} + \ldots + p(p-1)\ldots\ldots(p-n+2)P_{n-1}^{(p-n+1)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{127}
$$

und wir machen noch darauf aufmerksam, dass die $n-1$ ersten unter ihnen der Gestalt nach von den darauffolgenden unterschieden seien in einer Weise, die bei näherer Betrachtung unmittelbar in die Augen fällt. Die ersten $n-1$ unter ihnen bestehen nämlich beziehlich aus $1, 2, 3 \ldots\ldots n-1$ Gliedern; alle darauffolgenden haben hingegen deren n an der Zahl. Gleichwohl kann man sie alle, die ersten $n-1$ nicht ausgeschlossen, in der allgemeinen zuletzt stehenden enthalten denken, denn sie gehen alle aus ihr für $p = 1, 2, \ldots\ldots$ hervor, indem in den $n-1$ ersten von ihnen jedesmal eine entsprechende Anzahl von Hintergliedern der Nulle gleich ausfällt. Entwickelt man die erste unter ihnen, und stellt sie hin in der Gestalt, in welcher sie zur Bestimmung von z' dienen kann, so hat man:

$$0 = z'\left(-n(k+n-2)X + (n-1)X_{n-1}\right) + z\left((k+n-2)(k+n-1)X' - (k+n-2)X'_{n-1} + X_{n-2}\right). \tag{128}$$

Sie stellt sich noch etwas einfacher, wenn man bedenkt, dass identisch:

$$(k+n-1)X - X_{n-1} = 0 \tag{129}$$

sei. Diese verschwindende Grösse mit $n-1$ multiplizirt, dann zum Coefficienten von z' addirt, verwandelt sie nämlich in:

$$0 = -(k-1)X.z' + \left[(k+n-2)(k+n-1)X' - (k+n-2)X'_{n-1} + X_{n-2}\right]z, \tag{130}$$

und hieraus geht ein dem z proportionaler Ausdruck für z' hervor, der gebrochen ist durch $(k-1)X = M_1$. Wir wollen ihn durch:

$$z' = \frac{(1)}{M_1} z \tag{131}$$

andeuten. Genau auf dieselbe Weise entwickelt man nun die zweite der Bestimmungsgleichungen (127) und erhält:

$$0 = (k-1)(k-2)\,X.z'' - (k-1)\left[X'(k+n-3)(k+n-2) - X'_{n-1}(k+n-3) + X_{n-2}\right] z' +$$
$$+\left[-(k+n-3)(k+n-2)(k+n-1)\frac{X''}{2} + (k+n-3)(k+n-2)\frac{X''_{n-1}}{2} - (k+n-3)X'_{n-2} + X_{n-3}\right] z. \tag{132}$$

Sie gibt mit Benützung der vorhergehenden z'' in Function von z, gebrochen durch $(k-1)(k-2)\,X^2 = M_2$. Wir bezeichnen dasselbe durch:

$$z'' = \frac{(2)}{M_2}\,z \tag{133}$$

Auf dieselbe Weise überzeugt man sich, dass die dritte z''' liefern werde dem z proportional und gebrochen durch $(k-1)(k-2)(k-3)\,X^3 = M_3$, so dass man:

$$z''' = \frac{(3)}{M_3}\,z \tag{134}$$

hat u. s. w. Hieraus ist zuvörderst ersichtlich, dass die Rechnung mit der Ermittlung eines einzigen particulären Integrales beschäftigt sei, des nachfolgenden in Gestalt einer aufsteigenden Reihe erscheinenden nämlich:

$$z = z\left[1 + \frac{(1)}{M_1}(x-\alpha) + \frac{(2)}{M_2}\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots\right], \tag{135}$$

und dass z die Rolle spiele der ihm zukommenden willkührlichen Constante; man sieht aber auch aus dem Baue der für z', z'', z''', ... ermittelten Ausdrücke, deren Nenner Produkte sind, aus immer zahlreicheren Factoren $k-1$, $k-2$, $k-3$, ... und mit Berücksichtigung der vorausgesetzten Beschaffenheit von k, das eine ganze positive Zahl sein soll, dass wenn sämmtliche Reihencoefficienten ähnlich gebildet sind, man endlich zu einem von ihnen gelangen würde, der die Nulle im Nenner bekommt, wo dann offenbar die Reihenentwicklung wieder durch das Erscheinen eines unendlichen Coefficienten unterbrochen wird. Es ist daher wichtig, sich Aufschluss zu verschaffen über den wahren Sachverhalt. Zu diesem Zwecke aber wird es nöthig sein und zureichen, die allgemeine $(p+1)^{\text{sten}}$ der Bestimmungsgleichungen (127) zu construiren, unter p eine ganze positive Zahl verstanden, die eben so wie k nach Belieben unter $n-1$ fällt, oder ober demselben steht, d. h. wir entwickeln die Gleichung:

$$0 = P_0^{(p)} + pP_1^{(p-1)} + p(p-1)\,P_2^{(p-2)} + \ldots\ldots + p(p-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(p-n+2)\,P_{n-1}^{(p-n+1)}. \tag{136}$$

Eine oberflächliche Betrachtung der obangeführten Werthe von P_0, P_1, ... macht uns den höchsten Differentialquotienten von z bekannt, der in dieser entwickelt hingestellten Gleichung erscheinen wird; er ist $z^{(p+1)}$. Das Entwicklungsresultat wird daher offenbar die Form tragen:

$$0 = M_{p+1}\,z^{(p+1)} + \underset{0}{M}_{p+1}\,z^{(p)} + \underset{1}{M}_{p+1}\,z^{(p-1)} + \ldots\ldots\ldots + \underset{p}{M}_{p+1}\,z \tag{137}$$

und wird im Allgemeinen zur Bestimmung von $z^{(p+1)}$ in Function der niedereren Differentialquotienten dienen, es sei denn, dass M_{p+1} der Nulle gleich ausfiele, in welchem Falle diese Bestimmungsgleichung ihren Dienst versagt, weil man unendliche Coefficientenwerthe in der Reihe (121) nicht zuzulassen Willens ist. Man kann nun die ohnehin etwas weitläufigen Entwicklungsrechnungen theilweise durchnehmen, damit anfangend, den Werth des ersten Coefficienten M_{p+1}, lediglich die Glieder mit $z^{(p+1)}$ beachtend, zu construiren, da offenbar die Kenntniss dieses M_{p+1} die wichtigste ist. Hiebei bedient man sich der Formeln (126) und (123) für $P_s^{(p)}$ und $P_s^{(q)}$, der ersteren direct, der zweiten aber, indem man zuerst q in $p-s$ umgestaltet hat, so wie diess die Bestimmungsgleichung, die wir zum Gegenstande unserer Untersuchung gemacht haben, erfordert, darauf aber s der Reihe nach in die Zahlen: $1, 2, 3, \ldots\ldots n-1$ umwandelt, und aus den auf diese Weise gewonnenen Werthen von $P_0^{(p)}, P_1^{(p-1)}, P_2^{(p-2)} \ldots P_{n-1}^{(p-n+1)}$ nur die Glieder mit $z^{(p+1)}$ heraussucht und in die (136) substituirt. Man gelangt auf diesem Wege zunächst zu einer Formel für M_{p+1}, welche die folgende Gestalt trägt:

$$
\begin{aligned}
M_{p+1} = {} & (-1)^n\, k(k+1)\ldots\ldots(k+n-3) \left[-n\,(k+n-2)X + (n-1)\,X_{n-1}\right] + \\
& + (-1)^{n-1} k(k+1)\ldots\ldots(k+n-4).p \left[-\binom{n}{2}(k+n-3)X + \binom{n-1}{2} X_{n-1}\right] + \\
& + (-1)^{n-2} k(k+1)\ldots\ldots(k+n-5)\,p(p-1) \left[-\binom{n}{3}(k+n-4)X + \binom{n-1}{3} X_{n-1}\right] + \qquad (138) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + .\, p(p-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(p-n+3) \left[-\binom{n}{1} kX + X_{n-1}\right] + \\
& + .\, p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-n+2)\,X
\end{aligned}
$$

In dieser ist sie noch wenig geeignet, Aufschluss zu geben über die Werthe von p, für welche allenfalls ein Verschwinden von M_{p+1} eintreten kann. Um sie hiezu durch eine passende Reduction tauglich zu machen, nehmen wir das bekannte verschwindende Binom vor:

$$0 = (k+n-1)\,X - X_{n-1}, \qquad (139)$$

und setzen es den ähnlichen X und X_{n-1} enthaltenden, in der Formel vorfindigen und alldort in Klammern eingeschlossenen binomischen Ausdrücken zu, beziehlich multiplizirt mit:

$$n-1, \quad \binom{n-1}{2}, \quad \binom{n-1}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1, \quad 0,$$

so eliminirt sich aus ihr X_{n-1} und wir bekommen für M_{p+1} den geschmeidigeren dem X proportionalen Ausdruck:

$$\text{140)} \quad M_{p+1} = X \begin{bmatrix} (-1)^{n-1} & (k-1)\,k\,(k+1)\,\ldots\ldots\,(k+n-3) + \\ + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} & (k-1)\,k\,(k+1)\,\ldots\ldots\,(k+n-4)\,p + \\ + (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2} & (k-1)\,k\,(k+1)\,\ldots\ldots\,(k+n-5)\,p\,(p-1) + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - & (n-1)\,(k-1)\,p\,(p-1)\,\ldots\ldots\,(p-n+3) + \\ + & p\,(p-1)\,\ldots\ldots\,(p-n+2) + \end{bmatrix},$$

der seinerseits noch einer ferneren Reduction fähig ist. Um sie zu bewerkstelligen, fassen wir den Bruch: $\frac{x^p}{x^{k-1}} = x^{p-k+1}$ ins Auge, aber in folgender Gestalt eines Produkts aus zwei Factoren $x^p . x^{-k+1}$. Wir differenziren ihn $(n-1)$ Mal in dieser Gestalt vermittelst der allgemeinen zu diesem Zwecke dienlichen Formel:

$$\text{(141)} \quad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(PQ) = P^{(n-1)}Q + \binom{n-1}{1}P^{(n-2)}Q' + \binom{n-1}{2}P^{(n-3)}Q'' + \ldots\ldots\ldots$$

differenziren denselben aber auch in der Form x^{p-k+1} und zwar $(n-1)$ Mal und setzen die erhaltenen Resultate einander gleich; so gelangen wir zur Formel:

$$\text{(142)} \quad \begin{aligned} &(p-k+1)\,(p-k)\,(p-k-1)\,\ldots\ldots\ldots\,(p-k-n+3) = \\ = &\quad p\,(p-1)\,(p-2)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(p-n+2) - \\ &-(n-1)\,(k-1)\,p\,(p-1)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(p-n+3) + \\ &+\binom{n-1}{2}(k-1)\,k.p\,(p-1)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(p-n+4) - \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+(-1)^{n-3}\binom{n-1}{2}(k-1)\,k\,(k+1)\,\ldots\ldots\,(k+n-5)\,p\,(p-1) + \\ &+(-1)^{n-2}\binom{n-1}{1}(k-1)\,k\,(k+1)\,\ldots\ldots\,(k+n-4)\quad p \quad + \\ &+(-1)^{n-1}\quad (k-1)\,k\,(k+1)\,\ldots\ldots\,(k+n-3) \end{aligned}$$

die uns bei den gegenwärtigen Untersuchungen mehr als einmal von Nutzen sein wird, und in deren M_{p+1} den sehr einfachen und geschmeidigen Werth erhält:

$$\text{(143)} \quad M_{p+1} = (p-k+1)\,(p-k)\,(p-k-1)\,\ldots\ldots\ldots\,(p-k-n+3)\,X.$$

Er vermag nur dann der Nulle gleich zu werden, wenn k ebenso wie der Stellenzeiger p ein positive Zahl vorstellt, und zwar für die folgenden Werthe dieses p, die $n-1$ an der Zahl

$$p = k-1, \quad k, \quad k+1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad k+n-3.$$

Also nicht für solche p, die kleiner sind als $k-1$, und auch nicht für solche, die $k+n$

Nulle verschieden, so würde sie uns wegen $\underset{0}{M}_{k+1} = 0$ und $z = 0$ zur Annahme $z^{(k)} = 0$ zwingen. Das durch sie unbestimmt gelassene $z^{(k+1)}$ würde dann durch die darauffolgende wegen $M_{k+2} = 0$, $z = 0$, $z^{(k)} = 0$ der Nulle gleich angegeben werden, so lange wenigstens, als $\underset{0}{M}_{k+2}$ von Null verschieden ist u. s. w., bis endlich die letzte von ihnen das $z^{(k+n-2)}$ der Nulle gleich erklärt, es sei denn, dass sein Coefficient $\underset{0}{M}_{k+n-2}$ verschwinden würde. Diese letzte würde sodann nur $z^{(k+n-2)}$ willkührlich lassen, und die darauffolgenden späteren Bestimmungsgleichungen würden für $z^{(k+n-1)}$, $z^{(k+n)}$, ... dem $z^{(k+n-2)}$ proportionale Ausdrücke liefern. Die Folge hievon wäre, dass es nur ein einziges der Reihenentwicklung fähiges particuläres Integral gäbe, nämlich das mit dem Factor $(x-\alpha)^{k+n-2}$ versehene. Diess ist jedoch unrichtig, da wir von dem Dasein mehrerer und zwar $n-1$ Solcher aus anderen Gründen überzeugt sind. Wir vermuthen daher, dass auch die zweite Verticalreihe der Coefficienten in den Gleichungen (146) gerade so, wie die erste identisch der Nulle gleich sei für ganze und positive Werthe von k. Um aber diese Vermuthung zur Überzeugung zu erheben, schreiten wir zu einer ähnlichen Berechnung des zweiten Coefficienten $\underset{0}{M}_{p+1}$ in der allgemeinen Bestimmungsgleichung (137), wie diejenige war, der wir den ersten von ihnen unterworfen haben. Es ergibt sich für ihn durch etwas weitläufigere Rechnungsentwicklungen zunächst die folgende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\underset{0}{M}_{p+1} = \quad & X' \left[\begin{array}{l}
(-1)^n \; k(k+1) \ldots\ldots (k+n-1) + \\
+ (-1)^{n-1} \binom{n}{1} k(k+1) \ldots\ldots (k+n-2)\, p + \\
+ (-1)^{n-2} \binom{n}{2} k(k+1) \ldots\ldots (k+n-3)\, p(p-1) + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ p(p-1)(p-2) \ldots\ldots (p-n+1)
\end{array} \right] + \\
(147) \qquad & + X'_{n-1} \left[\begin{array}{l}
(-1)^{n-1} \; k(k+1) \ldots\ldots (k+n-2) + \\
+ (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1} k(k+1) \ldots\ldots (k+n-3)\, p + \\
+ (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2} k(k+1) \ldots\ldots (k+n-4)\, p(p-1) + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ p(p-1)(p-2) \ldots\ldots (p-n+2)
\end{array} \right] + \\
& + X_{n-2} \left[\begin{array}{l}
(-1)^{n-2} \; k(k+1) \ldots\ldots (k+n-3) + \\
+ (-1)^{n-3} \binom{n-2}{1} k(k+1) \ldots\ldots (k+n-4)\, p + \\
+ (-1)^{n-4} \binom{n-2}{2} k(k+1) \ldots\ldots (k+n-5)\, p(p-1) + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ p(p-1)(p-2) \ldots\ldots (p-n+3)
\end{array} \right] +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{p(p-1)\ldots(p-t+1)}{1\;2\;\ldots\;t}\mathbf{X}^{(t)}_{n-2}\left[\begin{array}{l}(-1)^{n-2}\qquad k(k+1)\ldots.(k+n-3)\;+\\ +(-1)^{n-3}\binom{n-2}{1}k(k+1)\ldots.(k+n-4)\;(p-t)\;+\\ +(-1)^{n-4}\binom{n-2}{2}k(k+1)\ldots.(k+n-5)(p-t)(p-t-1)+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\quad(p-t)\;(p-t-1)\ldots.(p-t-n+3)\end{array}\right]+$$

$$+\frac{p(p-1)\ldots(p-t+1)}{1.2\;\ldots\;(t-1)}\mathbf{X}^{(t-1)}_{n-3}\left[\begin{array}{l}(-1)^{n-3}\qquad k(k+1)\ldots.(k+n-4)\;+\\ +(-1)^{n-4}\binom{n-3}{1}k(k+1)\ldots.(k+n-5)(p-t)\;+\\ +(-1)^{n-5}\binom{n-3}{2}k(k+1)\ldots.(k+n-6)(p\;\;t)(p-t-1)+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\quad(p-t)\;(p-t-1)\;\ldots.\;(p-t-n+4)\end{array}\right]+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+p(p-1)\ldots(p-t+1)\mathbf{X}_{n-t-2}\left[\begin{array}{l}(-1)^{n-t-2}\qquad k(k+1)\ldots(k+n-t-3)\;+\\ +(-1)^{n-t-3}\binom{n-t-2}{1}k(k+1)\ldots(k+n-t-4)(p-t)\;+\\ +(-1)^{n-t-4}\binom{n-t-2}{2}k(k+1)\ldots(k+n-t-5)(p-t)(p-t-1)+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\quad(p-t)\;(p-t-1)\;\ldots.\;(p-n+3)\end{array}\right]$$

dann aber, die Coefficienten mit Hilfe der (142) reduzirend, zur folgenden einfacheren:

$$\underset{t}{\mathbf{M}}_{p+1}=p\;(p-1)\;(p-2)\;\ldots..\;(p-t+1)\;(p-t-k)\;(p-t-k-1)\;\ldots..\;(p-k-n+4)\times$$

$$(150)\qquad\times\;(p-k-n+3)\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2.3\ldots(t+1)}\;(p-k-n+2)\;\ldots..\;(p-k-n-t+1)\;\mathbf{X}^{(t+1)}\\ +\frac{1}{2.3\ldots(t+1)}\;(p-k-n+2)\;\ldots..\;(p-k-n-t+2)\;\mathbf{X}^{(t+1)}_{n-1}\\ +\frac{1}{1.2\;\ldots\ldots.\;t}\;(p-k-n+2)\;\ldots..\;(p-k-n-t+3)\;\mathbf{X}^{(t)}_{n-2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\;\mathbf{X}_{n-t-2}\end{array}\right]$$

Sie belehrt uns, dass $\underset{t}{\mathbf{M}}_{p+1}$ der Nulle gleich werde nicht nur für $p=0$, $p=1$, ... $p=t-1$, d. h. in den Werthen der Anfangscoefficienten z', z'', ..., wo diess übrigens an und für sich

klar ist und aus der Gestalt der Ausdrücke für P_0, P_1, ... unmittelbar erhellt, sondern auch noch für eine andere Reihe von Werthen des Stellenzeigers p, nämlich:

$$p = k + t, \quad k + t + 1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad k + n - 3,$$

so dass also auch die folgende Gruppe von mit M bezeichneten Coefficienten verschwindet:

$$\underset{t}{M}_{k+t+1}, \quad \underset{t}{M}_{k+t+2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \underset{t}{M}_{k+n-2}.$$

Diess sind aber gerade die zur $(t+2)^{ten}$ Verticalreihe in der Formelgruppe (146) gehörigen M, und wir schliessen hieraus endlich, dass alle in derselben die Bezeichnung M tragenden, gleichsam ein Dreieck bildenden Coefficienten, im Ganzen $\frac{n(n-1)}{2}$ an der Zahl der Nulle gleich werden. Nach diesen Erhebungen können wir es bereits versuchen, Aufschluss zu erhalten über die Darstellbarkeit oder Nichtdarstellbarkeit des einen particulären Integrales in Reihenform, das den Divisor $(x-\alpha)^k$ besass und durch Multiplication mit dieser Potenz davon befreit wird, und auch insoferne, als es der Reihenentwicklung nicht widerstreben sollte, über den Bau seiner Coefficienten. Zuvörderst ist nachgewiesen, dass der Auffindung endlicher Werthe von z', z'', ... $z^{(k-1)}$ niemals ein Hinderniss im Wege stehe; es lässt sich also z bis zu dem Gliede mit $(x-\alpha)^{k-1}$ ohne Anstand in eine Reihe entwickeln, $z^{(k)}$ jedoch, welches aus der ersten der Gleichungen (146) zu ziehen ist, bekommt, wie bereits gesagt, den Coefficienten Null, und erhält, weil (k) im Allgemeinen nicht verschwinden wird, einen unendlichen Werth. Die für z aufgestellte Reihe wird daher, angefangen vom $(k+1)^{sten}$ Gliede, zur Darstellung dieses particulären Integrales unbrauchbar, und man wird dem lästigen Unendlichwerden von $z^{(k)}$ in der Regel nur dadurch entgehen können, dass man auch $z=0$ nimmt, oder mit anderen Worten, dieses eine Integral, mit dessen Entwicklung man sich beschäftigt hat, abschafft. Hiemit werden aber alle $n-1$ Gleichungen (146) für beliebige $z^{(k)}$, $z^{(k+1)}$, ... $z^{(k+n-2)}$ identisch erfüllt. Diese Coefficienten bleiben daher willkührlich, und können in der ferneren Rechnung die Rolle von Integrationsconstanten übernehmen. Die auf die (146) folgenden Bestimmungsgleichungen liefern nun für $z^{(k+n-1)}$, $z^{(k+n)}$, ... nach diesen $n-1$ Constanten lineare Werthe, folglich ist die fernere Rechnung mit der Entwicklung von $n-1$ neu aufgetretenen particulären Integralen beschäftigt, denen beziehlich die constanten Factoren $z^{(k)}$, $z^{(k+1)}$ ..... $z^{(k+n-2)}$ angehören, und die dem zufolge der k^{ten}, $(k+1)^{sten}$, ... $(k+n-2)^{ten}$ Potenz von $x-\alpha$ proportional sind. Das Alles aber haben wir bereits früher gewusst und auch vorhergesagt. Mit dem einen particulären Integrale jedoch, um dessenwillen wir die gegenwärtige Rechnung eben einleiteten, hat es jedoch eine noch räthselhaft scheinende Bewandtniss.

Es ist nicht immer nöthig, $z=0$ anzunehmen, wenn man $z^{(k)}$ unbestimmt und endlich haben will; es kann gelegentlich auch $(k)=0$ sein, und dann ist die erste der Gleichungen (146) für jedes z und $z^{(k)}$ identisch erfüllt. Diess genügt aber noch durchaus nicht zur Darstellbarkeit von z in Reihenform, denn jetzt gibt die zweite der Gleichungen (146) einen unendlichen Werth von $z^{(k+1)}$, es sei denn, dass auch $(k+1)=0$ ausfällt, in welchem Falle auch dieser zweiten identisch genügt ist. Nun kommt aber im Unendlichwerden die Reihe an den durch die dritte Gleichung be-

stimmten Werth von $z^{(k+2)}$, es wäre denn, dass identisch $(k+2)=0$ ist. Mit einem Worte, es ist zur Darstellbarkeit dieses einen z in Reihenform nothwendig, dass zwischen den constanten Parametern der Differentialgleichung die $n-1$ Bedingungsgleichungen:

$$(k) = (k+1) = \dots\dots\dots = (k+n-2) = 0$$

erfüllt seien, und ist auch nur einer einzigen unter ihnen nicht Genüge geleistet, so hört auch die Darstellbarkeit von z in Reihenform auf. Nach den analytischen Erfahrungen, die wir im vorigen und in diesem Paragraphe gemacht haben, liegt wohl die Vermuthung sehr nahe, dass diess gewissen Transcendenten zuzuschreiben sei, die sich in dem Integrale vorfinden. Es biethen sich aber auch alsogleich die Fragen: Ist diess ein blosser $log(x-\alpha)$ und wenn so, wie ist es möglich, dass die Nichtanwesenheit dieser einzigen Transcendente in einer einzigen Function von $n-1$ Bedingungsgleichungen abhängt? oder sind vielleicht deren mehrere wesentlich von einander verschiedene vorhanden, wie $log(x-\alpha)$, $log^2(x-\alpha)$, $log^3(x-\alpha)$, ... und wenn dem so wäre, welche ist ihre Beschaffenheit, Zahl und Anordnung? Unsere bisherigen Betrachtungen geben zur Beantwortung dieser Fragen keinen Anhaltspunct und es stellt sich lediglich als entschiedene Thatsache heraus, dass ein particuläres Integral einer Differentialgleichung, welchem ein Nenner, wie $(x-\alpha)^k$ zugefallen ist, dessen k eine ganze positive Zahl vorstellt, der directen Entwicklung in Reihen widerstrebe und zwar nicht nur wegen dieses Nenners, sondern noch überdiess wegen gewisser anderer, annoch zu ermittelnder, darin enthaltenen analytischen Elemente, die einer solchen Entwicklung widerstreben, und deren Abwesenheit durch die $n-1$ Gleichungen (146) bedingt ist, und doch würden uns die hierortigen Untersuchungen sehr wenig nützen, wenn wir nicht im Stande wären, die obigen Fragepuncte zu erledigen. Es muss uns daher sehr darum zu thun sein, über dieselben ausführlichen Aufschluss zu erhalten. Zu diesem Zwecke bringen wir uns in Erinnerung, dass auch im vorhergehenden Paragraphe, als wir es zu thun hatten mit einem particulären Integrale, welches den Factor $(x-\alpha)^k$ besass, und durch seine Anwesenheit alle übrigen der Herrschaft der Mac-Laurin'schen Formel entzog, wenn nicht $n-1$ Bedingungsgleichungen walteten, die durch Auftauchen unendlicher Coefficienten unterbrochene Reihenentwicklung keineswegs geeignet war, diese analytische Erscheinung zu erklären, und dass wir uns genöthigt sahen, die Befreiung der Differentialgleichung von dem einen in Reihenform darstellbaren Integrale zu bewirken. Dieser Kunstgriff ist es nun, der auch gegenwärtig von Erfolg zu werden verspricht, nur scheint seine Anwendung schwieriger, weil es nicht ein einziges particuläres Integral, sondern deren $n-1$ an der Zahl gibt, die hier direct entwickelbar sind, wir folglich von allen $n-1$ solchen befreien müssen, enthalten in der Formel:

$$y = c_0 y_0 + c_1 y_1 (x-\alpha) + c_2 y_2 (x-\alpha)^2 + \dots\dots + c_{n-2} y_{n-2} (x-\alpha)^{n-2}. \tag{151}$$

Es geschieht diess bekanntlich durch die Methode der Variation der Constanten, in deren Gefolge die Auflösung eines Systemes von Gleichungen des ersten Grades und die Integration mehrerer Eliminationsgleichungen erscheint, Rechnungsoperationen, deren wirkliche Durchführung wohl bedeutenden Schwierigkeiten unterliegen dürfte. Es geschieht jedoch oft auf dem Gebiethe der Analysis, dass ein

gewisses Rechnungsresultat, zu welchem man in aller Vollständigkeit nur schwer oder gar nicht zu gelangen im Stande ist, seiner Form nach doch mit Leichtigkeit mit Hilfe sehr einfacher Betrachtungen erkannt zu werden vermag, dass sich also gewissermassen etwas in der Ausführung schwer und in der Idee sehr leicht herausstellen kann, und diess ist hier gerade der Fall. Man erhebt sich nämlich vermittelst der oberwähnten Methode der Variation der Constanten von dem unvollständigen Integrale (151) zu dem vollständigen, mit n Constanten versehenen dadurch, dass man die Coefficienten $c_0, c_1, \ldots c_{n-2}$ auf passende Weise in Functionen von x umgestaltet. Jede von ihnen wird, wenn man den in der Methode bezeichneten Weg geht, gegeben durch eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, die sich aber, weil sie kein undifferenzirtes c enthält, wie eine der ersten Ordnung behandeln und integriren lässt.

Alle zur Bestimmung von $c_0, c_1, \ldots\ldots c_{n-2}$ dienenden Gleichungen, erhalten durch einen langwierigen Eliminationsprocess, kommen nämlich vor in der Gestalt:

$$c'' - \theta c' = 0, \tag{152}$$

allwo θ eine Function von x andeutet, die aus den $y_0, y_1, \ldots\ldots y_{n-2}$ und ihren Differentialquotienten algebraisch zusammengesetzt ist, und somit noch keinen Logarithmus enthalten kann. Integrirend erhält man:

$$c' = e^{\int \theta dx}, \tag{153}$$

allwo sich auch noch kein Logarithmus vorfindet, weil der etwa durch die Integration von θdx erzeugte alsogleich eine Verwandlung erfährt in einen Factor der Exponentialgrösse und erst:

$$c = \int dx e^{\int \theta dx} \tag{154}$$

vermag einen solchen wirklich zu enthalten. Auch der Divisor $x - \alpha$ wird jedem der Werthe von θ zu wiederholten Malen angehören, weil es sonst kein particuläres Integral geben könnte mit dem Nenner $(x-\alpha)^k$, was wir doch gegenwärtig voraussetzen. Aus diesen Überlegungen leiten wir jetzt der Form nach folgendes System von Werthen für $c_0, c_1, \ldots\ldots c_{n-2}$ ab:

$$c_0 = \int \frac{\varphi_0 dx}{(x-\alpha)^k}, \quad c_1 = \int \frac{\varphi_1 dx}{(x-\alpha)^{k+1}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad c_{n-2} = \int \frac{\varphi_{n-2} dx}{(x-\alpha)^{k+n-2}}, \tag{155}$$

so dass jetzt das bereits completirte allgemeine Integral folgendermassen aussieht:

$$y = c_0 y_0 + c_1 y_1 (x-\alpha) + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{n-2} y_{n-2} (x-\alpha)^{n-2} + \\ + c_{n-1} \left[y_0 \int \frac{\varphi_0 dx}{(x-\alpha)^k} + y_1 (x-\alpha) \int \frac{\varphi_1 dx}{(x-\alpha)^{k+1}} + \ldots\ldots + y_{n-2} (x-\alpha)^{n-2} \int \frac{\varphi_{n-2} dx}{(x-\alpha)^{k+n-2}} \right]. \tag{156}$$

Es wird hier nicht in Abrede gestellt, dass einige der Functionen: $\varphi_0, \varphi_1, \ldots\ldots$ aufsteigend nach $x - \alpha$ in Reihen umgestaltet auch anfangen können mit anderen, höheren als der 0ten Potenz dieses Binoms. φ_0 jedoch muss anfangen mit einer Constante, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_{n-2}$ aber können höchstens beginnen mit der 1sten, 2ten, ... $(n-3)$ten Potenz. Die Ursache hievon wird sich alsogleich klar herausstellen, und es thut auch ein solches Vorkommen an und für sich wenig zur Sache.

Die eben hingestellte Form des allgemeinen Integrales beantwortet nun vollständig die gestellten Fragen, und gibt Aufschluss über die Beschaffenheit der $n-1$ Bedingungsgleichungen. jenige Transcendente, welche die Entwicklung in Reihen des einen particulären Integrales hinder nämlich der einzige: $log(x-\alpha)$. Er erscheint jedoch in allen $n-1$ Bestandtheilen desselben die Ansicht der zweiten Reihe der Formel (156) lehrt, denn es besitzen die Ausdrücke:

$$\frac{\varphi_0}{(x-\alpha)^k}, \quad \frac{\varphi_1}{(x-\alpha)^{k+1}}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad \frac{\varphi_{n-2}}{(x-\alpha)^{k+n-2}},$$

in der Regel beziehlich Glieder, wie folgt:

$$\frac{a_0}{x-\alpha}, \quad \frac{a_1}{x-\alpha}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad \frac{a_{n-2}}{x-\alpha}.$$

Sie sind beziehlich das k^{te}, $(k+1)^{ste}$, ... $(k+n-2)^{te}$ in ihren Reihen. Multiplizirt ma mit dx und integrirt sodann, so erhält man aus jedem von ihnen einen Logarithmus. Der mit Nenner $(x-\alpha)^k$ versehene particuläre Werth enthält also mehrere logarithmische Glieder. Summe ist:

$$(157) \qquad \left[a_0 y_0 + a_1 y_1 (x-\alpha) + \dots\dots\dots + a_{n-2} y_{n-2} (x-\alpha)^{n-2}\right] log\,(x-\alpha),$$

und es kann offenbar jede Spur dieser Transcendente aus denselben nur dann herausfallen, wenn zu gleicher Zeit:

$$(158) \qquad a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad \dots\dots\dots \quad a_{n-2} = 0$$

hat. Hier wären also unsere $n-1$ Bedingungsgleichungen und man sieht klar, wie es kommen dass sie alle nur von der Nichtexistenz einer einzigen Transcendente sprechen können, imgleiche es komme, dass die Reihenentwicklung durch eine Gruppe von $n-1$ aufeinanderfolgenden u lichen Coefficienten unterbrochen wird. Jetzt sind wir im Stande, auch eine allgemeine, aus stimmten Integralzeichen zusammengefügte Integralformel aufzustellen, welche abermals die Bedingungsgleichungen des Nichtvorhandenseins einer einzigen Transcendente $log(x-\alpha)$ versinı in einer etwas anderen, aber der Klarheit der Anschauung nicht minder zuträglichen Weise. nämlich eine derjenigen, die wir bereits im vorhergehenden Paragraphe unter (59) angeführt h und zwar die letzte der alldort ersichtlichen, nämlich:

$$(159) \qquad y = \eta_1 \int \eta_2\, dx \int \eta_3\, dx \quad \dots\dots\dots \int \eta_{n-1}\, dx \int \frac{\eta_n\, dx}{(x-\alpha)^{k+n-1}}.$$

In der That, man denke sich die $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ in Reihenform, und zwar aufsteigend nach x geordnet, sodann aber alle angedeuteten Integrationen wirklich durchgeführt. Man wird diese Recl von $\int \frac{\eta_n\, dx}{(x-\alpha)^{k+n-1}}$ anfangen müssen und wird bei dieser ersten Integration ein einziges log mısches Glied gewinnen; wir wollen es durch $a_1 log(x-\alpha)$ bezeichnen und zu dem bemerken, ihm ein Polynom vorangehe von $k+n-2$ Gliedern, die alle $x-\alpha$ im Nenner besitzen. Nun ı

plizìren wir das so erhaltene ganze Resultat mit $\eta_{n-1}\,dx$ und integriren es, so erhalten wir logarithmische Glieder von zwei Sorten, denn einmal bekommt man ein solches aus der Integration von $a_1\,\eta_{n-1}\log(x-\alpha)\,dx$, denn man hat theilweise integrirend:

$$\int \eta_{n-1}\log(x-\alpha)\,dx = \log(x-\alpha)\int\eta_{n-1}\,dx - \int\frac{dx}{x-\alpha}\int\eta_{n-1}\,dx, \tag{160}$$

und man sieht zugleich, weil $\int\eta_{n-1}\,dx$ bereits mit der ersten Potenz von $x-\alpha$ anfängt, oder mit anderen Worten, aus Gliedern zusammengesetzt ist, deren Gradzahlen die der in η_{n-1} befindlichen um die Einheit überschreiten, dass durch diese zweite Integration der aus der ersten hervorgegangene $\log(x-\alpha)$ nicht abgeschafft, sondern um einen Factor $x-\alpha$ bereichert worden ist, andererseits aber kommt noch ein neuer Logarithmus dieser Art zum Vorschein, weil das oben genannte, aus $k+n-2$ Glieder zusammengesetzte Polynom mit η_{n-1} multiplizirt, abermals ein Glied liefern wird von der Form $\frac{a_2}{x-\alpha}$, welches mit dx multiplizirt und integrirt abermals ein Glied $a_2\log(x-\alpha)$ liefern wird. Nun kommt die Multiplication mit $\eta_{n-1}\,dx$. Die darauffolgende Integration setzt dann zu einem jeden der früheren zwei logarithmischen Glieder einen Factor $x-\alpha$ und erzeugt zudem ein neues der Art $a_3\log(x-\alpha)$ u. s. f. bis man alle derartigen $n-1$ Operationen erschöpft hat, in deren Gefolge $n-1$ logarithmische Glieder auftreten und zwar die:

$$a_{n-1}\log(x-\alpha),\quad a_{n-2}(x-\alpha)\log(x-\alpha),\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad a_1(x-\alpha)^{n-2}\log(x-\alpha),$$

von welchen der in Rede stehende Werth von y nur dann ganz frei erscheint, wenn die $n-1$ Bedingungsgleichungen:

$$a_1 = a_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = a_{n-2} = a_{n-1} = 0 \tag{161}$$

erfüllt sind. Hieran lassen sich noch folgende Bemerkungen anfügen: Die Form (159) ist nicht die einzige, welche das allgemeine Integral einer solchen Differentialgleichung anzunehmen vermag; sie ist nur diejenige, der die folgendermassen geordnete Gruppe von Werthen von k entspricht:

$$k = 0,\ -1,\ -2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ -n+2,\ k,$$

sie kann daher gelegentlich ersetzt werden, auch wenn gar keine Bedingungsgleichung erfüllt ist, durch so viele andere, als das Product $1.2\ \ldots\ldots\ n-1$ Einheiten enthält. Sie werden sich aber dadurch von der (159) wesentlich unterscheiden, dass sie einer Differentialgleichung mit einem einzigen Factor des ersten Coefficienten nicht eigenthümlich, sondern nur gelegentlich angehören. Wäre einer oder einigen der Bedingungsgleichungen (161), etwa s solchen identisch Genüge geleistet; so könnte anstatt der letzten und in jedem Falle giltigen Hauptformel (159) irgend eine der früheren, oder eine ähnliche gesetzt werden, in der das mit dem Nenner $(x-\alpha)^k$ versehene particuläre Integral nicht den letzten n^{ten} Platz einnimmt, sondern den $(n-s)^{\text{ten}}$ und nicht von $n-1$ Integralzeichen beherrscht wird, sondern nur von $n-s-1$ solchen, und jetzt sind wir bereits im Stande, die volle Bedeutung eines Divisors $(x-\alpha)^k$, unter k eine ganze positive Zahl verstanden, der gehörig ist zu irgend einem

Integrale und den Nutzen, der daraus uns entspringen kann, klar einzusehen. Die Bedeutung ist eine ähn liche, wie die eines Factors $(x-\alpha)^h$. Es weisen nämlich beide hin, auf eine Transcendente $log(x-c$ nur mit dem Unterschiede, dass diese gerade in dem Integrale nicht enthalten ist, welches den Factor ha sondern in den übrigen, während sie ausschliesslich demjenigen angehört, das den Divisor trägt. Bedingun gen der Nichtexistenz dieser Transcendente bestehen $n-1$ an der Zahl in beiden Fällen, allein sie zwi gen im ersteren nur zur Annahme eines einzigen Integralzeichens, während sie im anderen in der Reg $n-1$ solche gebietherisch erheischen und falls s Bedingungsgleichungen erfüllt wären, mindestens $n-s-$ solche im allgemeinen Integrale fordern. Ein Divisor $(x-a)^k$ lehrt daher mehr und spricht präciser a ein Factor $(x-\alpha)^h$, verdient sohin ein sorgsameres Augenmerk. Um sich von dem Nutzen, den er ge währt, einen vorläufigen Begriff zu machen, stelle man sich ein Integrationsverfahren vor, welches folgender Weise eingeleitet wird: Man sucht bei einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung irger ein particuläres Integral, vielleicht dasjenige, welches sich am leichtesten auffinden lässt, vielleicht so gar in geschlossener Form. Es heisse $y=\eta_1$. Man befreit die Gleichung davon durch die Substitution

$$y=\eta_1\int z dx \tag{162}$$

oder eine andere passendere. Die Transformirte in z ist jetzt von der Ordnung $n-1$. Hat daher jen in y ein particuläres Integral mit dem Nenner $(x-\alpha)^k$; so ist ein solches gemeiniglich auch vor handen als Bestandtheil von z. War keine der $n-1$ Bedingungsgleichungen der directen Darstell barkeit in Reihenform bei der in y erfüllt; so bestehen bei jener in z solcher Bedingungsgleichunge doch nur $n-2$ an der Zahl und gab es in der ersteren $n-s-1$ unerfüllte; so wird die zweit deren $n-s-2$ aufweisen. Suchen wir nun von der Gleichung in z ein zweites particuläres Integr $z=\eta_2$ und befreien von demselben; so wird die Anzahl der oberwähnten Bedingungsgleichunge offenbar wieder um die Einheit geringer. Sie wird sich sohin nach einer gewissen im Vorhinein be kannten Anzahl solcher Befreiungen endlich zurückziehen auf Null und es wird somit der Platz ange deutet sein, an welchem man das eine mit dem Nenner $(x-\alpha)^k$ versehene particuläre Integral allei falls zu suchen berechtigt ist. Diess ist aber ein Vortheil aus dem Grunde, weil die Bedingungen de Existenz einer geschlossenen Form für der ersten Classe angehörige ganze und gebrochene Function nicht dieselben sind, weder der Form noch der Anzahl nach, und der Vortheil besteht darin, dass ma in der Lage ist, vergebliche Untersuchungen zu vermeiden. Vergleicht man die Hauptform (43) d vorhergehenden Paragraphes, die sich uns darboth, als wir einen Genüge leistenden Werth voraus setzten mit dem Factor $(x-\alpha)^h$, mit derjenigen, zu der wir hier gelangt sind, der (159) nämlic und die einem Genüge leistenden Werthe entspricht mit dem Nenner $(x-\alpha)^k$; so sieht man, da Ersteres sich unter allen den ersten Platz, Letzteres hingegen lieber den allerletzten aneignet. Komm Factoren, wie $(x-\alpha)^h$ in mehreren Integralen vor mit ganzen und positiven Exponenten $h_1, h_2, \ldots$ so nehmen sie gern die Stellen ein, die ihnen ihren numerischen Werthen nach natürlich zukomme so jedoch, dass die grösseren vorangehen, die geringeren nachfolgen. Es entsteht nun die Frag welches das Verhalten sein werde mehrerer gelegentlich vorhandener particulärer Integrale mit d

(167) $$y = \eta_1 \int \eta_2 \, dx \int \eta_3 \, dx \; \ldots\ldots\ldots\ldots \int \frac{\eta_{n-1} \, dx}{(x-\alpha)^{k_2+n-2}} \int \frac{\eta_n \, dx}{(x-\alpha)^2}$$

(168) $$y = \eta_1 \int \eta_2 \, dx \int \eta_3 \, dx \; \ldots\ldots\ldots\ldots \int \frac{\eta_{n-1} \, dx}{(x-\alpha)^{k_2+n-1}} \int \eta_n \, dx \, .$$

die erstere den Vorzug allgemeinerer Giltigkeit besitzt. In ihr nimmt der den Divisor $(x-\alpha)^{k_2+1}$ tragende Bestandtheil den letzten Platz ein; und da bei Berechnung des Integrales $\int \frac{\eta_n \, dx}{(x-\alpha)^2}$ bereits das zweite Glied logarithmisch ausfällt, so wird offenbar sich dasselbe sagen lassen auch von diesem letzten particulären Integrale, und es wird schon der zweite Coefficient z' seiner Reihenentwicklung einen unendlichen Werth annehmen müssen, so wie es in der Regel auch wirklich der Fall ist. Die zweite dieser Formen hingegen erscheint als eine speciellere, nur dann geltende, wenn die Bedingungsgleichung $[1] = 0$ erfüllt ist. In ihr nimmt der in Rede stehende Bestandtheil den vorletzten Platz ein, und die ihn darstellende Reihe vermag erst nach dem $(k_2+1)^{\text{sten}}$ Gliede einen unendlichen Coefficienten zu erhalten. Um jedoch genauere Einsicht zu erhalten in den wirklichen Sachverhalt, wird es nothwendig sein und genügen, die allgemeine unserer Bestimmungsgleichungen, die (137) nämlich ins Auge zu fassen, die früher zur Bestimmung von $z^{(p+1)}$ gedient hat. Bei dem durchgängigen Verschwinden von M_{p+1} jedoch den Werth gibt des nächst niedrigeren Coefficienten $z^{(p)}$, der gebrochen ist durch $\underset{0}{M}_{p+1}$, so dass also $z^{(p)}$ nur dann unendlich erscheint, wenn $\underset{0}{M}_{p+1}$ verschwindet. Für diesen Coefficienten besteht aber die Formel (148) in voller Richtigkeit, nur wird man sie durch Subtraction des identisch verschwindenden Gleichungspolynomes (163) von dem darin befindlichen ähnlichen Trinome mit Beziehung auf die ähnliche Beziehungsgleichung (164) noch einfacher stellen können, wie folgt:

(169) $$\underset{0}{M}_{p+1} = p\,(p-k_1)\,(p-k_1-1)\,\ldots\ldots\,(p-k_1-n+3)\,(p+k_2-k_1)\,X'.$$

Dieser Coefficient wird also der Nulle gleich, erstens für $p=0$, allein dieser Werth des Stellenzeigers p hat für uns keine Bedeutung, da wir keine 0te Bestimmungsgleichung besitzen, ferner zweitens für die folgende Gruppe unmittelbar auf einander folgender, im Abstande von einer Einheit von einander stehenden Zahlwerthe:

$$p = k_1, \quad k_1+1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad k_1+n-3,$$

woraus folgt, dass die folgenden $n-2$ Coefficienten der Nulle gleich seien:

$$\underset{0}{M}_{k_1+1}, \quad \underset{0}{M}_{k_1+2}, \quad \underset{0}{M}_{k_1+3}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \underset{0}{M}_{k_1+n-2}.$$

Sie gehören in eben so vielen successiven Gleichungen beziehlich zu $z^{(k_1)}$, $z^{(k_1+1)}$, ... $z^{(k_1+n-3)}$, welche daher alle unendliche Werthe bekommen. Endlich wird $\underset{0}{M}_{p+1}$ auch noch verschwinden für $p = k_1 - k_2$, was übrigens offenbar nur dann stattfinden kann, wenn $k_1 > k_2$ ist. Es ist daher auch noch $\underset{0}{M}_{k_1-k_2+1} = 0$ und folglich $z^{(k_1-k_2)}$ unendlich. Um den Inbegriff aller verschwindenden Coefficienten M vollständig kennen zu lernen, sind wir nun noch genöthigt, die ebenfalls vollkommen richtige Formel (150) für $\underset{1}{M}_{p+1}$ ein wenig ins Auge zu fassen. Man sieht sehr bald, dass sie keine Verän-

derung erleide, dass folglich alles das an einem früheren Orte Gesagte von derselben auch hier gelte. Es verschwindet nämlich allgemein die folgende Coefficientengruppe:

$$\underset{t}{\mathrm{M}}_{k_1+t+1}, \quad \underset{t}{\mathrm{M}}_{k_2+t+2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \underset{t}{\mathrm{M}}_{k_1+n-2}$$

für alle t von $t=1$ angefangen bis $t=n-3$. Sie bilden sämmtlich in einer Formelgruppe, wie die (146) ein gewisses Dreieck, aus dem man sich jedoch die erste Verticalreihe und mit ihr die oberste Gleichung als gestrichen denken muss. Diesem Umstande zufolge wird auch die Anzahl der Bedingungsgleichungen, unter welchen die $z^{(k_1)}$, $z^{(k_1+1)}$, ... $z^{(k_1+n-2)}$ keine unendlichen Werthe, sondern unbestimmte erhalten, um die Einheit geringer und gleich $n-2$. Alles dieses entspricht vollkommen der obangeführten Form des allgemeinen Integrales (167) und (168), und belehrt uns, dass in der Regel das particuläre Integral mit dem Nenner $(x-\alpha)^{k_2}$, also mit dem numerisch kleineren k dem anderen mit dem Nenner $(x-\alpha)^{k_1}$ versehenen, sohin mit dem numerisch grösseren k vorangehe, oder fasst man alle Potenzen von $x-\alpha$ mit ganzen Exponenten, welche als Factoren oder Divisoren der verschiedenen particulären Integrale dastehen und in den Anfangscoefficienten der Differentialgleichung durch einen Multiplicator $x-\alpha$ repräsentirt sind, insgesammt als Factoren auf mit den positiven und negativen Exponenten h_1, h_2 ..... $-k_1-k_2$, so sind sie absteigend geordnet, wenn man die Voraussetzung zu Grunde legt, dass von zwei negativen Zahlen diejenige als die grössere betrachtet wird, die den kleineren numerischen Werth hat. Wir glauben nicht nöthig zu haben, von dieser Regel den allgemeinen Beweis noch durch die Betrachtung des Falles zu stützen, wo die Anfangscoefficienten ρ, $\rho-1$, ... 2, 1, 0 Factoren $x-\alpha$ darbiethen und die algebraische Gleichung in k einige oder alle Wurzeln ganz und positiv besitzt; wir meinen vielmehr, unsere Untersuchungen seien hinreichend, um auf Grundlage derselben alle logarithmischen Transcendenten namhaft machen zu können, die sich in der allgemeinen Integralformel einer bestimmten Differentialgleichung allenfalls vorfinden können.

Vor allem anderen ist es klar, dass kein $\log(x-\alpha)$ im Integrale einer Gleichung erscheinen könne, wenn sich nicht der Factor $x-\alpha$ im ersten oder überhaupt in den Anfangscoefficienten vorfindet, so dass also nur den Factoren des ersten Coefficienten Logarithmen im Integrale entsprechen können, und diess auch nur dann, wenn ihnen ein Exponent k angehört, und wenn derselbe eine ganze Zahl ist, gleichviel ob positiv oder negativ. Will man daher die in Rede stehenden logarithmischen Elemente angeben, so muss man damit anfangen, die Gleichung in k auf ganze Wurzeln zu untersuchen. Hierbei sind aber diejenigen, die als Functionen constanter Parameter erscheinen, nicht zu vergessen, ja vielmehr besonders zu beachten, da sie eine Unzahl verschiedener ganzer, oder gebrochener, positiver oder negativer Bedeutung anzunehmen vermögen. In ihrer completen Gestalt, so wie wir sie im §. 1 der Transformationslehre kennen gelernt haben, sieht die gedachte Gleichung in k folgendermassen aus:

$$k\,(k+1)\,\ldots\ldots\,(k+n-\rho-1)\left[(k+n-\rho)\,\ldots\ldots\,(k+n-1)\,\frac{\mathfrak{X}_n}{(x-\alpha)^\rho}-\right.$$
$$\left.-\,(k+n-\rho)\,\ldots\ldots\,(k+n-2)\,\frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{(x-\alpha)^{\rho-1}}+\,\ldots\ldots\ldots\,+(-1)^\rho\,\mathfrak{X}_{n-\rho}\right]\Bigg\}_\alpha=0. \quad ($$

Sie zerfällt natürlich in zwei Gleichungen, nämlich in die:

(171) $$k\,(k+1)\,\ldots\ldots\ldots\,(k+n-\rho-1)=0,$$

und:

(172) $$\left.(k+n-\rho)\ldots(k+n-1)\frac{\mathfrak{X}_n}{(x-\alpha)^\rho}-(k+n-\rho)\ldots(k+n-2)\frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{(x-\alpha)^{\rho-1}}+\ldots+(-1)^\rho\,\mathfrak{X}_{n-\rho}\right\}_\alpha=0.$$

Die Wurzeln $0, -1, -2, \ldots\ldots -n+\rho+1$ der ersteren deuten auf gar keine logarithmischen Elemente, nur die ganzen Wurzeln der letzteren lassen solche vermuthen, aber nicht mit Sicherheit erschliessen, und man gewinnt die volle Überzeugung von ihrer Existenz nur durch die wirkliche Integration in Form von aufsteigenden Reihen. Um aber Aufschluss zu erhalten über die Art des Vorkommens dieser Transcendenten, ist es am allererspriesslichsten, sich die aus unbestimmten Integralen zusammengesetzte Form zu bilden, was man auf folgende Weise bewerkstelligt: Man nehme die sämmtlichen Wurzeln der (170) mit entgegengesetztem Zeichen, gewissermassen in allen particulären Integralen Factoren statt der Divisoren $(x-\alpha)$ voraussetzend, und ordne sie sodann in drei Gruppen, erst die positiven der (172), dann die sämmtlichen, ebenfalls positiven der (171) und endlich die negativen, die wieder der früheren (172) angehören. Die der ersten der (171) angehörigen ordne man aufsteigend, d. h. so:

(173) $$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots\ldots\ldots\quad n-\rho-1.$$

Die mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln der (172) hingegen müssen in zwei Gruppen, die positiven und negativen getheilt, absteigend geordnet werden. Sie seien:

$$h_1 > h_2 > h_3 > \ldots\ldots > h_\sigma \quad \text{und} \quad -k_1 > -k_2 > \ldots\ldots > -k_\tau.$$

Die Gruppe (173) ist zwischen diese beiden hineinzuschieben, wie folgt:

(174) $$h_1,\ h_2,\ \ldots\ldots\ h_\sigma,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ n-\rho-1,\ -k_1,\ -k_2,\ \ldots\ldots\ -k_\tau,$$

so handelt es sich jetzt darum, in der allgemeinen Integralformel:

(175) $$y=\eta_1\,(x-\alpha)^{a_1}\int\eta_2\,(x-\alpha)^{a}\,dx\int\eta_3\,(x-\alpha)^{a_3}\,dx\,\ldots\ldots\int\eta_n\,(x-\alpha)^{a_n}\,dx$$

die Exponenten $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ anzugeben. Ihre Werthe sind:

(176) $$\begin{aligned} a_1 &= h_1 \\ a_2 &= h_2-h_1-1 \\ a_3 &= h_3-h_2-1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} &= -k_{t-1}+k_{t-2}-1 \\ a_n &= -k_t+k_{t-1}-1. \end{aligned}$$

Sie werden erhalten, indem man von einer jeden, der in der Gruppe (174) vorkommenden Zahlen die nächstvorhergehende und die Einheit subtrahirt. Es werden unter ihnen positive vorkommen und nega-

gleichung zwei Factoren $(x-\alpha)$, der zweite aber gar keinen, so erschliesst die Formenlehre daraus wohl ein particuläres Integral:

$$e^{\int \frac{\varphi dx}{(x-\alpha)^2}}.$$

Dieses behindert aber die Darstellbarkeit der übrigen particulären Integrale in aufsteigender Reihenform in keiner Weise. Selbst widerstrebt es zwar derselben, sondert man aber daraus den exponentiellen Factor, der für $(x-\alpha)$ unstetig wird, nach den Vorschriften des §. 3 der Transformationslehre, so ist der andere Factor ganz ohne Anstand in diese Form zu bringen. Wir begegnen hier nirgends unendlichen Coefficienten und finden eben desshalb auch nirgends eine Gelegenheit, über die Gestalt des Integrales etwas Näheres zu erfahren. Um sich hievon zu überzeugen, braucht man nur wieder die Fundamentalgleichungen (3), (4), (5), (6) und (7) ins Auge zu fassen, und sich zu erinnern, dass unter der gemachten Voraussetzung $X_n = X'_n = 0$ und X_{n-1} bereits von der Nulle verschieden sei. Man sieht dann alsogleich, dass die (3) $y^{(n-1)}$ liefere in linearer Function der: $y^{(n-2)}$, $y^{(n-3)}$, ... y', y und zwar gebrochen durch X_{n-1}; dass dem zufolge die (4) $y^{(n)}$ gebe in linearer Function derselben Constanten, gebrochen durch X^2_{n-1}. Ebenso gibt dann die (5) $y^{(n+1)}$ in linearer Function derselben Grössen, gebrochen durch X^3_{n-1} u. s. w. Es ist also klar, dass man nirgends in der Rechnung einem Divisor Null begegnet und überdiess, dass man mit der Entwicklung beschäftigt sei von $n-1$ particulären Integralen einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung, die ununterbrochen ohne Anstand vor sich geht, und dass folglich nur ein einziges, nämlich dasjenige, dem der Factor $(x-\alpha)^2$ des ersten Coefficienten angehört, sich der Entwicklung entziehe. Allein auch dieses kann man haben in Reihenform, wenn man nach §. 3 der Transformationslehre den exponentiellen Factor:

$$e^{\int\left[\frac{\lambda dx}{(x-\alpha)^2}+\frac{\mu dx}{x-}\right]}$$

davon sondert vermöge einer Transformation, die in die aufeinanderfolgenden Gleichungscoefficienten Factoren $x-\alpha$ beziehlich $2n-2$, $2n-4$, ... 2, 0, 0 bringt. Integrirt man dann diese Transformirte in Reihenform, woraus der andere, der ersten Functionsclasse angehörige Factor desselben einen particulären Integrales entspringt, so gelingt auch diese Integration ohne Anstand und die Rechnung wird nirgends durch das Erscheinen eines unendlichen Coefficienten unterbrochen. Hievon gibt wieder die blosse Ansicht der Fundamentalgleichungen (3) ..... (7) den Beweis. Da man nämlich in der transformirten Gleichung, von welcher die Rede ist, X_0 und X_1 von der Nulle verschieden, die übrigen Coefficientenwerthe hingegen X_2, X_3, ... X_n sammt einer gewissen Anzahl von Differentialquotienten als verschwindende Grössen zu betrachten hat, so gibt die (3) y' als dem y proportionalen Ausdruck gebrochen durch X_1; in Folge dessen erhält man aus (4) y'' abermals proportional dem y und gebrochen durch X_1^2; aus der (5) bekömmt man ebenso y''' proportional dem y und mit dem Nenner X_1^3 versehen u. s. w. Man kommt also nie zu einem verschwindenden Divisor, der die Rechnung unterbrechen könnte. Es ist nicht schwer, sich auch in allen übrigen ähnlichen Fällen zu überzeugen, dass der Entwicklung solcher particulären Integrale in aufsteigende Reihen kein Hinderniss im Wege stehe.

allein eben desshalb bringt sie in der Regel auch gar keinen Nutzen. Die erhaltenen Reihen convergiren meist nur zwischen engen Grenzen. Man kann sich zwar das allgemeine Integral denken in der Form:

$$y = \eta_1 \int \eta_2 \, dx \int \eta_3 \, dx \, \ldots\ldots\ldots \int \eta_n \, dx, \tag{177}$$

die mit unbestimmten Integralzeichen versehen ist; welche Stelle aber der für $x - \alpha$ unstetig werdende Bestandtheil darin einnehme, ob die erste, die letzte oder eine mittlere, diess zu entscheiden, liegt gar kein Grund vor, denn wo es sich auch immer befindet, so stört es doch nirgends die Entwicklungsfähigkeit der übrigen und büsst auch nirgends die seinige ein. Auch diess ist nicht schwer einzusehen, denn es genügt hiezu, nur zu zeigen, dass ein Differentialausdruck wie:

$$e^{\int \frac{\varphi \, dx}{(x-\alpha)^m}} \, . \, \mathfrak{Q} dx,$$

der Integration unterworfen, zu einem ähnlichen:

$$e^{\int \frac{\varphi \, dx}{(x-\alpha)^m}} \, \mathfrak{R}$$

führe, allwo $\mathfrak{R}$ ebenso gut wie $\mathfrak{Q}$ die Entwicklung in Reihen nach aufsteigenden Potenzen von $x - \alpha$ zulässt, und diess zwar für beliebige Werthe von m, den besonderen: $m = 1$ ausgenommen. Statuiren wir in der That:

$$\int e^{\int \frac{\varphi \, dx}{(x-\alpha)^m}} \, . \, \mathfrak{Q} dx = e^{\int \frac{\varphi \, dx}{(x-\alpha)^m}} \, . \, \mathfrak{R},$$

so ergibt sich hieraus unmittelbar, dass $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ in der Relation zu einander stehen, die durch die Gleichung:

$$(x-\alpha)^m \, \mathfrak{Q} = (x-\alpha)^m \, \mathfrak{R}' + \mathfrak{R} \varphi$$

ausgedrückt ist, die eine identische sein soll. Entwickeln wir in Reihen beiderseits aufsteigend nach Potenzen von $x - \alpha$:

$$\mathfrak{Q} = \mathrm{Q} + \mathrm{Q}' \frac{x-\alpha}{1} + \mathrm{Q}'' \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{R} = \mathrm{R} + \mathrm{R}' \frac{x-\alpha}{1} + \mathrm{R}'' \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{R}' = \mathrm{R}' + \mathrm{R}'' \frac{x-\alpha}{1} + \mathrm{R}''' \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi = \Phi + \Phi' \frac{x-\alpha}{1} + \Phi'' \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots$$

setzend und gehörig ordnend, so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$Q(x-\alpha)^m + Q'\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{1} + Q''\frac{(x-\alpha)^{m+2}}{1.2} + Q'''\frac{(x-\alpha)^{m+3}}{1.2.3} + \dots\dots\dots =$$

$$= R\Phi + \left[R\Phi' + R'\Phi\right]\frac{x-\alpha}{1} + \left[R\Phi'' + 2R'\Phi' + R''\Phi\right]\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} +$$

$$+ \left[R\Phi''' + 3R'\Phi'' + 3R''\Phi' + R'''\Phi\right]\frac{(x-\alpha)^3}{1.2.3} + \dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\left[\ m!\ \ R' + R\Phi^{(m)} + \binom{m}{1} R'\Phi^{(m-1)} + \binom{m}{2} R''\Phi^{(m-2)} + \dots + R^{(m)}\ \Phi\right]\frac{(x-\alpha)^m}{1.2.3\dots m} +$$

$$+\left[\frac{(m+1)!}{1!}R'' + R\Phi^{(m+1)} + \binom{m+1}{1}R'\Phi^{(m)} + \binom{m+1}{2}R''\Phi^{(m-1)} + \dots + R^{(m+1)}\Phi\right]\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{1.2.3\dots(m+1)} +$$

$$+\left[\frac{(m+2)!}{2!}R''' + R\Phi^{(m+2)} + \binom{m+2}{1}R'\Phi^{(m+1)} + \binom{m+2}{2}R''\Phi^{(m)} + \dots + R^{(m+2)}\Phi\right]\frac{(x-\alpha)^{m+2}}{1.2.3\dots(m+2)} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

die ihrerseits in eine unbeschränkte Menge anderer zerfällt, erhalten durch Gleichsetzen der Coefficienten derselben Potenzen von $x-\alpha$, nämlich in die:

$$\begin{aligned}
&R\Phi = 0\\
&R\Phi' + R'\Phi = 0\\
&R\Phi'' + 2R'\Phi' + R''\Phi = 0\\
&R\Phi''' + 3R'\Phi'' + 3R''\Phi' + R'''\Phi = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&m!\ R' + R\Phi^{(m)} + \binom{m}{1} R'\Phi^{(m-1)} + \binom{m}{2} R''\Phi^{(m-2)} + \dots\dots + R^{(m)}\ \Phi = m!\ Q\\
&\frac{(m+1)!}{1!}R'' + R\Phi^{(m+1)} + \binom{m+1}{1}R'\Phi^{(m)} + \binom{m+1}{2}R''\Phi^{(m-1)} + \dots\dots + R^{(m+1)}\Phi = \frac{(m+1)!}{1!}Q'\\
&\frac{(m+2)!}{2!}R''' + R\Phi^{(m+2)} + \binom{m+2}{1}R'\Phi^{(m+1)} + \binom{m+2}{2}R''\Phi^{(m)} + \dots\dots + R^{(m+2)}\Phi = \frac{(m+2)!}{2!}Q''\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{178}$$

Sie zeigen, dass die Anfangscoefficienten der Reihenentwicklung von $\mathfrak{R}$, m an der Zahl, wenn m ganz und positiv ist, in der Regel der Nulle gleich ausfallen, dass ferner die übrigen jederzeit endliche Werthe erhalten, die beziehlich mit den nie verschwindenden Nennern: $\Phi, \Phi^2, \Phi^3, \dots$ versehen sind; nie verschwindend darum, weil im entgegengesetzten Falle der Bruch $\frac{\varphi}{(x-\alpha)^m}$ einer Abkürzung fähig wäre, ein Umstand, dessen Nichtstattfinden man vorauszusetzen berechtigt ist. Hiebei ist es nicht wesentlich, dass m eine ganze positive Zahl sei, denn man kann die Entwickelbarkeit des $\mathfrak{R}$ in eine Reihe auch dann beweisen, wenn m gebrochen ist, ein Fall, in welchem bekanntlich eine mehrgliedrige Gruppe von particulären Integralen mit gleichem m vorhanden ist, nur frommt offenbar der Beweis zu Nichts, weil dann ohnehin eine andere Behandlung der Differentialgleichung einzutreten

zu sehen ist. Nach diesen Vorbereitungen kann man bereits die Anzahl der möglichen logarithmischen Transcendenten erkennen; sie ist nämlich gleich der Anzahl der ganzen, gleichviel ob positiven, ob negativen Wurzeln der Gleichung (172), so jedoch, dass auch diejenigen von ihnen, welche ursprünglich keine ganzen Zahlen sind, sondern Functionen gewisser constanter Parameter, für deren gewisse specielle Werthe sie sich aber in ganze Zahlen zu verwandeln vermögen, dazu zu rechnen sind.

Die particulären Integrale zerfallen in drei Gruppen. Die ganze erste Gruppe von solchen $\sigma+1$ an der Zahl, die den positiven Grössen: h_1, h_2, ... h_σ, 0 entspricht, ist gegeben durch die einzige Integralformel:

$$(180)\quad y=\eta_1(x-\alpha)^{h_1}\int\frac{(x-\alpha)^{h_2}\eta_2}{(x-\alpha)^{h_1+1}}dx\int\frac{(x-\alpha)^{h_3}\eta_3}{(x-\alpha)^{h_2+1}}dx\,\ldots\ldots\int\frac{(x-\alpha)^{h_\sigma}\eta_\sigma}{(x-\alpha)^{h_{\sigma-1}+1}}dx\int\frac{\eta_{\sigma+1}}{(x-\alpha)^{h_\sigma+1}}dx,$$

die sich in die einzelnen Integrale y_1, y_2, y_3, ... $y_{\sigma+1}$ zerlegen lässt. Bis auf das erste von ihnen sind alle versehen mit logarithmischen Transcendenten und nimmt man an, dass sämmtliche Integrationen in der vorliegenden Formel innerhalb der Grenzen α und x durchgeführt, die η_1, η_2, η_3, ... $\eta_{\sigma+1}$ aber zu diesem Behufe in Form von aufsteigenden Reihen dargestellt werden, so tragen auch die y_1, y_2, y_3, ... $y_{\sigma+1}$ dieselbe Reihenform, und sehen aus, wie folgt:

$$y_1=\eta_1(x-\alpha)^{h_1}$$

$$y_2=\eta_1(x-\alpha)^{h_1}\int\frac{(x-\alpha)^{h_2}\eta_2}{(x-\alpha)^{h_1+1}}dx={}_0\vartheta_2(x-\alpha)^{h_2}+{}_1\vartheta_2(x-\alpha)^{h_1}\log(x-\alpha)$$

$$y_3=\eta_1(x-\alpha)^{h_1}\int\frac{(x-\alpha)^{h_2}\eta_2}{(x-\alpha)^{h_1+1}}dx\int\frac{(x-\alpha)^{h_3}\eta_3}{(x-\alpha)^{h_2+1}}dx=$$

$$(181)\quad ={}_0\vartheta_3(x-\alpha)^{h_3}+{}_1\vartheta_3(x-\alpha)^{h_2}\log(x-\alpha)+{}_2\vartheta_3(x-\alpha)^{h_1}\log^2(x-\alpha)$$

....

$$y_{\sigma+1}=\eta_1(x-\alpha)^{h_1}\int\frac{(x-\alpha)^{h_2}\eta_2}{(x-\alpha)^{h_1+1}}dx\int\frac{(x-\alpha)^{h_3}\eta_3}{(x-\alpha)^{h_2+1}}dx\,\ldots\ldots\int\frac{(x-\alpha)^{h_\sigma}\eta_\sigma}{(x-\alpha)^{h_{\sigma-1}+1}}dx\int\frac{\eta_{\sigma+1}dx}{(x-\alpha)^{h_\sigma+1}}$$

$$={}_0\vartheta_{\sigma+1}+{}_1\vartheta_{\sigma+1}(x-\alpha)^{h_\sigma}\log(x-\alpha)+{}_2\vartheta_{\sigma+1}(x-\alpha)^{h_{\sigma-1}}\log^2(x-\alpha)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots+{}_{\sigma-1}\vartheta_{\sigma+1}(x-\alpha)^{h_2}\log^{\sigma-1}(x-\alpha)+{}_\sigma\vartheta_{\sigma+1}(x-\alpha)^{h_1}\log^\sigma(x-\alpha).$$

Nun folgt eine zweite Gruppe von particulären Integralen, die gleichfalls enthalten ist in einer einzigen Integralformel, zu der man gelangt, wenn man im zweiten Theile der (180) annoch Integralzeichen $n-\rho-2$ hinzufügt, die sämmtlich das Eigenthümliche haben, dass sich unter ihnen keine durch $x-\alpha$ gebrochene Function vorfindet. Diese Integralformel, welche die erste und zweite Gruppe von Integralen zugleich liefert, sieht aus, wie folgt:

$$(182)\quad y=\eta_1(x-\alpha)^{h_1}\int\frac{(x-\alpha)^{h_2}\eta_2}{(x-\alpha)^{h_1+1}}dx\,\ldots\ldots\ldots\int\frac{(x-\alpha)^{h_\sigma}\eta_\sigma}{(x-\alpha)^{h_{\sigma-1}+1}}dx\int\frac{\eta_{\sigma+1}}{(x-\alpha)^{h_\sigma+1}}dx\times$$
$$\times\int\eta_{\sigma+2}\,dx\int\eta_{\sigma+3}\,dx\,\ldots\ldots\ldots\int\eta_{n+\sigma-\rho}\,dx.$$

$$
\begin{aligned}
y_n \quad = \quad & \frac{{}_0\mathfrak{y}_n}{(x-\alpha)^{k_\tau}} + \frac{{}_1\mathfrak{y}_n}{(x-\alpha)^{k_\tau - 1}} \log (x-\alpha) + \frac{{}_2\mathfrak{y}_n}{(x-\alpha)^{k_\tau - 2}} \log^2 (x-\alpha) + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{{}_{\tau-1}\mathfrak{y}_n}{(x-\alpha)^{k_1}} \log^{\tau-1} (x-\alpha) + \\
& + {}_\tau\mathfrak{y}_n (x-\alpha)^{n-\rho-1} \log^\tau (x-\alpha) + {}_{\tau+1}\mathfrak{y}_n (x-\alpha)^{h_\sigma} \log^{\tau+1} (x-\alpha) + \\
& + {}_{\tau+2}\mathfrak{y}_n (x-\alpha)^{h_\sigma - 1} \log^{\tau+2} (x-\alpha) + \ldots\ldots\ldots + {}_{\sigma+\tau}\mathfrak{y}_n (x-\alpha)^{h_1} \log^{\sigma+\tau} (x-\alpha).
\end{aligned} \tag{185}
$$

Diess wären also die sämmtlichen particulären Integrale und zwar jedes einzeln genommen seiner Form nach. Hinzufügen lässt sich noch, dass der Factor der höchsten Potenz von $x-\alpha$ im letzten Gliede einer jeden einzelnen dieser speciellen Formeln sich vom ersten particulären Integrale $\eta_1 (x-\alpha)^{h_1}$ nur in einem constanten Factor unterscheide, dass sie ferner alle nur für ganze h und k gelten. Sollten hingegen einige der Wurzeln der (172) solche Zahlen weder sein, noch durch Specialisiren der Parameter werden können, so hat man dieselben auszulassen, weil sich über die Art ihrer Gruppirung dann nichts Bestimmtes sagen lässt und nur so viel feststeht, dass sie der aufsteigenden Reihenentwicklung nach erfolgter Sonderung des Factors $(x-\alpha)^h$ oder Divisors $(x-\alpha)^k$ nicht widerstreben. Denkt man sich schliesslich alle particulären Integrale je mit willkürlichen Constanten multiplizirt und alsdann addirt, um das allgemeine Integral zu erhalten, so wird diess offenbar bestehen in der folgenden allgemeinen Form:

$$
\begin{aligned}
y = & \frac{Y_0}{(x-\alpha)^{k_\tau}} + \frac{Y_1}{(x-\alpha)^{k_{\tau-1}}} \log (x-\alpha) + \frac{Y_2}{(x-\alpha)^{k_{\tau-2}}} \log^2 (x-\alpha) + \ldots + \frac{Y_{\tau-1}}{(x-\alpha)^{k_1}} \log^{\tau-1} (x-\alpha) + \\
& + Y_\tau (x-\alpha)^{n-\rho-1} \log^\tau (x-\alpha) + Y_{\tau+1} (x-\alpha)^{h_\sigma} \log^{\tau+1} (x-\alpha) + Y_{\tau+2} (x-\alpha)^{h_\sigma - 1} \log^{\tau+2} (x-\alpha) + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + Y_n (x-\alpha)^{h_1} \log^{\sigma+\tau} (x-\alpha).
\end{aligned} \tag{186}
$$

In dieser also wird man es suchen müssen, wenn man es als aufsteigende Reihe haben will. Die Auseinandersetzung der Art, wie diess zu bewerkstelligen ist, bringt der folgende Paragraph.

§. 3.

Integration in Form von aufsteigenden Reihen.

(Schluss.)

Wir haben in den zwei vorhergehenden Paragraphen gesehen, dass die Integration einer jeden linearen Differentialgleichung in Form von aufsteigenden Reihen, geordnet nach Potenzen einer Differenz, wie $x-\alpha$, ohne Anstand durch ein unschweres Verfahren gelinge, mit Ausnahme jedoch gewisser Werthe von α, für welche die Anfangscoefficienten eine gewisse Anzahl von Factoren Null bekommen. Den in der Formenlehre Bewanderten kann diess auch nicht Wunder nehmen, denn wenn man weiss, dass ein Factor $x-\alpha$ des ersten Coefficienten auf einen Divisor $(x-\alpha)^k$ oder $(x-\alpha)^{\frac{p}{q}}$ eines particulären Integrales gelegentlich hinweise und bedenkt, dass ein solcher der directen Reihenentwicklung vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel hindernd in den Weg trete; so begreift man auch bald, wie das allgemeine Integral, das einen oder mehrere solche Bestandtheile enthält, sich der Reihenentwicklung entziehen könne. Da indess die Formenlehre nicht nur das Dasein eines solchen Factors oder Divisors verräth, sondern auch über die Art und Weise seines Vorhandenseins und namentlich über den numerischen Werth des Exponenten k, oder $\frac{p}{q}$ Aufschluss gibt, so ist hiemit auch das Mittel zur Wegräumung des Hindernisses gegeben, das der in Rede stehenden Entwicklung im Wege liegt: man sondert nämlich aus einem jeden Bestandtheile $\frac{\chi(x)}{(x-\alpha)^k}$ den rationalen oder irrationalen Divisor, und entwickelt nur die Function $\chi(x)$ aufsteigend. Allein wir haben in den zwei vorhergehenden Paragraphen noch mehr erfahren, wir haben gesehen, dass Factoren $x-\alpha$ der Anfangscoefficienten gelegentlich auch logarithmische Transcendenten, wie $log(x-\alpha)$, $log^2(x-\alpha)$, ... im allgemeinen Integrale verrathen können; Letzteres jedoch nur dann, wenn der zu diesem Factor $x-\alpha$ gehörige Exponent k eine ganze positive oder negative Zahl ist, oder wenigstens eine solche Function der constanten Parameter der Differentialgleichung, die sich für gewisse Werthe derselben in eine ganze Zahl verwandeln lässt. Auch über die Art und Weise des Vorkommens dieser Logarithmen haben wir Aufschluss gewonnen und gesehen, dass sie die directe Reihenentwicklung nicht minder behindern als die früher genannten Brüche und Irrationalgrössen, und den Rechner, der die directe Reihenentwicklung erzwingen will, nöthigen, so viele particuläre Integrale aufzuopfern, als sich verschiedene Potenzen von $log(x-\alpha)$ im allgemeinen Integrale befinden. Da man sich nun mit einem derartig unvollständig gewordenen Integrale nicht begnügen kann, so entsteht wohl natürlich die Frage, ob es nicht möglich sei, hier dasselbe Mittel wie beim Vorkommen eines Nenners oder irrationalen Factors in Anwendung zu setzen, d. h. aus sämmtlichen Gliedern von der Form $\chi(x)\,log(x-\alpha)$ oder $\chi(x)\,log^2(x-\alpha)$ u. s. w. den logarithmischen Factor, der der Reihenentwicklung unfähig ist, auszusondern und nur den anderen $\chi(x)$ einer solchen zu unterziehen; ja man kann sagen, es müsse diess sogar thunlich sein, wenn die in den vorhergehenden Paragraphen gewonnenen Resultate ihre volle Richtigkeit haben. Wir wollen daher auf Grundlage unserer erworbenen Formkenntniss zur Ermittlung

des allgemeinen, unverkürzten Integrales durch Scheiden des logarithmischen Factors schreiten; heben aber auch hier, so wie gewöhnlich, an mit der Betrachtung der einfacheren Fälle, die auch zugleich die in der Regel erscheinenden sind. Wir legen uns nämlich eine Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung vor, die einen einzigen Factor $(x-\alpha)$ des ersten Coefficienten ausweist, welcher dem erhobenen Thatbestande zufolge entweder auf einen Factor $(x-\alpha)^h$ eines einzigen particulären Integrales, oder auf einen Divisor $(x-\alpha)^k$ hindeuten mag, unter h oder k ganze und positive Zahlen verstanden. Wir müssen diese Beschaffenheit der Exponenten voraussetzen, indem bei einer anderen kein $log(x-\alpha)$ im allgemeinen Integrale nachgewiesen werden kann.

Wir beginnen bei dem ersten dieser beiden Fälle, demjenigen nämlich, wo ein particuläres Integral von der Form $\mathfrak{Y}_1(x-\alpha)^h$ vorhanden ist; unsere Differentialgleichung sei also:

$$(187)\qquad (x-\alpha)\,\underset{n}{\mathfrak{X}}\,y^{(n)} + \mathfrak{X}_{n-1}y^{(n-1)} + \mathfrak{X}_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_1 y' + \mathfrak{X}_0 y = 0$$

und überdiess:

$$(188)\qquad h = -\frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{\underset{n}{\mathfrak{X}}}\Bigg|_{\alpha} + n - 1$$

eine ganze positive Zahl. Unsere im ersten Paragraphe durchgeführten Untersuchungen haben gelehrt, dass unter solchen Umständen immer ein particuläres Integral, nämlich das $\mathfrak{Y}_1(x-\alpha)^h$ die Reihenentwicklung vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel zulasse, wiewohl das dazu dienende Verfahren der Natur der Sache nach erst beim $(h+1)$sten Gliede von der Nulle verschiedene Coefficienten liefern kann; die übrigen entziehen sich bei eben diesem $(h+1)$sten Gliede derselben wegen eines ihnen allen bis auf einen constanten Factor gemeinschaftlichen Bestandtheiles $\mathfrak{Y}_1(x-\alpha)^h\,log\,(x-\alpha)$. Das allgemeine Integral trägt sohin offenbar die Form:

$$(189)\qquad y = \mathfrak{Y}_0 + \mathfrak{Y}_1\,(x-\alpha)^h\,log\,(x-\alpha),$$

allwo $\mathfrak{Y}_0$ und $\mathfrak{Y}_1$ gar keinen Factor $log\,(x-\alpha)$ und überhaupt kein die Reihenentwicklung störendes Element in sich schliessen. Wir differenziren nun behufs der Substitution in die Differentialgleichung dieses Binom n-Mal nach einander und bemerken hiebei, wie die Differentialquotienten der Function $(x-\alpha)^h\,log\,(x-\alpha)$ jenen der Potenz $(x-\alpha)^h$ ähnlich gestaltet sind, so zwar, dass man hat:

$$(190)\qquad \begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big[(x-\alpha)^h\,log\,(x-\alpha)\Big] &= (x-\alpha)^{h-1}\Big[h\,log\,(x-\alpha)+1\Big] = \\
&= (x-\alpha)^{h-1}\Big[h\,log\,(x-\alpha)+\mathfrak{A}'_h\Big] \\
\frac{d^2}{dx^2}\Big[(x-\alpha)^h\,log\,(x-\alpha)\Big] &= (x-\alpha)^{h-2}\Big[h\,(h-1)\,log\,(x-\alpha)+2h-1\Big] = \\
&= (x-\alpha)^{h-2}\Big[h\,(h-1)\,log\,(x-\alpha)+\mathfrak{A}''_h\Big] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d^r}{dx^r}\Big[(x-\alpha)^h\,log\,(x-\alpha)\Big] &= (x-\alpha)^{h-r}\Big[h\,(h-1)\ldots.(h-r+1)\,log\,(x-\alpha)+\mathfrak{A}^{(r)}_h\Big] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d^n}{dx^n}\Big[(x-\alpha)^h\,log\,(x-\alpha)\Big] &= (x-\alpha)^{h-n}\Big[h\,(h-1)\ldots.(h-n+1)\,log\,(x-\alpha)+\mathfrak{A}^{(n)}_h\Big]
\end{aligned}$$

$$+\mathfrak{Y}'_1 \left[\binom{n}{1}(x-\alpha)^{h-n+2}\mathfrak{A}_h^{(n-1)}\mathfrak{X}_n + \binom{n-1}{1}(x-\alpha)^{h-n+2}\mathfrak{A}_h^{(n-2)}\mathfrak{X}_{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right.$$
$$\left. + \binom{s}{1}(x-\alpha)^{h-s+1}\mathfrak{A}_h^{(s-1)}\mathfrak{X}_s + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2(x-\alpha)^{h-1}\mathfrak{A}'_h\mathfrak{X}_2\right] +$$
$$+\mathfrak{Y}_1 \left[(x-\alpha)^{h-n+1}\mathfrak{A}_h^{(n)}\mathfrak{X}_n + (x-\alpha)^{h-n+1}\mathfrak{A}_h^{(n-1)}\mathfrak{X}_{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right.$$
$$\left. + (x-\alpha)^{h-s}\mathfrak{A}_h^{(s)}\mathfrak{X}_s + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (x-\alpha)^{h-1}\mathfrak{A}'_h\mathfrak{X}_1\right] +$$

$$(195)\quad 0 = \mathfrak{Y}_1^{(n)} \cdot (x-\alpha)^n \mathfrak{X}_n +$$
$$+\mathfrak{Y}_1^{(n-1)}\left[\binom{n}{1} h (x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{X}_n + (x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{X}_{n-1}\right] +$$
$$+\mathfrak{Y}_1^{(n-2)}\left[\binom{n}{2} h(h-1)(x-\alpha)^{n-2}\mathfrak{X}_n + \binom{n-1}{1} h(x-\alpha)^{n-2}\mathfrak{X}_{n-1} + (x-\alpha)^{n-2}\mathfrak{X}_{n-2}\right] +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\mathfrak{Y}_1^{(n-t)}\left[\binom{n}{t} h(h-1)\ldots(h-t+1)(x-\alpha)^{n-t}\mathfrak{X}_n + \binom{n-1}{t-1} h(h-1)\ldots(h-t+2)(x-\alpha)^{n-t}\mathfrak{X}_{n-1} + \ldots \right.$$
$$\left. + \binom{s}{n-t} h(h-1)\ldots(h-t+n-s+1)(x-\alpha)^{sn-t-s-1}\mathfrak{X}_s + \ldots + (x-\alpha)^{n-t}\mathfrak{X}_{n-t}\right] +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\mathfrak{Y}'_1\left[\binom{n}{1} h(h-1)\ldots(h-n+2)(x-\alpha)\mathfrak{X}_n + \binom{n-1}{1} h(h-1)\ldots(h-n+3)(x-\alpha)\mathfrak{X}_{n-1} + \ldots \right.$$
$$\left. + \binom{s}{1} h(h-1)\ldots(h-s+2)(x-\alpha)^{n-s}\mathfrak{X}_s + \ldots\ldots\ldots\ldots + (x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{X}_1\right] +$$
$$+\mathfrak{Y}_1\left[h(h-1)\ldots\ldots(h-n+1)\mathfrak{X}_n + h(h-1)\ldots\ldots(h-n+2)\mathfrak{X}_{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right.$$
$$\left. + h(h-1)\ldots\ldots(h-s+1)(x-\alpha)^{n-s-1}\mathfrak{X}_s + \ldots\ldots\ldots + (x-\alpha)^{n-1}\mathfrak{X}_0\right].$$

Die Letztere von ihnen fällt mit der (9) zusammen, die sich im §. 1 der Transformationslehre vorfindet für $k = -h$. Man könnte ihr den Werth des einen ohne Anstand in Reihenform darstellbaren Integrales entringen, auf dem im vorigen Paragraphe betretenen Wege, während dann die erste geeignet erschiene, zu dem erhaltenen $\mathfrak{Y}_1$ das n-theilige $\mathfrak{Y}_0$ dazuzuliefern. Es ist jedoch nicht nothwendig, zur Integration zweier Gleichungen zu schreiten, nachdem wir nämlich in §. 1 gesehen haben, dass aus der Differentialgleichung (187), ohne vorgängige Transformation namentlich dasjenige particuläre Integral, dem der Factor $x-\alpha$ des ersten Coefficienten angehört, jedesmal in Reihenform ohne Anstand ermittelt werden kann, was dann ausnahmsweise auch bei den übrigen zu gelingen vermag, und nachdem die (194) eben diese Differentialgleichung selbst mit gewissen Zusätzen jedoch zum Polynome derselben ist, so sieht man wohl ein, dass es sich hier mit gänzlicher Ausserachtlassung der (195) nur um das Integriren in Reihenform der (194) handeln könne. Diese aber ist auf verschiedene Weise einzuleiten in den zwei Fällen, wo die ganze positive Zahl h nicht unter $n-1$ fällt, und wo sie sich unter $n-1$ befindet, weil im ersten dieser zwei Fälle das in Reihenform dargestellte Gleichungspolynom nur Potenzen von $x-\alpha$ mit positiven Exponenten beherbergt und in der Rechnung

zuvörderst die zu $\mathfrak{Y}_0$ gehörigen Glieder erscheinen; die zu $\mathfrak{Y}_1$ hingegen gehörenden später auftreten, während im Anderen auch Potenzen des reciproken Werthes $x-\alpha$ im Polynome ersichtlich sind, die Rechnung mit der Entwicklung von $\mathfrak{Y}_1$ anhebt, die Glieder von $\mathfrak{Y}_0$ hingegen später auftreten. Wir fassen also gegenwärtig den speciellen Fall ins Auge, wo ein Factor $x-\alpha$ des ersten Coefficienten der Differentialgleichung auf ein particuläres Integral von der Form $\mathfrak{Y}(x-\alpha)^h$ hindeutet, und wo h eine ganze positive, nicht unter $n-1$ liegende Zahl ist. Das in Reihenform gedachte Polynom der $\mathfrak{P}_0=0$ trägt hier folgende Gestalt:

$$\mathfrak{P}_0 = \mathrm{P}_0 + \mathrm{P}'_0 \frac{x-\alpha}{1} + \mathrm{P}''_0 \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \dots\dots\dots + \mathrm{P}_0^{(p)} \frac{(x-\alpha)^p}{1.2\dots p} + \dots\dots\dots = 0, \tag{196}$$

und es zerfällt diese Gleichung, da sie eine indentische sein soll, in die folgende unbegränzte Reihe von solchen:

$$\mathrm{P}_0 = 0, \quad \mathrm{P}'_0 = 0, \quad \mathrm{P}''_0 = 0, \quad \dots\dots\dots, \quad \mathrm{P}_0^{(p)} = 0, \quad \dots\dots\dots \tag{197}$$

Stellt man sie in der schon früher angedeuteten Art und Weise wirklich dar, und nimmt hiebei der bisherigen Gepflogenheit gemäss an, dass:

$$\mathrm{Y}_0,\ \mathrm{Y}'_0,\ \dots\dots\ \mathrm{Y}_0^{(p)},\ \dots\dots \text{ dann } \mathrm{Y}_1,\ \mathrm{Y}'_1,\ \dots\dots\ \mathrm{Y}_1^{(p)},\ \dots\dots \text{ dann } \mathrm{X},\ \mathrm{X}'_1\ \dots\dots\ \mathrm{X}^{(p)},\ \dots\dots$$

dasjenige bedeuten, was aus:

$$\mathfrak{Y}_0,\ \mathfrak{Y}'_0,\ \dots\dots\ \mathfrak{Y}_0^{(p)},\ \dots\dots \text{ dann } \mathfrak{Y}_1,\ \mathfrak{Y}'_1,\ \dots\dots\ \mathfrak{Y}_1^{(p)},\ \dots\dots \text{ und } \mathfrak{X},\ \mathfrak{X}',\ \dots\dots\ \mathfrak{X}^{(p)},\ \dots\dots$$

wird, wenn man der unabhängigen Variablen x den speciellen Werth α ertheilt, und führt noch überdiess der Kürze wegen die für jedes ganze und positive p zu gelten habende Bezeichnung ein:

$$\frac{\mathfrak{A}_h^{(n)}}{p!} + \binom{n}{1}\frac{\mathfrak{A}_h^{(n-1)}}{(p-1)!} + \binom{n}{2}\frac{\mathfrak{A}_h^{(n-2)}}{(p-2)!} + \dots\dots\dots + \binom{n}{p}\mathfrak{A}_h^{(n-p)} = \mathrm{A}_{h\,p}^{(n)}, \tag{198}$$

so gelangt man zum folgenden Systeme von Gleichungen:

$$\mathrm{P}_0 = \mathrm{X}_{n-1}\,\mathrm{Y}_0^{(n-1)} + \mathrm{X}_{n-2}\,\mathrm{Y}_0^{(n-2)} + \dots\dots\dots + \mathrm{X}_1\,\mathrm{Y}'_0 + \mathrm{X}_0\,\mathrm{Y}_0 = 0 \tag{199}$$

$$\mathrm{P}'_0 = \left.\begin{array}{r}\mathrm{X}_n\\ +\,\mathrm{X}_{n-1}\end{array}\right]\mathrm{Y}_0^{(n)} + \left.\begin{array}{r}\mathrm{X}'_{n-1}\\ +\,\mathrm{X}_{n-2}\end{array}\right]\mathrm{Y}_0^{(n-1)} + \left.\begin{array}{r}\mathrm{X}'_{n-2}\\ +\,\mathrm{X}_{n-3}\end{array}\right]\mathrm{Y}_0^{(n-2)} + \dots\dots + \left.\begin{array}{r}\mathrm{X}'_1\\ +\,\mathrm{X}_0\end{array}\right]\mathrm{Y}'_0 + \mathrm{X}'_0\,\mathrm{Y}_0 = 0 \tag{200}$$

$$\mathrm{P}''_0 = \left.\begin{array}{r}2\mathrm{X}_n\\ +\,\mathrm{X}_{n-1}\end{array}\right]\mathrm{Y}_0^{(n+1)} + \left.\begin{array}{r}2\mathrm{X}'_n\\ +2\mathrm{X}'_{n-1}\\ +\,\mathrm{X}_{n-2}\end{array}\right]\mathrm{Y}_0^{(n)} + \left.\begin{array}{r}\mathrm{X}''_{n-1}\\ +2\mathrm{X}'_{n-2}\\ +\,\mathrm{X}_{n-3}\end{array}\right]\mathrm{Y}_0^{(n-1)} + \dots + \left.\begin{array}{r}\mathrm{X}''_2\\ +2\mathrm{X}'_1\\ +\,\mathrm{X}_0\end{array}\right]\mathrm{Y}''_0 + \left.\begin{array}{r}\mathrm{X}''_1\\ +2\mathrm{X}'_0\end{array}\right]\mathrm{Y}'_0 + \mathrm{X}''_0\mathrm{Y}_0 = 0 \tag{201}$$

....

$$(202)\quad P_0^{(p)} = \left.\begin{array}{l} p\,X_n \\ +\,X_{n-1} \end{array}\right] Y_0^{(n+p-1)} + \left.\begin{array}{l} p(p-1)\,X'_n \\ +\,p\,X'_{n-1} \\ +\,X_{n-2} \end{array}\right] Y_0^{(n+p-2)} + \left.\begin{array}{l} p\binom{p-1}{2}\,X''_n \\ +\,\binom{p}{2}\,X''_{n-1} \\ +\,p\,X'_{n-2} \\ +\,X_{n-3} \end{array}\right] Y_0^{(n+p-3)} + \ldots\ldots$$

$$+ \left.\begin{array}{l} +\,p\,X_n^{(p-1)} \\ +\,p\,X_{n-1}^{(p-1)} \\ +\binom{p}{2}X_{n-2}^{(p-2)} \\ +\binom{p}{3}X_{n-3}^{(p-3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] Y_0^{(n)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-1}^{(p)} \\ +\,p\,X_{n-2}^{(p-1)} \\ +\binom{p}{2}X_{n-3}^{(p-2)} \\ +\binom{p}{3}X_{n-4}^{(p-3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] Y_0^{(n-1)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-2}^{(p)} \\ +\,p\,X_{n-3}^{(p-1)} \\ +\binom{p}{2}X_{n-4}^{(p-2)} \\ +\binom{p}{3}X_{n-5}^{(p-3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] Y_0^{(n-2)} + \ldots\ldots + X_0^{(p)}\,Y_0 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(203)\quad P_0^{(h-n)} = \left.\begin{array}{l} (h-n)\,X_n \\ +\,X_{n-1} \end{array}\right] Y_0^{(h-1)} + \left.\begin{array}{l} (h-n)(h-n-1)\,X'_n \\ +\,(h-n)\,X'_{n-1} \\ +\,X_{n-2} \end{array}\right] Y_0^{(h-2)} + \left.\begin{array}{l} (h-n)\binom{h-n-1}{2}X''_n \\ +\binom{h-n}{2}X''_{n-1} \\ +\,(h-n)\,X'_{n-2} \\ +\,X_{n-3} \end{array}\right] Y_0^{(h-3)} + \ldots\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} +\,(h-n)\,X_n^{(h-n-1)} \\ +\,(h-n)\,X_{n-1}^{(h-n-1)} \\ +\binom{h-n}{2}X_{n-2}^{(h-n-2)} \\ +\binom{h-n}{3}X_{n-3}^{(h-n-3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] Y_0^{(n)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-1}^{(h-n)} \\ +\,(h-n)\,X_{n-2}^{(h-n-1)} \\ +\binom{h-n}{2}X_{n-3}^{(h-n-2)} \\ +\binom{h-n}{3}X_{n-4}^{(h-n-3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] Y_0^{(n-1)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-2}^{(h-n)} \\ +\,(h-n)\,X_{n-3}^{(h-n-1)} \\ +\binom{h-n}{2}X_{n-4}^{(h-n-2)} \\ +\binom{h-n}{3}X_{n-5}^{(h-n-3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] Y_0^{(n-2)} + \ldots\ldots + X_0^{(h-n)}\,Y_0 = 0$$

$$P_0^{(h-n+1)} = \left.\begin{matrix} (h-n+1)X_n \\ +\quad X_{n-1} \end{matrix}\right] Y_0^{(h)} + \left.\begin{matrix} (h-n+1)(h-n)X'_n \\ +\quad (h-n+1)\,X'_{n-1} \\ +\quad X_{n-2} \end{matrix}\right] Y_0^{(h-1)} + \left.\begin{matrix} (h-n+1)\binom{h-n}{2}X''_n \\ +\quad \binom{h-n}{2}X''_{n-1} \\ +\quad (h-n)\,X'_{n-2} \\ +\quad X_{n-3} \end{matrix}\right] Y_0^{(h-2)} + \ldots\ldots \tag{204}$$

$$\left.\begin{matrix} +(h-n+1)X_n^{(h-n)} \\ +(h-n+1)X_{n-1}^{(h-n)} \\ +\binom{h-n+1}{2}X_{n-2}^{(h-n-1)} \\ +\binom{h-n+1}{3}X_{n-3}^{(h-n-2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right] Y_0^{(n-1)} + \left.\begin{matrix} X_{n-1}^{(h-n+1)} \\ +(h-n+1)X_{n-2}^{(h-n)} \\ +\binom{h-n+1}{2}X_{n-3}^{(h-n-1)} \\ +\binom{h-n+1}{3}X_{n-4}^{(h-n-2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right] Y_0^{(n)} + \left.\begin{matrix} X_{n-2}^{(h-n+1)} \\ +(h-n+1)X_{n-3}^{(h-n)} \\ +\binom{h-n+1}{2}X_{n-4}^{(h-n-1)} \\ +\binom{h-n+1}{3}X_{n-5}^{(h-n-2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right] Y_0^{(n-2)} + \ldots + X_0^{(h-n+1)} Y_0 +$$

$$+ (h-n+1)!\,[\mathfrak{A}^{(n)} X_n + \mathfrak{A}^{(n-1)} X_{n-1}]\, Y_1 = 0.$$

$$P_0^{(h-n+2)} = \left.\begin{matrix} (h-n+2)X_n \\ +\quad X_{n-1} \end{matrix}\right] Y_0^{(h+1)} + \left.\begin{matrix} (h-n+2)(h-n+1)X'_n \\ +\quad (h-n+2)X'_{n-1} \\ +\quad X_{n-2} \end{matrix}\right] Y_0^{(h)} + \left.\begin{matrix} (h-n+2)\binom{h-n+1}{2}X''_n \\ +\quad \binom{h-n+1}{2}X''_{n-1} \\ +\quad (h-n+1)\,X'_{n-2} \\ +\quad X_{n-3} \end{matrix}\right] Y_0^{(h-1)} + \tag{205}$$

....

$$\left.\begin{matrix} +(h-n+2)X_n^{(h-n+1)} \\ +(h-n+2)X_{n-1}^{(h-n+1)} \\ +\binom{h-n+2}{2}X_{n-2}^{(h-n)} \\ +\binom{h-n+2}{3}X_{n-3}^{(h-n-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right] Y_0^{(n)} + \left.\begin{matrix} X_{n-1}^{(h-n+2)} \\ +(h-n+2)X_{n-2}^{(h-n+1)} \\ +\binom{h-n+2}{2}X_{n-3}^{(h-n)} \\ +\binom{h-n+2}{3}X_{n-4}^{(h-n-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right] Y_0^{(n-1)} + \left.\begin{matrix} X_{n-2}^{(h-n+2)} \\ +(h-n+2)X_{n-3}^{(h-n+1)} \\ +\binom{h-n+2}{2}X_{n-4}^{(h-n)} \\ +\binom{h-n+2}{3}X_{n-5}^{(h-n-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right] Y_0^{(n-2)} + \ldots + X_0^{(h-n+2)} Y_0 +$$

$$+ (h-n+2)!\left[(\mathfrak{A}^{(n)} X'_n + \mathfrak{A}^{(n-1)} X'_{n-1} + \mathfrak{A}^{(n-2)} X_{n-2})\, Y_1 + (A_1^{(n)} X_n + A_1^{(n-1)} X_{n-1})\, Y'_1\right] = 0.$$

....

....

$$
\begin{aligned}
(206)\quad P_0^{(h-n+p+1)} = \;& \left.\begin{array}{r} (h-n+p+1)\,X_n \\ +\;X_{n-1} \end{array}\right] Y_0^{(h+p)} + \left.\begin{array}{r} (h-n+p+1)(h-n+p)\,X'_n \\ +\;(h-n+p+1)\,X'_{n-1} \\ +\;X_{n-2} \end{array}\right] Y_0^{(h+p-1)} + \\
& + \left.\begin{array}{r} (h-n+p+1)\binom{h-n+p}{2} X''_n \\ +\;\binom{h-n+p}{2} X''_{n-1} \\ +\;(h-n+p)\,X'_{n-2} \\ +\;X_{n-3} \end{array}\right] Y_0^{(h+p-2)} + \ldots\ldots + \left.\begin{array}{r} (h-n+p+1)\,X_n^{(h-n+p)} \\ +\;(h-n+p+1)\,X_{n-1}^{(h-n+p)} \\ +\binom{h-n+p+1}{2} X_{n-2}^{(h-n+p-1)} \\ +\binom{h-n+p+1}{3} X_{n-3}^{(h-n+p-2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] Y_0^{(n)} + \\
& + \left.\begin{array}{r} X_{n-1}^{(h-n+p+1)} \\ +\;(h-n+p+1)\,X_{n-2}^{(h-n+p)} \\ +\binom{h-n+p+1}{2} X_{n-3}^{(h-n+p-1)} \\ +\binom{h-n+p+1}{3} X_{n-4}^{(h-n+p-2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] Y_0^{(n-1)} + \left.\begin{array}{r} X_{n-2}^{(h-n+p+1)} \\ +\;(h-n+p+1)\,X_{n-3}^{(h-n+p)} \\ +\binom{h-n+p+1}{2} X_{n-4}^{(h-n+p-1)} \\ +\binom{h-n+p+1}{3} X_{n-5}^{(h-n+p-2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] Y_0^{(n-2)} + \ldots + X_0^{(h-n+p+1)}\,Y_0 +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+(h-n+p+1)!\Bigg[\; & Y_1\left(\mathfrak{A}^{(n)}\frac{X_n^{(p)}}{p!} + \mathfrak{A}^{(n-1)}\frac{X_{n-1}^{(p)}}{p!} + \mathfrak{A}^{(n-2)}\frac{X_{n-2}^{(p-1)}}{(p-1)!} + \ldots + \mathfrak{A}^{(s)}\frac{X_s^{(p+s-n+1)}}{(p+s-n+1)!} + \ldots + \mathfrak{A}^{(n-p-1)} X_{n-p-1}\right) \\
& + Y'_1\left(A_1^{(n)}\frac{X_n^{(p-1)}}{(p-1)!} + A_1^{(n-1)}\frac{X_{n-1}^{(p-1)}}{(p-1)!} + A_1^{(n-2)}\frac{X_{n-2}^{(p-2)}}{(p-2)!} + \ldots + A_1^{(s)}\frac{X_s^{(p+s-n)}}{(p+s-n)!} + \ldots + A_1^{(n-p)} X_{n-p}\right) \\
& + Y''_1\left(A_2^{(n)}\frac{X_n^{(p-2)}}{(p-2)!} + A_2^{(n-1)}\frac{X_{n-1}^{(p-2)}}{(p-2)!} + A_2^{(n-2)}\frac{X_{n-2}^{(p-3)}}{(p-3)!} + \ldots + A_2^{(s)}\frac{X_s^{(p+s-n-1)}}{(p+s-n-1)!} + \ldots + A_2^{(n-p+1)} X_{n-p+1}\right) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + Y_1^{(q)}\left(A_q^{(n)}\frac{X_n^{(p-q)}}{(p-q)!} + A_q^{(n-1)}\frac{X_{n-1}^{(p-q)}}{(p-q)!} + A_q^{(n-2)}\frac{X_{n-2}^{(p-q-1)}}{(p-q-1)!} + \ldots + A_q^{(s)}\frac{X_s^{(p+s-n-q+1)}}{(p+s-n-q+1)!} + \right. \\
& \qquad \left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A_q^{(n-p+q-1)} X_{n-p+q-1}\right) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + Y_1^{(p)}\left(A_p^{(n)} X_n + A_p^{(n-1)} X_{n-1}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$= 0$$

. . . .

Die ersten von ihnen $h-n+1$ an der Zahl sind von jenen, auf die wir bereits im §. 1 stiessen, nicht verschieden und dienen, wie man sieht dazu, um $Y_0^{(n-1)}$, $Y_0^{(n)}$, ... $Y_0^{(h-1)}$ auszudrücken durch die willkührlich bleibenden Grössen $n-1$ an der Zahl: Y_0, Y'_0, Y''_0, ... $Y_0^{(n-2)}$, und zwar in linearer Form und gebrochen beziehlich durch die Producte aus einer steigenden Anzahl von Factoren:

$$\begin{aligned} M_0 &= X_{n-1} \\ M_1 &= X_{n-1}(X_{n-1}+\underset{n}{X}) \\ M_2 &= X_{n-1}(X_{n-1}+\underset{n}{X})(X_{n-1}+2\underset{n}{X}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{h-n} &= X_{n-1}(X_{n-1}+\underset{n}{X})(X_{n-1}+2\underset{n}{X})\ldots\ldots\ldots\ldots(X_{n-1}+(h-n)\underset{n}{X}). \end{aligned} \tag{207}$$

Bis zu $Y_0^{(h-1)}$ ist daher die Rechnung mit der Darstellung von $\mathfrak{Y}_0$ in Reihenform beschäftigt und liefert unter der Annahme, dass allgemein für jedes p:

$$M_p Y_0^{(n+p-1)} = [0,p]\, Y_0 + [1,p]\, Y'_0 + \ldots\ldots\ldots + [n-2,p]\, Y_0^{(n-2)} \tag{208}$$

sei, einen Werth von $\mathfrak{Y}_0$, der, nach Y_0, Y'_0, ... $Y_0^{(n-2)}$ geordnet und in seinen Anfangsgliedern aufgeschrieben, so vielen nämlich, als die bis hieher fortgesetzte Rechnung liefert, folgende Gestalt trägt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}_0 = \; & Y_0 \left[1 + \frac{[0,0]}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\ldots + \frac{[0,h-n]}{M_{h-n}}\frac{(x-\alpha)^{h-1}}{(h-1)!}\right] \\ & + Y'_0\,(x-\alpha)\left[1 + \frac{[1,0]}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{(n-1)!} + \ldots\ldots + \frac{[1,h-n]}{M_{h-n}}\frac{(x-\alpha)^{h-2}}{(h-1)!}\right] \\ & + Y''_0\,(x-\alpha)^2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{[2,0]}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-3}}{(n-1)!} + \ldots\ldots + \frac{[2,h-n]}{M_{h-n}}\frac{(x-\alpha)^{h-3}}{(h-1)!}\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + Y_0^{(n-2)}(x-\alpha)^{n-2}\left[\frac{1}{(n-2)!} + \frac{[n-2,0]}{M_0}\frac{x-\alpha}{(n-1)!} + \ldots\ldots + \frac{[n-2,h-n]}{M_{h-n}}\frac{(x-\alpha)^{h-n+1}}{(h-1)!}\right] \end{aligned} \tag{209}$$

Von nun an aber geht der Calcul in zwei Zweige auseinander; man hat demselben nämlich zu entringen erstens: das eine in der Rechnung noch nicht erschienene particuläre Integral, welches mit dem Factor $(x-\alpha)$ versehen ist, zugleich das einzige, der directen Reihenentwicklung nicht widerstrebende; und zweitens: die Fortsetzung der im vorliegenden Ausdrucke für $\mathfrak{Y}_0$ ersichtlichen eingeklammerten Reihen sammt dem logarithmischen Zusatze, der, zu $\mathfrak{Y}_0$ aggregirt, es in y verwandelt. Um das Erstere zu leisten, kann man, für einen Augenblick:

$$Y_0 = Y'_0 = \ldots\ldots\ldots = Y_0^{(n-2)} = Y_1 = 0 \tag{210}$$

setzend, die $n-1$ particulären Integrale, die man zu berechnen begonnen hat, wegwerfen, um das gesuchte n^{te} rein und isolirt zu erhalten. Die folgende unserer Bestimmungsgleichungen, die (204) nämlich ist identisch erfüllt und lässt $Y_0^{(h)}$ unbestimmt. Die nächsten ziehen sich der Reihe nach zurück auf:

$$P_0^{(h-n+2)} = \left[(h-n+2)\underset{n}{X} + X_{n-1}\right] Y_0^{(h+1)} + \left\{(h-n+2)(h-n+1)\underset{n}{X}' + (h-n+2)X'_{n-1} + X_{n-2}\right\} Y_0^{(h)} = 0$$

$$P_0^{(h-n+3)} = \left.\begin{array}{rr} (h-n+3)\underset{n}{X} & \\ + & X_{n-1} \end{array}\right] Y_0^{(h+2)} + \left.\begin{array}{rr} (h-n+3)(h-n+2)\underset{n}{X}' & \\ + & (h-n+3)X'_{n-1} \\ + & X_{n-2} \end{array}\right] Y_0^{(h+1)} + \left.\begin{array}{rr} (h-n+3)\binom{h-n+2}{2}\underset{n}{X}'' & \\ + & \binom{h-n+3}{2}X''_{n-1} \\ + & (h-n+3)X'_{n-2} \\ + & X_{n-3} \end{array}\right] Y_0^{(h)} = 0$$

$$P_0^{(h-n+4)} = \left.\begin{array}{rr} (h-n+4)\underset{n}{X} & \\ + & X_{n-1} \end{array}\right] Y_0^{(h+3)} + \left.\begin{array}{rr} (h-n+4)(h-n+3)\underset{n}{X}' & \\ + & (h-n+4)X'_{n-1} \\ + & X_{n-2} \end{array}\right] Y_0^{(h+2)} +$$

$$(211) \qquad + \left.\begin{array}{rr} (h-n+4)\binom{h-n+3}{2}\underset{n}{X}'' & \\ + & \binom{h-n+4}{2}X''_{n-1} \\ + & (h-n+4)X'_{n-2} \\ + & X_{n-3} \end{array}\right] Y_0^{(h+1)} + \left.\begin{array}{rr} (h-n+4)\binom{h-n+3}{3}\underset{n}{X}''' & \\ + & \binom{h-n+4}{3}X'''_{n-1} \\ + & \binom{h-n+4}{2}X''_{n-2} \\ + & \binom{h-n+4}{1}X'_{n-3} \\ + & X_{n-4} \end{array}\right] Y_0^{(h)} = 0$$

. . . .

$$P_0^{(h-n+p+1)} = \left.\begin{array}{rr} (h-n+p+1)\underset{n}{X} & \\ + & X_{n-1} \end{array}\right] Y_0^{(h+p)} + \left.\begin{array}{rr} (h-n+p+1)(h-n+p)\underset{n}{X}' & \\ + & (h-n+p+1)X'_{n-1} \\ + & X_{n-2} \end{array}\right] Y_0^{(h+p-1)} +$$

$$+ \left.\begin{array}{rr} (h-n+p+1)\binom{h-n+p}{2}\underset{n}{X}'' & \\ + & \binom{h-n+p+1}{2}X''_{n-1} \\ + & (h-n+p+1)X'_{n-2} \\ + & X_{n-3} \end{array}\right] Y_0^{(h+p-2)} + \ldots + \left.\begin{array}{rr} (h-n+p+1)\binom{h-n+p}{p}\underset{n}{X}^{(p)} & \\ + & \binom{h-n+p+1}{p}X^{(p)}_{n-1} \\ + & \binom{h-n+p+1}{p-1}X^{(p-1)}_{n-2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ + & X_{n-p-1} \end{array}\right] Y_0^{(h)} = 0$$

Sie liefern, wie man sieht: $Y_0^{(h+1)}$, $Y_0^{(h+2)}$, ... in Functionen von $Y_0^{(h)}$ in nach dieser willkürlichen Constante linearen Ausdrücken, die gebrochen sind durch:

$$\begin{aligned}
N_1 &= (h-n+2)\,\underset{n}{X} + X_{n-1} = \underset{n}{X} \\
N_2 &= \left[(h-n+2)\,\underset{n}{X} + X_{n-1}\right]\left[(h-n+3)\,\underset{n}{X} + X_{n-1}\right] = 1.2\,\underset{n}{X}^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
N_p &= \left[(h-n+2)\underset{n}{X}+X_{n-1}\right]\left[(h-n+3)\underset{n}{X}+X_{n-1}\right]\ldots\ldots\left[(h-n+p+1)\underset{n}{X}+X_{n-1}\right] \\
&= 1.2\ldots\ldots\ldots p\,\underset{n}{X}^p
\end{aligned} \tag{212}$$

und nimmt man allgemein an, dass:

$$N_p\, Y_0^{(h+p)} = [[h, h+p]]\, Y_0^{(h)} \tag{213}$$

sei, woraus sich dann unmittelbar ergibt, dass man unter N_0 sowohl, als auch unter dem Symbole $[[h, h]]$ hier die Einheit zu verstehen habe; so erhält man das gesuchte eine particuläre Integral und mit ihm zugleich diejenige Function, die, mit verschiedenen Constanten und mit $log\,(x-\alpha)$ multiplizirt, zu den $n-1$ früheren particulären Integralen hinzugefügt werden muss, um sie zu vervollständigen. Es ist:

$$Y_0^{(h)}\,(x-\alpha)^h\left[1+\frac{[[h,h+1]]}{N_1}\,\frac{(x-\alpha)}{1}+\frac{[[h,h+2]]}{N_2}\,\frac{(x-\alpha)^2}{2!}+\ldots\ldots\ldots\right]. \tag{214}$$

Wenden wir uns jetzt zu dem zweiten Zweige unserer Rechnung, der zunächst die Fortsetzung der in der Formel (209) begonnenen Reihenentwicklung zum Gegenstande hat. Heben wir zu diesem Zwecke die zur Isolirung des einen particulären Werthes oben unter (210) gemachte Voraussetzung wieder auf. Die Bestimmungsgleichung (204) dient dann, weil man aus den früheren bereits $Y_0^{(n-1)}$, $Y_0^{(n)}$, ... $Y_0^{(h-1)}$ gezogen hat, zur Bestimmung von Y_1 und gewinnt nach gehörig durchgeführter Substitution der für eben diese Coefficienten gewonnenen Werthe die Form:

$$Y_1 = G_0\, Y_0 + G_1\, Y_0' + G_2\, Y_0'' + \ldots\ldots\ldots + G_{n-2}\, Y_0^{(n-2)}, \tag{215}$$

in welcher sämmtliche Coefficienten G_0, G_1, ... G_{n-2} bestimmte endliche Werthe bekommen, weil der Coefficient von Y_1 in (204) der Beschaffenheit von h und X zufolge nie Null zu sein vermag, wie etwas später gezeigt werden wird. Da wir aber wissen, dass $\mathfrak{Y}_1\,(x-\alpha)^h$ bis auf den constanten Factor ganz das eben berechnete particuläre Integral ist, so erschliessen wir hieraus zweierlei, nämlich: erstens, dass die zu den verschiedenen Reihen, die die Formel (209) in sich schliesst, hinzuzufügenden logarithmischen Bestandtheile der Reihe nach seien:

$$\begin{aligned}
&G_0\,(x-\alpha)^h\,log\,(x-\alpha)\left[1+\frac{[[h,h+1]]}{N_1}\,\frac{(x-\alpha)}{1}+\frac{[[h,h+2]]}{N_2}\,\frac{(x-\alpha)^2}{2!}+\ldots\ldots\right] \\
&G_1\,(x-\alpha)^h\,log\,(x-\alpha)\left[1+\frac{[[h,h+1]]}{N_1}\,\frac{(x-\alpha)}{1}+\frac{[[h,h+2]]}{N_2}\,\frac{(x-\alpha)^2}{2!}+\ldots\ldots\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&G_{n-2}\,(x-\alpha)^h\,log\,(x-\alpha)\left[1+\frac{[[h,h+1]]}{N_1}\,\frac{(x-\alpha)}{1}+\frac{[[h,h+2]]}{N_2}\,\frac{(x-\alpha)^2}{2!}+\ldots\ldots\right]
\end{aligned} \tag{216}$$

und zweitens, dass Y'_1, Y''_1, ... zu Y_1 nothwendigerweise in demselben Verhältnisse stehen müssen, wie $Y_0^{(h+1)}$, $Y_0^{(h+2)}$, ... zu $Y_0^{(h)}$. Man hat daher allgemein:

(217)
$$\frac{Y_0^{(h+p)}}{Y_0^{(h)}} = \frac{Y_1^{(p)}}{Y_1},$$

oder mit Rücksicht auf die bereits erhaltenen Werthe dieser Grössen (213) und (215):

(218)
$$Y_1^{(p)} = \frac{[[h,h+p]]}{N_p} Y_1 = \frac{[[h,h+p]]}{N_p} [G_0 Y_0 + G_1 Y'_0 + G_2 Y''_0 + \ldots\ldots + G_{n-2} Y_0^{(n-2)}].$$

Hieraus ersieht man, dass in den folgenden Bestimmungsgleichungen (205) und (206) Y'_1, Y''_1, ... $Y_1^{(p)}$, ... als bestimmte lineare Functionen von Y_0, Y'_0, ... $Y_0^{(n-2)}$ bekannt seien. Diese Gleichungen werden daher offenbar dienlich sein zur Ermittlung von $Y_0^{(h+1)}$, $Y_0^{(h+2)}$, ... $Y_0^{(h+p)}$, ... und man wird in ihnen, da man das bereits berechnete particuläre Integral, welches $(x-\alpha)^h$ zum Factor hat, nicht mehr benöthigt, $Y_0^{(h)}$ überall, wo es vorkömmt, durch die Nulle ersetzen können. Verfährt man auf diese Weise, so ergeben sich für $Y_0^{(h+1)}$, $Y_0^{(h+2)}$, ... lauter lineare, beziehlich durch die Producte (212) aus nicht mehr verschwindenden Factoren gebrochene Ausdrücke, so dass der Entwicklung des allgemeinen Integrales in Reihen jetzt kein Hinderniss mehr im Wege steht. Die Gleichungen, mittelst welcher sie veranstaltet wird, gehen aus der (205) und den folgenden dadurch hervor, dass man in ihnen sämmtliche Y_1 und auch $Y_0^{(h)}$ durch die Nulle ersetzt.

Es ist noch übrig, die kurz zuvor gemachte Behauptung zu rechtfertigen, dass der aus (204) hervorgehende Werth von Y_1 ein endlicher sei, weil der Coefficient dieser Unbekannten von Null verschieden ist. Es erscheint derselbe in Form eines Produktes, dessen ersten Factor die Factorielle $(h-n+1)!$ bildet. Sie ist offenbar von der Nulle verschieden, weil vorausgesetztermassen $h > n-1$ ist. Aber auch der andere Factor, nämlich der:

$$\mathfrak{A}^{(n)} \underset{n}{X} + \mathfrak{A}^{(n-1)} X_{n-1}$$

kann nicht Null sein. Um diess einzusehen, erwäge man, dass vermöge der (188) derselbe auch aufgezeichnet werden könne, wie folgt:

$$[\mathfrak{A}^{(n)} - (h-n+1)\,\mathfrak{A}^{(n-1)}] \underset{n}{X}.$$

Nun hat man aber vermöge der zwei letzten der Gleichungen (191), der:

$$\mathfrak{A}^{(n-1)} = \binom{n-1}{1} h(h-1) \ldots\ldots (h-n+3) - \binom{n-1}{2} h(h-1) \ldots\ldots (h-n+4).1 +$$
$$+ \binom{n-1}{3} h(h-1) \ldots\ldots (h-n+5).1.2 - \ldots\ldots + (-1)^{t-1} \binom{n-1}{t} h(h-1) \ldots \times$$
$$\times (h-n+t+2).1.2.3 \ldots\ldots (t-1) + \ldots\ldots + (-1)^{n-2}.1.2.3 \ldots\ldots (n-2)$$

$$\mathfrak{A}^{(n)} = \binom{n}{1} h(h-1) \ldots (h-n+2) - \binom{n}{2} h(h-1) \ldots (h-n+3)1 + \binom{n}{3} h(h-1) \ldots (h-n+4)1.2 - \ldots$$
$$+ (-1)^{t-1} \binom{n}{t} h(h-1) \ldots (h-n+t+1)\,1.2.3 \ldots (t-1) + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}.1.2.3 \ldots (n-1).$$

wenn die erste von ihnen mit $(h-n+1)$ multiplizirt und sodann von den anderen Glied für Glied abgezogen wird, so erhält man:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}^{(n)} - (h-n+1)\,\mathfrak{A}^{(n-1)} &= (h+1)h(h-1)\ldots(h-n+3) - (n-1)(h+1)\,h\,(h-1)\ldots(h-n+4) + \ldots\ldots + \\ &+ (-1)^{t-1}(n-1)(n-2)\ldots(n-t+1)(h+1)\,h\,(h-1)\ldots(h-n+t+2) + \ldots + \\ &+ (-1)^{n-1}\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(n-1) \\ &= \frac{1}{x^{h-n+1}}\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{x^{h+1}\cdot\frac{1}{x}\right\} = h\,(h-1)\,\ldots\ldots\ldots\,(h-n+2)\end{aligned}$$

also von der Nulle verschieden.

Hiemit wäre nun vollständig dargethan, dass die so durchgeführte, zur aufsteigenden Reihenentwicklung des allgemeinen Integrales dienende Rechnung nirgends durch das Erscheinen eines unendlichen Coefficienten unterbrochen werden kann, denn es schadet gar nicht, wenn in den späteren Gleichungen eine der Grössen Y'_0, Y''_0, ... die Nulle zum Factor bekömmt, weil man sie ja nicht aus diesen Gleichungen zieht, sondern vielmehr den aus der Gleichung (213) gezogenen $Y_0^{(h+1)}$, $Y_0^{(h+2)}$, ... proportional erkannt hat. Man bekömmt somit in all' denjenigen Fällen, wo der ganze positive Werth von h sich nicht unter $n-1$ befindet, ein allgemeines aus n particulären bestehendes Integral von der folgenden Form:

$$y = \mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_1\,(x-\alpha)^h \log(x-\alpha) =$$

$$\begin{aligned} = Y_0 &\left\{\begin{aligned}&1 + \frac{[0,0]}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{[0,h-n]}{M_{h-n}}\frac{(x-\alpha)^{h-1}}{(h-1)!} + \ldots\ldots\ldots + \\ &+ G_0\,(x-\alpha)^h \log(x-\alpha)\left[1 + \frac{[[h,h+1]]}{N_1}\frac{x-\alpha}{1} + \frac{[[h,h+2]]}{N_2}\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots\ldots\right]\end{aligned}\right. \\ + Y'_0 &\left\{\begin{aligned}&(x-\alpha) + \frac{[1,0]}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\ldots + \frac{[1,h-n]}{M_{h-n}}\frac{(x-\alpha)^{h-1}}{(h-1)!} + \ldots\ldots\ldots + \\ &+ G_1\,(x-\alpha)^h \log(x-\alpha)\left[1 + \frac{[[h,h+1]]}{N_1}\frac{x-\alpha}{1} + \frac{[[h,h+2]]}{N_2}\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots\right]\end{aligned}\right. \\ + &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + Y_0^{(n-2)} &\left\{\begin{aligned}&\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{[n-2,0]}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\ldots + \frac{[n-2,h-n]}{M_{h-n}}\frac{(x-\alpha)^{h-n+1}}{(h-1)!} + \ldots\ldots + \\ &+ G_{n-2}\,(x-\alpha)^h \log(x-\alpha)\left[1 + \frac{[[h,h+1]]}{N_1}\frac{x-\alpha}{1} + \frac{[[h,h+2]]}{N_2}\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots\ldots\right]\end{aligned}\right. \\ + Y_0^{(h)} &(x-\alpha)^h\left[1 + \frac{[[h,h+1]]}{N_1}\frac{x-\alpha}{1} + \frac{[[h,h+2]]}{N_2}\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right]\end{aligned}$$

Diess wäre nun der Form nach das Rechnungsresultat der hier auseinandergesetzten Methode des Integrirens in aufsteigender Reihenform. Die Umstände müssen es dem Rechner lehren, ob und in welcher Anzahl von Gliedern er dieses Resultat wirklich zu entwickeln habe oder nicht. Es können ja gelegentlich die Reihen, die man erhält, so wenig brauchbar erscheinen, so wenig convergiren, und

das Gesetz der successiven Bildung der Glieder aus einander so wenig erkennen lassen, dass die ganze Rechnung nur den einzigen Zweck behält, die im Integrale vorhandenen logarithmischen Transcendenten zu entdecken. Dann wäre sie lediglich fortzusetzen, bis zur Gleichung (215), in welcher dann die von Null verschiedenen der mit G bezeichneten Coefficienten die Orte angeben werden, an denen sich der Logarithmus befindet. Sind sie alle der Nulle gleich, so ist das allgemeine Integral von dieser Transcendente frei. Sind ferner mit der Abwesenheit dieses Logarithmus noch gewisse andere Erscheinungen, nämlich gruppenweise vorhandene Werthe des Exponenten h, deren Glieder im Verhältnisse der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... stehen, verknüpft; so könnte man daraus die Berechtigung ziehen, den Ursprung der Differentialgleichung aus einer algebraischen abzuleiten. Manchmal könnte man wohl auch für gut finden, nur einen einzigen Zweig der Rechnung durchzumachen, denjenigen nämlich, der sich mit der Ermittlung beschäftigt des einzigen particulären Integrales, dem der Factor $(x-\alpha)^h$ angehört, und daran die Untersuchung zu knüpfen, ob nicht etwa eben dieses Eine in geschlossener Form vorhanden und die Differentialgleichung mit Vortheil davon zu befreien sei. Es versteht sich von selbst, dass man solch' eine geschlossene Gestalt nur dann zu erwarten hat, wenn das particuläre Integral bereits eine Function erster Classe ist, wenn folglich in den Schlusscoefficienten der Differentialgleichung der charakteristische Abfall um die Einheit in der Gradzahl auf das Paar entweder ursprünglich vorhanden, oder durch eine vorgängige Transformation erzielt worden ist.

Es wird nicht unerspriesslich sein, in einem Beispiele diese Integrationsmethode durchzuführen. Wir wählen dazu die folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit quadratischen Coefficienten:

$$x\,(x-b)\,y'' - [\beta x\,(x-b) + p\,(x-b) + qx]\,y' + [\beta hx + c]\,y = 0, \tag{220}$$

bemerkend, dass eine jede Differentialgleichung von dieser Ordnungszahl und mit Coefficienten des zweiten Grades auf diese Form gebracht zu werden vermöge.

In der That, setzen wir voraus, es wäre gegeben:

$$(a_2\,x^2 + b_2\,x + c_2)\,y'' + (a_1\,x^2 + b_1\,x + c_1)\,y' + (a_0\,x^2 + b_0\,x + c_0)\,y = 0, \tag{221}$$

so wird man damit anfangen, durch den Coefficienten a_2 wegzudividiren und denselben so zu verwandeln in die Einheit; sodann wird man den ersten Coefficienten in seine einfachen Factoren zerlegen, und ihm dadurch die Gestalt $(x-a)\,(x-b)$ ertheilen; dann führt man eine neue Variable ein durch eine der beiden sehr einfachen Substitutionen: $x-a=\mathfrak{x}$, $x-b=\mathfrak{x}$; so hat man zwei Arten, dem ersten Coefficienten die in (220) vorausgesetzte Form zu ertheilen. Sie lassen sich meistentheils zusammenfassen in Eine, da nämlich a und b sich von einander nur unterscheiden im Zeichen eines gewissen Radicales, so bewirkt man auch alle zwei Transformationen auf einmal, indem man dieses Radical mit seinem Doppelzeichen $\pm$ in der Rechnung stehen lässt. Endlich wird man noch dazu den Abfall um die Einheit in der Gradzahl, den die Schlusscoefficienten der Gleichung zeigen, durch eine neue Transformation erzielen, vermittelst der Substitution nämlich $y=e^{\theta x}.\mathfrak{z}$. Hiemit wäre nun im Allgemeinen und ohne Rücksicht auf die etwaigen Ausnahmsfälle, die bereits in den Paragraphen 2 und 3

der Transformationslehre zur Genüge zur Sprache gebracht wurden, und stets eine Vereinfachung der Differentialgleichung nach sich ziehen, die Form (220) aus der (221) erzeugt, und zwar, da θ zwei Werthe hat, auf zwei verschiedene Arten, die man auch in Eine zusammennehmen kann.

Wir fassen also die (220) ins Auge und haben in derselben, da der erste Coefficient zwei einfache Factoren besitzt, den x nämlich und den $x-b$, die zu ihnen gehörigen Exponenten h_1 und h_2 gegeben durch die Formel (188), wie folgt:

$$h_1 = p + 1\,, \qquad h_2 = q + 1.$$

Sind nun p und q ganze positive Zahlen, oder ist auch nur eine unter ihnen von dieser Beschaffenheit, so deutet diess nicht nur auf einen Factor x^{p+1} oder $(x-b)^{q+1}$ in einem einzigen particulären Integrale, sondern im Allgemeinen auch auf eine logarithmische Transcendente.

Der Umstand, dass dieser Exponent als noch beliebiger Werthe fähiger Parameter erscheint, vermöchte nun die Veranlassung zu geben, dass man vor allem anderen das particuläre Integral mit dem Factor x^{p+1} sucht. Es dienen hiezu die Formeln (211), in welchen man jetzt speciell hat:

$$\mathfrak{X}_n = x\,(x-b)\,, \quad \mathfrak{X}_{n-1} = -\beta x\,(x-b) - p\,(x-b) - qx\,, \quad \mathfrak{X}_{n-2} = \beta h x + c$$

$$\underset{n}{\mathfrak{X}} = x-b\,, \quad \mathfrak{X}'_{n-1} = -2\beta x + b\beta - p - q\,, \quad \mathfrak{X}'_{n-2} = \beta h\,, \quad \underset{n}{\mathfrak{X}}' = 1\,, \quad \mathfrak{X}''_{n-1} = -2\beta$$

$$\underset{n}{\mathbf{X}} = -b\,, \quad \underset{n}{\mathbf{X}}' = 1\,, \quad \underset{n}{\mathbf{X}}'' = 0\,, \quad \mathbf{X}_{n-1} = bp\,, \quad \mathbf{X}'_{n-1} = b\beta - p - q\,, \quad \mathbf{X}''_{n-1} = -2\beta$$

$$\mathbf{X}_{n-2} = c\,, \qquad \mathbf{X}'_{n-2} = \beta h.$$

Berechnet man hiernach die Werthe der Reihencoefficienten $\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+2)}$, $\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+3)}$, ... in Function von $\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+1)}$, noch überdiess der Kürze wegen annehmend:

$$b\beta - q = s\,, \qquad p - h + 1 = t\,,$$

so ergibt sich zunächst:

$$\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+2)} = \frac{1}{b}\left[(p+1)\,s + c\right]\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+1)}$$

$$\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+3)} = \frac{1}{2b}\left\{\left[(p+2)\,(s+1)+c\right]\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+2)} - \beta\,(p+2)\,t\,\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+1)}\right\}$$

$$\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+4)} = \frac{1}{3b}\left\{\left[(p+3)\,(s+2)+c\right]\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+3)} - \beta\,(p+3)\,(t+1)\,\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+2)}\right\}$$

....

$$\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+r+1)} = \frac{1}{rb}\left\{\left[(p+r)\,(s+r-1)+c\right]\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+r)} - \beta\,(p+r)\,(t+r-2)\,\underset{0}{\mathbf{Y}}^{(p+r-1)}\right\}$$

....

dann aber durch Substitution aus den vorangehenden Gleichungen in die nächstfolgenden der Reihe nach:

$$\mathrm{Y}_0^{(p+2)} = \frac{\mathrm{Y}_0^{(p+1)}}{b}\Big[(p+1)\,s + c\Big].$$

$$\mathrm{Y}_0^{(p+3)} = \frac{\mathrm{Y}_0^{(p+1)}}{1.2b^2}\Big\{\Big[(p+2)(s+1)+c\Big]\Big[(p+1)\,s+c\Big] - b\beta\,(p+2)\,t\Big\}$$

$$(223)\quad \mathrm{Y}_0^{(p+4)} = \frac{\mathrm{Y}_0^{(p+1)}}{1.2.3.b^3}\left\{\begin{aligned}&\Big[(p+3)(s+2)+c\Big]\Big[\Big[(p+2)(s+1)+c\Big]\Big[(p+1)s+c\Big] - b\beta(p+2)\,t\Big] - \\ &\qquad - 2b\beta\,(p+3)\,(t+1)\Big[(p+1)\,s+c\Big]\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{Y}_0^{(p+5)} = \frac{\mathrm{Y}_0^{(p+1)}}{1.2.3.4.b^4}\left\{\begin{aligned}&\Big[(p+4)(s+3)+c\Big]\Big\{\Big[(p+3)(s+2)+c\Big]\Big[\Big[(p+2)(s+1)+c\Big]\Big[(p+1)s+c\Big] - \\ &\quad - b\beta\,(p+2)\,t\Big] - 2b\beta\,(p+3)\,(t+1)\,\Big[(p+1)\,s+c\Big]\Big\} - \\ &\quad - 3b\beta(p+4)(t+2)\,\Big\{\Big[(p+2)(s+1)+c\Big]\Big[(p+1)s+c\Big] - b\beta(p+2)\,t\Big\}\end{aligned}\right.$$

....

Die Formeln (222) zeigen uns zuvörderst auf das klarste, dass es allerdings zahlreiche Fälle gel wo diess erste particuläre Integral mit dem Factor x^{p+1} sich in ein geschlossenes algebraisches Pol nom verwandelt. So oft nämlich zwei auf einander folgende der Y_0 genannten Coefficienten, etwa $\mathrm{Y}_0^{(p+r}$ $\mathrm{Y}_0^{(p+r)}$ verschwinden, sind auch all' die folgenden der Nulle gleich. So wird z. B. der monomisc Werth x^{p+1} ein particuläres Integral, wenn die folgenden zwei Bedingungsgleichungen erfüllt sind:

$$(224)\qquad (p+1)\,s + c = 0. \qquad \beta t = 0.$$

In diesem speciellen Falle wird man dann passender Weise die Differentialgleichung von diesem ein Integrale befreien vermittelst der Substitution:

$$y = x^{p+1}.\int z\,dx,$$

und wird sofort erhalten:

$$x\,(x-b)\,.\,z' + \Big[-\beta x^2 + (p+s+2)\,x - b\,(p+2)\Big]\,z = 0.$$

woraus durch Integration:

$$z = C\,.\,e^{\beta x}\,\frac{(x-b)^q}{x^{p+2}}$$

erhalten wird, und das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung liefert in folgend Form:

$$(225)\qquad y = Cx^{p+1}\int e^{\beta x}\,\frac{(x-b)^q}{x^{p+2}}\,dx.$$

Hier kommt, wie man sieht, der $\log x$ in der allgemeinen aufsteigenden Reihenentwicklung vor, wä rend der $\log(x-b)$ im Allgemeinen auch fehlen kann, wenn q eine ganze positive Zahl ist.

Das erste Integral in Reihenform kann aber auch beim zweiten Gliede abbrechen, we zwei andere Bedingungen erfüllt sind, die aussprechen, dass $\mathrm{Y}_0^{(p+3)}$ und $\mathrm{Y}_0^{(p+4)}$ der Nulle gleich sir Diese Bedingungen sind:

$$\left[(p+2)(s+1)+c\right]\left[(p+1)s+c\right]-b\beta(p+2)t=0$$
$$b\beta(p+3)(t+1)\left[(p+1)s+c\right]=0 \tag{226}$$

Da die letzte von ihnen in zwei zerfällt, nämlich:

$$b\beta(p+3)(t+1)=0 \quad \text{und} \quad (p+1)s+c=0, \tag{227}$$

und da wieder der letzten unter diesen zweien die $b\beta(p+2)t=0$ kraft der (226) zugehört, so stösst man hier auf die Bedingungsgleichungen der monomischen Beschaffenheit des ersten Theiles noch einmal. Scheidet man sie, als hieher nicht gehörig, ab, und nimmt noch dazu an, dass weder b noch β verschwinden, indem diess unmittelbar der Differentialgleichung eine ganz andere Form ertheilen würde, die auch eine andere Behandlung erheischt, so gelangt man zu den eigentlichen Bedingungsgleichungen des binomischen Vorkommens des ersten particulären Integrales. Sie sind:

$$t=p-h+1=-1$$
$$\left[(p+2)(s+1)+c\right]\left[(p+1)s+c\right]+b\beta(p+2)=0. \tag{228}$$

Von ihnen kann man die erste als den Werth von h, die zweite als jenen von c bestimmend ansehen. Kraft derselben ist c zweideutig, daher es zwei verschiedene Fälle gibt, wo das erste particuläre Integral unter der folgenden binomischen Form erscheint:

$$y=x^{p+1}+\frac{(p+1)s+c}{b(p+2)}x^{p+2}. \tag{229}$$

Auch hier gelangt man nun durch die ins Werk gesetzte Befreiung von dem erhaltenen particulären Integrale das allgemeine in der folgenden etwas verschiedenen Form:

$$y=Cx^{p+1}\left\{b(p+2)+\left[(p+1)s+c\right]x\right\}\int e^{\beta x}.\frac{(x-b)^q\,dx}{x^{p+2}\left(b(p+2)+\left[(p+1)s+c\right]x\right)^2}. \tag{230}$$

Auf diese Weise nun kann man in der Untersuchung fortfahren, das erste particuläre Integral der Reihe nach als Trinom, Quadrinom u. s. w. darstellen, und stets die zwei Bedingungsgleichungen dieses geschlossenen Vorkommens aufzeichnen. Von ihnen besagt die erste jedesmal, dass p eine negative ganze Zahl, entnommen der Reihe $-2, -3, -4, \ldots\ldots$ sei; die andere aber erklärt den constanten Parameter c beziehlich als eine dreideutige, vierdeutige u. s. w. Grösse. Während man so fortfahrend zu einem bestimmten geschlossenen Ausdrucke gelangt für das erste mit dem Factor x^{p+1} versehene Integral in der Gestalt:

$$y=x^{p+1}\left[1+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+A_rx^r\right],$$

so bekömmt man durch Befreiung der Differentialgleichung von demselben auch jedesmal das allgemeine Integral in der Form:

$$y=Cx^{p+1}\left[1+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots\ldots+A_rx^r\right]\int e^{\beta x}\frac{(x-b)^q\,dx}{x^{p+2}\left[1+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_rx^r\right]^2}. \tag{231}$$

Das Bestehen dieser Formel ist nun zwar an die zwei Bedingungsgleichungen der geschlossenen Existenz geknüpft; wenn man jedoch das geschlossene Polynom, welches in derselben enthalten ist, sich in eine unendliche Reihe verwandelt denkt, so hört sie desshalb gar nicht auf, giltig zu sein, sie ist es vielmehr völlig ohne alle Bedingung, nur ist dann ihre Brauchbarkeit an das Mass der Convergenz der unendlichen Reihe geknüpft, hängt also ab von der Beschaffenheit der mit A bezeichneten Coefficienten, deren Werthe sind:

$$A_1 = \frac{Y_0^{(p+2)}}{(p+2)\,Y_0^{(p+1)}}, \quad A_2 = \frac{Y_0^{(p+3)}}{(p+2)(p+3)\,Y_0^{(p+1)}}, \quad A_3 = \frac{Y_0^{(p+4)}}{(p+2)(p+3)(p+4)\,Y_0^{(p+1)}}, \;\ldots\ldots\ldots$$

Die Convergenz der unendlichen Reihe hängt somit ab von dem Werthe, den der Bruch:

$$\frac{A_r\, x}{A_{r-1}} = \frac{Y_0^{(p+r+1)}\, x}{(p+r+1)\,Y_0^{(p+r)}} \tag{232}$$

für sehr grosse Werthe von r annimmt, Diess hängt aber wieder von der Beschaffenheit der Coefficienten Y_0 ab. Um diese letztere zu beurtheilen, legen wir uns die allgemeine der Gleichungen (222), d. h. die:

$$\frac{Y_0^{(p+r+1)}}{Y_0^{(p+r)}} = \frac{1}{br}\left\{\Big[(p+r)(s+r-1)+c\Big] - \beta\,(p+r)(t+r-2)\,\frac{Y_0^{(p+r-1)}}{Y_0^{(p+r)}}\right\}, \tag{233}$$

durch $Y_0^{(p+r)}$ getheilt, hier nochmals vor. Man erkennt nach einiger Überlegung, dass sie nur zwei verschiedene Fälle zulasse, nämlich erstens: die spätesten der auf einander folgenden Y_0 wachsen im Verhältnisse einer endlichen Zahl zum unendlichen Stellenzeiger r, so dass man für solche sehr grosse r:

$$\frac{Y_0^{(p+r+1)}}{Y_0^{(p+r)}} = ar \quad \text{somit auch} \quad \frac{Y_0^{(p+r)}}{Y_0^{(p+r-1)}} = ar \tag{234}$$

hat. Nimmt man diess an, so ergibt sich aus der vorliegenden Gleichung (233) unmittelbar:

$$a = \frac{1}{b}.$$

Stellt man diess in Vergleich mit der (232), so erhält man abermals für sehr grosse r:

$$\frac{A_r\, x}{A_{r-1}} = \frac{x}{b}, \tag{235}$$

d. h. mit andern Worten, die unendliche Reihe, welche das erste particuläre Integral wiedergibt, convergirt in den spätesten Gliedern für all' diejenigen Werthe von x, welche auch die Convergenz der Reihe für $(x-b)^{q+1}$ nach sich ziehen, was gelegentlich auch daher rühren mag, dass eben diese Potenz ebenfalls annoch einen Factor dieses particulären Integrales bildet.

Es ist aber zweitens noch ein anderer Fall möglich: $Y_0^{(p+r)}$ nähert sich nämlich beim fortwährenden Wachsen des Stellenzeigers r irgend einer endlichen Grenze, oder wenigstens die Reihe der Y_0 ist eine im Masse wie eine geometrische Progression steigende, so dass man:

$$\frac{Y_0^{(p+r+1)}}{Y_0^{(p+r)}} = a \tag{236}$$

unter a einen bestimmten endlichen Quotienten hat. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich aus der (233) $a=\beta$, sohin:

$$\frac{A_r\, x}{A_{r-1}} = \frac{\beta x}{r} \tag{237}$$

für sehr grosse Werthe von r. Diess heisst mit anderen Worten: Die das erste particuläre Integral darstellende Reihe convergirt in den spätesten Gliedern genau so, wie diejenige, in die man die Exponentialgrösse $e^{\beta x}$ verwandeln kann, somit für jedes x. Mehr als diese zwei verschiedenen Fälle gibt es nicht, weil die Gleichung (233) einem jeden anders vorausgesetzten Verhalten der Coefficienten Y_0 widerspricht. Es kann im Allgemeinen nicht entschieden werden, welcher von diesen beiden Fällen vorliegt. Diess hängt unmittelbar von dem Verhalten der Anfangscoefficienten A_1, A_2, ... ab und mittelbar von den Bedeutungen der constanten Parameter der Differentialgleichung, zeigt sich aber in einem jeden speciellen Falle nach einer mässigen Anzahl berechneter Anfangsglieder. Ist Convergenz in der Weise der Exponentialreihe vorhanden, dann hat man wohl alle Ursache, mit dem Rechnungsresultate zufrieden zu sein. Findet es sich dagegen, dass die Reihe nur convergirt in der Art der Binomialreihe $(x-b)^{q+1}$ also zwischen Grenzen, welche durch die Relation: $-b<x<+b$ gegeben sind, und man wünscht einen höheren Grad der Convergenz inner- und auch ausserhalb dieser Grenzen zu erzielen, so mag man versuchen, das erste particuläre Integral von dem wahrscheinlicherweise noch darin vorhandenen Factor $(x-b)^{q+1}$ zu befreien, was durch die Substitution:

$$y = (x-b)^{q+1} . u \tag{238}$$

bewerkstelligt wird, welche nach leichter Rechnung zur folgenden transformirten Gleichung in u leitet:

$$x(x-b)\, u'' - \left[\beta x(x-b) + p(x-b) - (q+2)x\right] u' + \left[\beta(h-q-1)x + c - p(q+1)\right] u = 0. \tag{239}$$

Sie unterscheidet sich von der in y in der Form gar nicht, sondern nur in den constanten Parametern, und zwar so, dass anstatt der Coefficienten in (220):

$$q\,, \qquad h\,, \qquad c \tag{240}$$

in der Transformirten beziehlich zu stehen kommen:

$$-q-2\,, \qquad h-q-1\,, \qquad c-p(q+1). \tag{241}$$

Demzufolge ist es nicht nothwendig, eigens diejenige Entwicklung des particulären Integrales in Reihen, welches die Transformirte besitzt, mit dem Factor x^{p+1} durch eine neue Rechnung vorzunehmen. Es genügt nämlich in den erhaltenen Formeln (223), (230) und (231) eine Verwandlung der Grössen (240) in die (241) vorzunehmen, wenn man hiebei nur nicht vergisst, dass auch s und t dadurch ihre Werthe ändern. Nimmt man daher an:

$$s' = b\beta + q + 2\,, \qquad t' = p - h + q + 2\,, \qquad c' = c - p(q+1), \tag{242}$$

$$U_0^{(p+2)} = \frac{U_0^{(p+1)}}{b} \left[(p+1)\, s' + c'\right]$$

$$(243)\quad U_0^{(p+3)} = \frac{U_0^{(p+1)}}{1.2.b^2} \left\{\left[(p+2)\,(s'+1) + c'\right]\left[(p+1)\, s' + c'\right] - b\beta\,(p+2)\, t'\right\}$$

$$U_0^{(p+4)} = \frac{U_0^{(p+1)}}{1.2.3.b^3} \left\{\left[(p+3)(s'+2) + c'\right]\left[\left[(p+2)\,(s'+1) + c'\right]\left[(p+1)\, s' + c'\right] - b\beta\,(p+2)\, t'\right]\right.$$
$$\left. - 2b\beta\,(p+3)\,(t'+1)\left[(p+1)\, s' + c'\right]\right\}$$

....

$$(244)\quad B_1 = \frac{U_0^{(p+2)}}{(p+2)\, U_0^{(p+1)}}, \quad B_2 = \frac{U_0^{(p+3)}}{(p+2)(p+3)\, U_0^{(p+1)}}, \quad B_3 = \frac{U_0^{(p+4)}}{(p+2)(p+3)(p+4)\, U_0^{(p+1)}}, \; \ldots\ldots$$

so bildet sich aus diesen Grössen das allgemeine Integral der Differentialgleichung in y auch noch in folgender Gestalt:

$$(245)\quad y = Cx^{p+1}\,(x-b)^{q+1}\left[1 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots\right] \int e^{\beta x} \frac{dx}{x^{p+2}\,(x-b)^{q+2}\left[1 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\right]^2}.$$

Dem Urtheile des Rechners bleibt es überlassen, welche dieser beiden Formen (231) und (245) er weiter zu verwenden vorzieht. Auch die neue gewonnene Formel (245) vermag durch Abbrechen der Reihe in eine geschlossene zu übergehen, nur ist auch hier jedesmal das Stattfinden zweier Bedingungsgleichungen erforderlich: z. B. damit diese Reihe gleich nach dem ersten Gliede abbreche, folglich $B_1 = B_2 = B_3 = \ldots\ldots$ gleich Null sei, muss:

$$t' = 0 \qquad \text{und} \qquad (p+1)\, s' + c' = 0$$

sein, oder, was dasselbe ist:

$$h = p + q + 2, \qquad (p+1)\, b\beta + h + c = 0.$$

In ähnlicher Weise ist das Abbrechen der Reihe nach dem zweiten Gliede, so dass B_1 von Null verschieden bleibt, während B_2, B_3, ... gleich Null sind, an die nachfolgenden zwei Bedingungsgleichungen geknüpft:

$$t' = -1, \qquad \left[(p+2)\,(s'+1) + c'\right]\left[(p+1)\, s' + c'\right] + b\beta\,(p+2) = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$h = p + q + 3, \qquad \left[(p+2)\, b\beta + 2h + c\right]\left[(p+1)\, b\beta + h + c\right] + b\beta\,(p+2) = 0$$

u. s. w. Wesentlich ist es noch, die Bemerkung anzufügen, dass unsere so gewonnenen Integralformeln (231) und (245) zwar unter der beschränkenden Voraussetzung eines ganzen und positiven p abgeleitet sind, und aus Formeln, denen eben diese Voraussetzung zu Grunde liegt, dass man sich jedoch sehr leicht überzeugen kann von ihrer unbeschränkten Giltigkeit, p mag reell oder imaginär, positiv oder negativ, ganz oder gebrochen sein. Es ist in der That in keiner Weise zu bezweifeln, dass die in Rede stehenden Integralformeln giltig seien für jede noch unbestimmt gelassene, anstatt p gesetzte

$$= \frac{c_1 - a_1 c_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 - b_1)(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4c_2})}{\sqrt{b_2^2 - 4c_2}}\qquad q = -\frac{c_1 - a_1 c_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 - b_1)(b_2 - \dots}{\sqrt{b_2^2 - 4c_2}}$$

$$b = +\sqrt{b_2^2 - 4c_2}, \quad \beta = +\sqrt{a_1^2 - 4a_0}, \quad h = \frac{b_0 - a_0 b_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 - b_1)(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0})}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}},$$

$$c = c_0 - a_0 c_2 + \frac{1}{2}(a_0 b_2 - b_0)(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4c_2}) - \frac{1}{2}\left[c_1 - a_1 c_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 - b_1)(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4c_2})\right](a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0})$$

$$b = +\sqrt{b_2^2 - 4c_2}, \quad \beta = -\sqrt{a_1^2 - 4a_0}, \quad h = -\frac{b_0 - a_0 b_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 - b_1)(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0})}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}},$$

$$(247)\quad c = c_0 - a_0 c_2 + \frac{1}{2}(a_0 b_2 - b_0)(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4c_2}) - \frac{1}{2}\left[c_1 - a_1 c_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 - b_1)(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4c_2})\right](a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0})$$

$$b = -\sqrt{b_2^2 - 4c_2}, \quad \beta = +\sqrt{a_1^2 - 4a_0}, \quad h = \frac{b_0 - a_0 b_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 - b_1)(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0})}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}},$$

$$c = c_0 - a_0 c_2 + \frac{1}{2}(a_0 b_2 - b_0)(b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4c_2}) - \frac{1}{2}\left[c_1 - a_1 c_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 - b_1)(b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4c_2})\right](a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0})$$

$$b = -\sqrt{b_2^2 - 4c_2}, \quad \beta = -\sqrt{a_1^2 - 4a_0}, \quad h = -\frac{b_0 - a_0 b_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 - b_1)(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0})}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}},$$

$$c = c_0 - a_0 c_2 + \frac{1}{2}(a_0 b_2 - b_0)(b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4c_2}) - \frac{1}{2}\left[c_1 - a_1 c_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 - b_1)(b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4c_2})\right](a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4\dots}$$

Mit den hier aufgezeichneten vier Systemen von Werthen der sechs Parameter kann
nun nach Belieben die Integralformel (231) oder die andere (245) construiren, und bekommt in
Weise das Integral in acht verschiedenen Gestalten, aus welchen man diejenige, welche den
nissen am besten zusagt, etwa eine geschlossene, wenn sie vorhanden ist, oder die mit der co
rendsten Reihe versehene auswählen wird, und es könnte jetzt nur noch verlangt werden, d
vermittelst eines mathematischen Beweises unwidersprechlich darthue, dass sämmtliche acht F
bilde die Convergenz entweder mit der Entwicklung von $(x-b)^{p+1}$, oder mit der Entwicklun
theilen. Es unterliegt diess keinen Schwierigkeiten, denn es ist augenscheinlich $\frac{Y_0^{(p+r)}}{Y_0^{(p+r-1)}}$ ein
von r, die absteigend nach Potenzen dieses Stellenzeigers in eine Reihe entwickelt we
Nehmen wir also an, es sei:

$$(248)\quad Y_0^{(p+r)} = (Ar^\gamma + Br^\delta + \dots\dots\dots)\, Y_0^{(p+r-1)},$$

so ist ebenso:

$$Y_0^{(p+r+1)} = (A\,(r+1)^\gamma + B\,(r+1)^\delta + \dots\dots\dots)\, Y_0^{(p+r)}.$$

...en mit einander, so ergibt sich:

$$\mathrm{Y}_{\circ}^{(p+r+1)} = [A^2 r^{2\gamma} + \gamma A^2 r^{2\gamma-1} + 2ABr^{\gamma+\delta} + \dots\dots\dots] \, \mathrm{Y}_{\circ}^{(p+r-1)}.$$

Substituiren wir nun diese Werthe in die Gleichung (233), dieselbe zuvor mit $br\mathrm{Y}_{\circ}^{(p+r)}$ multiplizirend, absteigend ordnend und den gemeinschaftlichen Factor $\mathrm{Y}_{\circ}^{(p+r-1)}$ tilgend, so ist das Ergebniss folgende Gleichung:

$$\begin{gathered} bA^2 r^{2\gamma+1} + b\gamma A^2 r^{2\gamma} + 2bABr^{\gamma+\delta+1} + \dots\dots\dots = \\ = Ar^{\gamma+2} + Br^{\delta+2} + (s+p-1)\,Ar^{\gamma+1} + (s+p-1)\,Br^{\delta+1} + \\ + [p(s-1)+c]\,Ar^{\gamma} + [p(s-1)+c]\,Br^{\delta} - \beta r^2 - \beta(t+p-2)\,r - \beta p\,(t-2) + \dots\dots \end{gathered}$$

So lange hier die grössten Exponenten von r, die augenscheinlich $2\gamma+1$, $\gamma+2$, und 2 sind, von einander verschieden bleiben, ist an ein Identischwerden dieser Gleichung nicht zu denken. Es müssen also irgend welche zwei aus diesen dreien einander gleich ausfallen. Man wird also entweder haben: $2\gamma+1=\gamma+2$ folglich $\gamma=1$, oder $\gamma+2=2$, also $\gamma=0$, oder $2\gamma+1=2$ also $\gamma=\frac{1}{2}$. Der letzte Fall ist auszuschliessen, weil beim Bestehen desselben nicht $2\gamma+1$ und 2 die höchsten Exponenten sind, sondern der dritte unter ihnen, $\gamma+2$ nämlich, der $2\frac{1}{2}$ wird, also ein isolirtes Glied begründet, bei dessen Vorhandensein wieder ein Identischwerden unmöglich wird. Es kann also γ nur zwei verschiedene Werthe annehmen, die Eins und Null nämlich. Erkiest man den einen von ihnen, so verlangt die vorliegende Gleichung noch überdiess, dass:

$$bA^2 = A \qquad \text{folglich} \qquad A = \frac{1}{b}$$

sei. Nimmt man hingegen den zweiten an, so ergibt sich noch überdiess $A=\beta$, wodurch die obangedeutete Weise der Convergenz bewiesen ist. Welche jedoch der zwei möglichen Convergenzarten speciell diejenigen sei, welche wirklich eintritt, wollen wir an diesem Orte nicht entscheiden, um nicht in zahlreiche Distinctionen verwickelt zu werden, die uns gegenwärtig von keinem Nutzen sind, denn führt einmal irgend ein Bewegungsproblem zu einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung von der betrachteten Gestalt, so sind in derselben jedesmal weniger als sechs Parameter vorhanden, die noch dazu kraft ihrer Bedeutungen als Dimensionen, Druck, Dichte, Spannung in ihren Werthen beschränkt sind, z. B. nicht negativ zu sein vermögen, und da ergibt es sich immer nach einigen in der Rechnung gemachten Schritten, ob im zweiten Theile der Gleichung (233) das erste Glied gegen das zweite bei der Zunahme von r ins Unendliche wächst, oder ob sie gegen die Gleichheit convergiren. Im ersten Falle hat man offenbar die Convergenz der geometrischen Progression, im zweiten die unbeschränkte der Exponentialreihe.

Dieses in gewisser Beziehung, wenn auch nur durch eine Disjunction bestimmte Mass der Convergenz der Reihe, die das Integral darstellt nach aufsteigenden Potenzen geordnet des Factors des ersten Gleichungscoefficienten, ist nur ein specieller Fall einer viel allgemeineren Regel, die folgendermassen lautet: Wenn der Factor $x-\alpha$ des ersten Coefficienten der Differentialgleichung auf ein dem $(x-\alpha)^{\lambda}$ proportionales particuläres Integral hindeutet, und man sucht eben dieses eine in aufsteigen-

der Reihenform; so ist das Mass der Convergenz dieser gesuchten Reihe zwar kein vollst stimmtes, man weiss aber doch, dass es mit dem Masse der Convergenz irgend einer der denen Asymptoten, die den particularen Integralen angehören, die man sich ebenfalls in die R gebracht denkt, zusammenfalle. Es sind jedoch hier Asymptoten gemeint, nicht bloss diejen man den Gradzahlen der Coefficienten entnimmt, sondern auch noch die anderen, die man aus torenbaue der Anfangscoefficienten erschliesst.

Nehmen wir an, ein Factor von $\mathfrak{X}_n$ sei eben x. Man kann diess, wie bekannt, i werkstelligen und zwar in der Regel auf mehrere verschiedene Arten. Die übrigen aber n — Zahl seien: $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, $x-\alpha_3$, ... $x-\alpha_{n-1}$. Die diesen Factoren entsprechend nenten heissen: h_0, h_1, h_2, h_3 ..... h_{n-1} und entwickelt man das particuläre Integral, we x^{h_0} multiplizirt erscheint, so bekömmt man eine Reihe, deren Convergenz in den spätesten mit irgend einer der Entwicklungen der Potenzen $(x-\alpha_1)^{h_1}$, $(x-\alpha_2)^{h_2}$, ... $(x-c$ oder auch mit der Entwicklung von einer der exponentiellen Asymptoten, die die particulären besitzen, und die man aus den Gradzahlen der Coefficienten erkennt, zusammenfällt.

Den allgemeinen Beweis dieser Regel zu führen, ist nicht schwer. In der That, trachte die Gleichung (206) und denke sich den Gliedzeiger p, der in ihr vorkommt, durch gross gedachte ganze positive Zahl r ersetzt, zugleich die Zusätze niederer Ordnungen, die zukommen, als verschwindend weggelassen, und zu gleicher Zeit werde angenommen, dass k Gleichungscoefficienten $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{X}_{n-1}$, ... $\mathfrak{X}_0$ die gewisse Gradzahl m überschreite; man der Berechnung eben des einen, bekanntlich entwickelbaren particulären Integrales befange den logarithmischen Zusatz, also jegliches Y_1 gleich Null habe.

Die (206) geht unter solchen Umständen über in:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & r\underset{n}{X}Y_0^{(h+r)} + \left[r^2\,\underset{n}{X}' + rX'_{n-1} + X_{n-2}\right] Y_0^{(h+r-1)} + \\
& + \left[\frac{r^3}{2}\,\underset{n}{X}'' + \frac{r^2}{2}\,X''_{n-1} + rX'_{n-2} + X_{n-3}\right] Y_0^{(h+r-2)} + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \left[\frac{r^m}{(m-1)!}\,\underset{n}{X}^{(m-1)} + \frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\,X_{n-1}^{(m-1)} + \cdots\cdots\right] Y_0^{(h+r-m+1)} + \\
& + \left[\frac{r^m}{m!}\,X_{n-1}^{(m)} + \frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\,X_{n-2}^{(m-1)} + \cdots\cdots\right] Y_0^{(h+r-m)} + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{r^m}{m!}\,X_0^{(m)} \,.\, Y_0^{(h+r-m-n+1)}.
\end{aligned}
\tag{249}
$$

Erheben sich nun sämmtliche Gleichungscoefficienten wirklich zum m^{ten} Grade, so wir Gleichung durch Weglassen der Glieder niederer Ordnungen nach r gegen die höhere lassen, wie folgt:

$$0 = r\underset{n}{X}Y_0^{(h+r)} + r^2 \underset{n}{X}' Y_0^{(h+r-1)} + \frac{r^3}{2} \underset{n}{X}'' Y_0^{(h+r-2)} + \dots\dots\dots + \frac{r^m}{(m-1)!} \underset{n}{X}^{(m-1)} Y_0^{(h+r-m+1)} +$$

$$+ \frac{r^m}{m!} \left[X_{n-1}^{(m)} Y_0^{(h+r-m)} + X_{n-2}^{(m)} Y_0^{(h+r-m-1)} + \dots\dots\dots + X_0^{(m)} Y_0^{(h+r-m-n+1)} \right]. \tag{250}$$

Man überzeugt sich sehr leicht, dass hier nur zweierlei Verhalten der Coefficienten Y_0 möglich sei: Es ist nämlich entweder:

$$\frac{Y_0^{(h+r)}}{Y_0^{(h+r-1)}} = Ar, \tag{251}$$

und folglich auch:

$$\frac{Y_0^{(h+r-1)}}{Y_0^{(h+r-2)}} = Ar, \quad \frac{Y_0^{(h+r-2)}}{Y_0^{(h+r-3)}} = Ar, \quad \dots\dots\dots \quad \frac{Y_0^{(h+r-m+2)}}{Y_0^{(h+r-m+1)}} = Ar,$$

woraus folgt:

$$0 = \underset{n}{X} A^{m-1} + \underset{n}{X}' A^{m-2} + \frac{1}{2} \underset{n}{X}'' A^{m-3} + \dots\dots\dots + \frac{1}{(m-1)!} \underset{n}{X}^{(m-1)}. \tag{252}$$

Bezeichnet man für einen Augenblick:

$$\underset{n}{\mathfrak{X}} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots\dots\dots (x - \alpha_{n-1}) = \varphi(x),$$

so lässt sich diese Gleichung auch folgendermassen schreiben:

$$A^{m-1} \varphi\left(0 + \frac{1}{A}\right) = A^{m-1} \left(\frac{1}{A} - \alpha_1\right)\left(\frac{1}{A} - \alpha_2\right) \dots\dots\dots \left(\frac{1}{A} - \alpha_{n-1}\right) = 0,$$

und liefert die Wurzeln:

$$A = \frac{1}{\alpha_1}, \quad A = \frac{1}{\alpha_2}, \quad \dots\dots\dots \quad A = \frac{1}{\alpha_{n-1}},$$

d. h. mit anderen Worten, die erhaltene Reihe der Y_0 wird in den spätesten Gliedern wachsen im Verhältnisse der Einheit zu einer der Grössen $\frac{r}{\alpha_1}, \frac{r}{\alpha_2}, \dots\dots \frac{r}{\alpha_{n-1}}$. Das daraus construirte particuläre Integral jedoch wird in derselben Weise und für dieselben x convergiren, für welche auch irgend eine der Potenzen:

$$(x - \alpha_1)^{h_1}, \quad (x - \alpha_2)^{h_2}, \quad (x - \alpha_3)^{h_3}, \quad \dots\dots\dots \quad (x - \alpha_{n-1})^{h_{n-1}}$$

convergirt.

Oder man wird:

$$\frac{Y_0^{(h+r)}}{Y_0^{(h+r-1)}} = B \tag{253}$$

haben können, folglich auch:

$$\frac{Y_0^{(h+r-1)}}{Y_0^{(h+r-2)}} = B, \quad \frac{Y_0^{(h+r-2)}}{Y_0^{(h+r-3)}} = B, \quad \frac{Y_0^{(h+r-3)}}{Y_0^{(h+r-4)}} = B, \quad \dots\dots\dots \quad \frac{Y_0^{(h+r-m-n+2)}}{Y_0^{(h+r-m-n+1)}} = B.$$

Die Gleichung (250) verwandelt sich bei dieser Annahme in:

$$0 = \frac{1}{(m-1)!} \underset{n}{X}^{(m-1)} B^n + \frac{1}{m!} \left[X_{n-1}^{(m)} B^{n-1} + X_{n-2}^{(m)} B^{n-2} + \dots\dots\dots + X_0^{(m)} \right].$$

Sind nun die Anfangsglieder von:

$$\underset{n}{\mathfrak{X}}, \quad \mathfrak{X}_{n-1}, \quad \mathfrak{X}_{n-2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{X}_0,$$

wenn man sich diese Coefficienten nach x absteigend geordnet denkt, beziehlich:

$$a_n\, x^{m-1}, \quad a_{n-1}\, x^m, \quad a_{n-2}\, x^m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a_0\, x^m.$$

so geht diese Gleichung über in:

$$0 = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + a_{n-2} B^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 B + a_0.$$

Nennt man ihre Wurzeln:

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \beta_n,$$

so ergibt sich, dass die Reihe der Y_0 auch wie eine geometrische Progression im Verhältnisse der Einheit zu einer dieser Wurzeln steigen könne. Auf die spätesten Glieder des particulären Integrales trägt sich dadurch derselbe Grad der Convergenz über, der auch der Entwicklung von einer der Exponentiellen:

$$e^{\beta_1 x}, \quad e^{\beta_2 x}, \quad e^{\beta_3 x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad e^{\beta_n x}$$

eigenthümlich ist. Diess sind aber gerade die exponentiellen Asymptoten der n verschiedenen particulären Integrale.

Welches von diesen vielen verschiedenen Verhalten in einem jeden speciellen Falle der geltende ist, muss durch eine eigene Untersuchung entschieden werden. Dem Rechner wird es obliegen, die beschränkte Convergenz der Binomialreihe durch die passenden analytischen Kunstgriffe, wie Abscheiden eines algebraischen Factors, möglichst zu vermeiden und dagegen das Benehmen einer Exponentialreihe eintreten zu lassen.

Es gibt Fälle, in denen man auf noch convergirendere Reihen stösst, als die Exponentialreihen sind. Diess vermag nämlich dann einzutreten, wenn die Differentialgleichung Abfälle besitzt von weniger als einer Einheit auf das Coefficientenpaar. Hier ist das Aufsuchen der Integrale in aufsteigender Reihenform um so mehr eine angezeigte Massregel, als bei ähnlichem Vorkommen alle anderen Integrationsmethoden ihre Dienste versagen, oder mindestens zu wenig brauchbaren Formen führen. In der That, nehmen wir beispielweise an, $\mathfrak{X}_n$ sei vom Grade m, mithin $\underset{n}{\mathfrak{X}}$ vom Grade $m-1$, die übrigen $\mathfrak{X}_{n-1}, \mathfrak{X}_{n-2} \ldots \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_0$ überschreiten aber alle nicht die Gradzahl $m-1$ und $\mathfrak{X}_0$ besitze sie wirklich. In einem solchen Falle, wo der repartirte Abfall $\frac{1}{n}$ Einheiten aufweist, geht unsere Gleichung (249) über in:

$$0 = r\underset{n}{\mathrm{X}}\mathrm{Y}_0^{(h+r)} + r^2 \underset{n}{\mathrm{X}}'\,\mathrm{Y}_0^{(h+r-1)} + \frac{r^3}{2}\underset{n}{\mathrm{X}}''\,\mathrm{Y}_0^{(h+r-2)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{r^m}{(m-1)!}\underset{n}{\mathrm{X}}^{(m-1)}\,\mathrm{Y}_0^{(h+r-m+1)} +$$
$$+ \frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\left[\mathrm{X}_{n-1}^{(m-1)}\,\mathrm{Y}_0^{(h+r-m)} + \mathrm{X}_{n-2}^{(m-1)}\,\mathrm{Y}_0^{(h+r-m-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathrm{X}_0^{(m-1)}\,\mathrm{Y}_0^{(h+r-m-n+1)}\right]$$

Der Quotient zweier nächst auf einander folgender Y_0 vermag nun entweder die Form Ar zu haben, so wie in dem früheren Falle, oder eine zweite, total davon verschiedene, nämlich:

und es ist die Constante B gegeben durch die folgende binomische Gleichung des n^{ten} Grades:

$$a_n B^n + a_0 = 0.$$

Hiezu kommt noch zu erwägen, dass zwar $Y_0^{(h+r)}$ eine Function des Stellenzeigers r sei, ihrer Bildungsweise nach, kraft deren sie durch eine gewisse Anzahl von Differentiationen erhalten wird, aber offenbar eine rationale Function. Es muss daher in den Rechnungsentwicklungen irgend ein Umstand liegen, vermöge dessen die Irrationalgrösse $\sqrt[n]{r}$ in den Coefficienten vermieden wird. Diess geschieht nun dadurch, dass die Reihenglieder sich nicht um einen Factor, wie $\frac{kx}{r\sqrt[n]{r}}$ von einander unterscheiden, sondern eher durch eine andere wie: $\frac{kx^n}{r^{n+1}}$, so zwar, dass die Reihe nicht nach Potenzen von x, sondern nach Potenzen von x^n geordnet erscheint. Einer Ausnahme begegnet man, wenn $a_0 = 0$ ist, wo sich dann die Gleichung (254) in:

$$a_n B^{n-1} + a_1 = 0$$

verwandelt, was dann ebenso zu einer nach Potenzen von x^{n-1} geordneten Reihe führt, falls nicht auch $a_1 = 0$ ist, wo man eine Reihe erhalten wird, die nach Potenzen von x^{n-2} fortschreitet u. s. w. Diess gibt also jedenfalls eine sehr bedeutende Convergenz, die selbst jener der Exponentialreihe sehr namhaft überlegen ist. Die Aufgabe des Rechners wird es nun sein, durch die geeigneten Rechnungskunstgriffe den der geometrischen Progression eigenthümlichen Convergenzzustand auszuschliessen und dafür den anderen, weit rascheren bloszulegen.

Wir betrachten mithin das Vorkommen solcher Abfälle in der Differentialgleichung, die, auf das Coefficientenpaar repartirt, weniger als die Einheit aufweisen, als den charakteristischen Umstand, der zur Integration in aufsteigender Reihenform speciell auffordert und diess zwar vorzüglich in dem Falle, wo wegen der Armuth des ersten Coefficienten an von einander verschiedenen Factoren diejenigen Asymptoten, die man dem Factorenbaue entnimmt, entweder nur in sehr geringer Anzahl vorhanden sind, oder auch gänzlich fehlen. Diesen Fall bietet die Differentialgleichung:

$$xy^{(n)} - y = 0,$$

welche wir als zweites Beispiel zum Gegenstande unserer Untersuchungen wählen.

Zum Factor x des ersten Coefficienten dieser Differentialgleichung gehört vermöge der Formel (188) ein Exponent $h = n - 1$, sohin eine ganze positive Zahl. Diess weist auf eine logarithmische Transcendente in der allgemeinen Integralformel hin, die hier die Gestalt hat:

$$y = \mathfrak{Y}_0 + \mathfrak{Y}_1 x^{n-1} \log x.$$

Einen Bestandtheil dieses Integrales, $\mathfrak{Y}_0$ nämlich, versehen mit Constanten $n - 1$ an der Zahl, sohin vorderhand noch kein allgemeines Integral bekömmt man ohne Schwierigkeit durch successives Differenziren des Gleichungspolynomes und Nullsetzen des x. Man gewinnt nämlich:

$$
(257)\qquad
\begin{aligned}
xy^{(n+1)} &+ y^{(n)} - y' = 0\\
xy^{(n+2)} &+ 2y^{(n+1)} - y'' = 0\\
xy^{(n+3)} &+ 3y^{(n+2)} - y''' = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\\
xy^{(n+p)} &+ py^{(n+p-1)} - y^{(p)} = 0.
\end{aligned}
$$

Setzt man in diesem Systeme von Gleichungen anstatt x Null und bezeichnet die Werthe, welche dann y, y', y'', ... annehmen, mit Y, Y', Y'', ...; so ergibt sich:

$$
(258)\qquad Y^{(n)} = Y', \quad Y^{(n+1)} = \frac{1}{2}Y'', \quad Y^{(n+2)} = \frac{1}{3}Y''', \quad \dots\dots\dots \quad Y^{(n+p-1)} = \frac{1}{p}Y^{(p)}.
$$

Durch diese Gleichungen finden sich die sämmtlichen Coefficienten der Reihenentwicklung von y vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel von $Y^{(n)}$ angefangen bestimmt durch die anfänglichen $n-1$ an der Zahl: Y', Y'', Y''', ... $Y^{(n-1)}$ und zwar hat man gruppenweise:

$$
(259)\qquad
\begin{aligned}
&Y^{(n)} = Y', \quad Y^{(n+1)} = \frac{1}{2}Y'', \quad Y^{(n+2)} = \frac{1}{3}Y''', \quad \dots\dots\dots \quad Y^{(2n-2)} = \frac{1}{n-1}Y^{(n-1)}\\
&Y^{(2n-1)} = \frac{1}{n}Y', \quad Y^{(2n)} = \frac{1}{2(n+1)}Y'', \quad Y^{(2n+1)} = \frac{1}{3(n+2)}Y''', \quad \dots \quad Y^{(3n-3)} = \frac{1}{(n-1)(2n-2)}Y^{(n-1)}\\
&Y^{(3n-2)} = \frac{1}{1.n.(2n-1)}Y', \quad Y^{(3n-1)} = \frac{1}{2(n+1).2n}Y'', \quad Y^{(3n)} = \frac{1}{3(n+2)(2n+1)}Y''',\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad Y^{(4n-4)} = \frac{1}{(n-1)(2n-2)(3n-3)}Y^{(n-1)}\\
&Y^{(4n-3)} = \frac{1}{1.n(2n-1)(3n-2)}Y', \quad Y^{(4n-2)} = \frac{1}{2(n+1)2n(3n-1)}Y'', \quad Y^{(4n-1)} = \frac{1}{3(n+2)(2n+1)(3n)}Y''',\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad Y^{(5n-5)} = \frac{1}{(n-1)(2n-2)(3n-3)(4n-4)}Y^{(n-1)}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Substituirt man nun die so ermittelten Coefficienten in die Mac-Laurin'sche Reihenentwicklung des y, d. h. in die:

$$
y = Y_0 + Y'x + Y''\frac{x^2}{2} + \dots\dots\dots
$$

und ordnet nach den $n-1$ willkürlichen Constanten: Y', Y'', Y''', .. $Y^{(n-1)}$, so erhält man den folgenden aus sehr convergirenden Reihen zusammengesetzten Integralausdruck, Reihen, die zur Bekräftigung der obangeführten analytischen Wahrnehmungen nicht nach Potenzen von x, sondern nach Potenzen von x^{n-1} geordnet sind, und selbst die Exponentialreihe an Convergenz weit übertreffen, nämlich:

$$y = Y'x\left[1 + \frac{x^{n-1}}{1.n!} + \frac{x^{2n-2}}{1.n.(2n-1)!} + \ldots\ldots + \frac{x^{p(n-1)}}{1.n.(2n-1)\ldots[p(n-1)+1]!} + \ldots\ldots\right]$$

$$+ Y''x^2\left[\frac{1}{2!} + \frac{x^{n-1}}{2.(n+1)!} + \frac{x^{2n-2}}{2.(n+1).(2n)!} + \ldots\ldots + \frac{x^{p(n-1)}}{2.(n+1).2n\ldots[p(n-1)+2]!} + \ldots\ldots\right]$$

$$+ Y'''x^3\left[\frac{1}{3!} + \frac{x^{n-1}}{3.(n+2)!} + \frac{x^{2n-2}}{3.(n+2).(2n+1)!} + \ldots\ldots + \frac{x^{p(n-1)}}{3.(n+2)(2n+1)\ldots[p(n-1)+3]} + \ldots\right] \quad (260)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y^{(n-1)}x^{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1).(2n-2)!} + \frac{x^{2n-2}}{(n-1)(2n-2).(3n-3)!} + \ldots\ldots + \frac{x^{p(n-1)}}{(n-1)(2n-2)(3n-3)\ldots\ldots[(p+1)(n-1)]!} + \ldots\ldots\right].$$

Die der ersten, zweiten, dritten, ... $(n-1)^{sten}$ Potenz von x proportionalen particulären Integrale sind hier vertreten, somit auch dasjenige, das dem Factor x des ersten Gleichungscoefficienten angehört. Es ist nämlich das letzte der hier aufgezeichneten, kommt mithin im allgemeinen Integrale noch einmal vor, mit der Transcendente $\log x$ multiplizirt und man kann immerhin annehmen, dass es, mit diesem Factor versehen, einen Bestandtheil bilde des einen annoch fehlenden particulären Integrales, welches der 0ten Potenz von x proportional ist. Man hat daher in der Formel (256) bereits in aller Vollständigkeit die Function $\mathfrak{Y}_1$, sie ist nämlich:

$$\mathfrak{Y}_1 = C\left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)(2n-2)!} + \frac{x^{2n-2}}{(n-1)(2n-2).(3n-3)!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^{p(n-1)}}{(n-1)(2n-2)\ldots\ldots[(p+1)(n-1)]!} + \ldots\ldots\right]. \quad (261)$$

Aber auch $\mathfrak{Y}_0$ ist bis auf einen einzigen Bestandtheil, das erwähnte particuläre Integral nämlich bekannt. Um diesen wirklich zu gewinnen, ist es nothwendig, die Substitution (256) wirklich eintreten zu lassen. Sie liefert statt der Gleichung (255) die zwei folgenden:

$$x^n\mathfrak{Y}_0^{(n)} - \mathfrak{Y}_0 + \binom{n}{1}\mathfrak{A}'\mathfrak{Y}_1^{(n-1)}x^{n-1} + \binom{n}{2}\mathfrak{A}''\mathfrak{Y}_1^{(n-2)}x^{n-2} + \ldots\ldots + n\mathfrak{A}^{(n-1)}\mathfrak{Y}_1'x + \mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{Y}_1 = 0 \quad (262)$$

$$x^n\mathfrak{Y}_1^{(n)} + \binom{n}{1}(n-1)\mathfrak{Y}_1^{(n-1)}x^{n-1} + \binom{n}{2}(n-1)(n-2)\mathfrak{Y}_1^{(n-2)}x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1.\mathfrak{Y}_1'x - \mathfrak{Y}_1 x^{n-1} = 0. \quad (263)$$

Von ihnen stellt die zweite zugleich das Resultat dar der vermittelst der Substitution:

$$y = x^{n-1}\mathfrak{Y}_1$$

bewirkten Transformation. Sie liefert, in Reihenform integrirt, Nichts als den unter (261) bereits ersichtlichen Ausdruck. Man braucht sich also mit ihr nicht weiter zu befassen, da man weiss, dass:

. . . .

Wir hätten also nur mehr mit der Gleichung (262) zu rechnen, und auch von dieser verlangen wir nur den nicht logarithmischen Bestandtheil des einzigen particulären Integrales, welches der 0ten Potenz von x proportional ist, mit der hinzugefügten Bemerkung, dass auch dieses unendlich vieler verschiedener Werthe fähig ist, weil, wenn man irgend einen derselben gewonnen hätte, man dazu auch noch die in der Formel (260) enthaltenen $n-1$ an der Zahl hinzuzufügen berechtigt ist, je mit beliebigen Constanten multiplizirt. Diese Wahrnehmung kann dazu dienen, die Gestalt dieses einen particulären Integrales unseren Bedürfnissen gemäss zu modeln.

Wir setzen also in der (262) anstatt x die Nulle, zugleich dem Übereinkommen gemäss anstatt $\mathfrak{Y}_0$ und $\mathfrak{Y}_1$ das Y_0 und Y_1 und erhalten:

$$\mathrm{Y}_0 = \mathfrak{A}^{(n)}\,\mathrm{Y}_1,$$

die in der (262) erscheinenden Coefficienten $\mathfrak{A}$ gehen aus den Formeln (191) hervor, wenn man allda h in $n-1$ verwandelt. Es ist sohin namentlich:

$$\mathfrak{A}^{(n)} = \binom{n}{1}(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1 - \binom{n}{2}(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2.1 + \binom{n}{3}(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.1.2 -$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}.1.2.3\ldots\ldots\ldots(n-1) =$$
$$= (n-1)!\,[1-(1-1)^n] = (n-1)!$$

daher hat man:

$$\mathrm{Y}_0 = (n-1)!\,\mathrm{Y}_1 = C. \tag{265}$$

Um jetzt die folgenden Glieder des einzigen mit dem Factor C versehenen Integrales kennen zu lernen, differenziren wir die (262) p-mal, setzen sodann x gleich Null, alle Glieder schon im Vorhinein weglassend, die mit diesem Factor multiplizirt erscheinen würden, und erhalten auf diese Weise:

$$p\mathrm{Y}_0^{(n+p-1)} = \mathrm{Y}_0^{(p)} - \mathrm{Y}_1^{(p)}\left\{\mathfrak{A}^{(n)} + \binom{n}{1}\mathfrak{A}^{(n-1)}.p + \binom{n}{2}\mathfrak{A}^{(n-2)}p(p-1) + \ldots + \binom{n}{n-1}\mathfrak{A}'p(p-1)\ldots(p-n+2)\right\}. \tag{266}$$

Das Polynom, welches mit dem Factor $\mathrm{Y}_1^{(p)}$ in dieser Formel erscheint, fällt bis auf einen Multiplicator $p!$ mit dem ersten Theile der Gleichung (198), in der man sich h durch $n-1$ ersetzt zu denken hat, zusammen. Es ist daher von Wichtigheit, die geschmeidigste mögliche Form aufzusuchen, in der es entweder allgemein für beliebige h, oder speciell für $h=n-1$ erscheinen kann. Zu diesem Ende bemerken wir, dass die mit $\mathfrak{A}$ bezeichneten Coefficienten nicht nur durch die Formeln (191), sondern auch in der folgenden anderen Gestalt, die für den gegenwärtigen Zweck Vortheile bietet,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}' &= \frac{d}{dh}\,[h] = \frac{d}{dh}\left\{\frac{1}{x^{h-1}}\,\frac{d}{dx}\;x^h\right\}\\
\mathfrak{A}'' &= \frac{d}{dh}\,[h\,(h-1)] = \frac{d}{dh}\left\{\frac{1}{x^{h-2}}\,\frac{d^2}{dx^2}\;x^h\right\}\\
\mathfrak{A}''' &= \frac{d}{dh}\,[h\,(h-1)\,(h-2)] = \frac{d}{dh}\left\{\frac{1}{x^{h-3}}\,\frac{d^3}{dx^3}\;x^h\right\}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{A}^{(n)} &= \frac{d}{dh}\,[h\,(h-1)\,(h-2)\,\ldots\ldots\,(h-n+1)] = \frac{d}{dh}\left\{\frac{1}{x^{h-n}}\,\frac{d^n}{dx^n}\;x^h\right\}.
\end{aligned} \tag{267}$$

Man überzeugt sich sehr leicht von der Richtigkeit dieser Gleichungen, und zwar am besten auf dem in §. 8 Seite 159 der Transformationslehre betretenen Wege, der auch zu ferneren ähnlichen Relationen führt. Fügen wir noch hinzu, dass man nebstdem noch hat:

$$p = \frac{1}{x^{p-1}}\,\frac{d}{dx}\,x^p,\quad p\,(p-1) = \frac{1}{x^{p-2}}\,\frac{d^2}{dx^2}\,x^p,\quad \ldots\ldots\, p\,(p-1)\,\ldots\ldots\,(p-n+2)\,\frac{1}{x^{p-n+1}}\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,x^p,$$

so lässt sich das Polynom, dessen Reduction wir hier beanstreben, auch noch hinstellen, wie folgt:

$$\mathfrak{A}^{(n)} + \binom{n}{1}\mathfrak{A}^{(n-1)}.\,p + \binom{n}{2}\mathfrak{A}^{(n-2)}.\,p\,(p-1) + \ldots\ldots + \binom{n}{p}\mathfrak{A}^{(n-p)}.\,p\,(p-1)\,(p-2)\ldots\;1 = A_p^{(n)} =$$

$$= \frac{d}{dh}\left\{\frac{x^p}{x^{h-n+p}}\,\frac{d^n}{dx^n}\,x^h + \binom{n}{1}\frac{1}{x^{h-n+p}}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,x^h.\,\frac{d}{dx}\,x^p + \binom{n}{2}\frac{1}{x^{h-n+p}}\cdot\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\,x^h.\,\frac{d^2}{dx^2}\,x^p + \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{n}{p}\frac{1}{x^{h-n+p}}\,\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\,x^h.\,\frac{d^p}{dx^p}\,x^p\right\} =$$

$$= \frac{d}{dh}\left[\frac{1}{x^{h-n+p}}\,\frac{d^n}{dx^n}\,x^{h+p}\right] = \frac{d}{dh}\left[(h+p)\,(h+p-1)\,(h+p-2)\,\ldots\ldots\,(h+p-n+1)\right] =$$

$$= (h+p)(h+p-1)(h+p-2)\ldots(h+p-n+1)\left[\frac{1}{h+p} + \frac{1}{h+p-1} + \frac{1}{h+p-2} + \ldots + \frac{1}{h+p-n+1}\right].$$

Diess wäre also die geschmeidigste Gestalt, in welcher allgemein für beliebige h die mit A bezeichneten Coefficienten zu erscheinen vermögen. Hat man jedoch speciell $h = n-1$, wie unser vorliegendes Beispiel verlangt, so geht dafür die Gleichung (266) über in:

$$Y_0^{(n+p-1)} = \frac{1}{p}\,Y_0^{(p)} - Y_1^{(p)}\,(n+p-1)\,(n+p-2)\,\ldots\ldots\,(p+1)\left\{\frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p-2} + \ldots\ldots + \frac{1}{p}\right\}. \tag{268}$$

Lassen wir hier zuvörderst p die Zahlen: $1, 2, 3, \ldots\ldots n-2$ bedeuten, so ergibt sich eine Reihe von Gleichungen, die mit den (258) ganz und gar übereinstimmen, welche zur Aufstellung des Integrales (260) gedient haben. Nachdem es nun überflüssig wäre, eine bereits gemachte Rechnung zu wiederholen; so nehmen wir:

$$Y_0' = Y_0'' = \ldots\ldots\ldots\ldots = Y_0^{(n-2)} = 0$$

an, was der Erklärung gleichkommt, dass man sich auf die Berechnung beschränke eines einzigen particulären Integrales, des mit dem Factor C nämlich, die übrigen in der Formel (260) enthaltenen, in deren Besitze man sich schon befindet, wegwerfend. Wir statuiren also zunächst: $p = n - 1$ und erhalten hiemit:

$$Y_0^{(2n-2)} = \frac{1}{n-1}\left\{Y_0^{(n-1)} - C\left[\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2n-2}\right]\right\}.$$

In derselben Weise liefern jetzt die Substitutionen: $p = 2n - 2$, $p = 3n - 3$, ... $p = rn - r$ die folgenden Formeln:

$$Y_0^{(3n-3)} = \frac{1}{2n-2}\, Y_0^{(2n-2)} - \frac{C}{(n-1)\,(2n-2)}\left[\frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{3n-3}\right]$$

$$Y_0^{(4n-4)} = \frac{1}{3n-3}\, Y_0^{(3n-3)} - \frac{C}{(n-1)\,(2n-2)\,(3n-3)}\left[\frac{1}{3n-3} + \frac{1}{3n-2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{4n-4}\right]$$

....

$$Y_0^{(rn+n-r-1)} = \frac{1}{rn-r}\, Y_0^{(rn-r)} - \frac{C}{(n-1)(2n-2)(3n-3)\ldots(rn-r)}\left[\frac{1}{rn-r} + \frac{1}{rn-r+1} + \ldots + \frac{1}{(r+1)(n-1)}\right]$$

Man multiplizire nun die letzte dieser Gleichungen mit 1, die vorhergehende mit $\frac{1}{rn-r}$, die nächstvorhergehende mit $\frac{1}{(rn-r)\,(rn-n-r+1)}$ u. s. w., die erste derselben endlich mit $\frac{1}{(rn-r)\,(rn-n-r+1)\,\ldots\ldots\,(2n-2)}$ und addire sie sodann, tilge die beiderseits erscheinenden gleichen Glieder; so ergibt sich für den allgemeinen Reihencoefficienten folgende Formel:

$$Y_0^{(rn+n-r-1)} = \frac{Y_0^{(n-1)}}{r!\,(n-1)^n} - \frac{C}{r!\,(n-1)^r}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(r+1)\,(n-1)}\right]$$
$$- \frac{C}{r!\,(n-1)^r}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{r}\right]. \tag{269}$$

Hier kann man zwar dem $Y_0^{(n-1)}$ jeden beliebigen Werth ertheilen. Diess heisst mit anderen Worten: Man kann zu dem gesuchten particulären Integrale ein beliebiges Vielfache des letzten in der Formel (260) enthaltenen hinzufügen; man kann aber auch $Y_0^{(n-1)} = 0$ wählen, und erhält dann den in Rede stehenden Reihencoefficienten in der folgenden Gestalt:

$$Y_0^{(rn+n-r-1)} = -\frac{C}{r!\,(n-1)^r}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(r+1)\,(n-1)}\right] -$$
$$- \frac{C}{r!\,(n-1)^{r+1}}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{r}\right]. \tag{270}$$

und so wären wir denn zu allen Bestandtheilen des vollständigen Integrales unserer Differentialgleichung gelangt. Setzen wir dasselbe aus ihnen zusammen, so ergibt sich, gewonnen durch die vorhergehenden gewiss ziemlich unbedeutenden Rechnungsentwicklungen der folgende allgemeine Werth von y mit n willkürlichen Constanten:

$$y = C\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{x^{2n-2}}{(n-1)\,[(2n-2)!]}\left[\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2n-2}\right] - \\ &- \frac{x^{3n-3}}{1.2\,(n-1)^2\,.\,(3n-3)!}\left[\frac{1}{n-1}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots\cdots + \frac{1}{3n-3}\right] - \\ &- \frac{x^{4n-4}}{1.2.3\,(n-1)^3.(4n-4)!}\left[\frac{1}{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots\cdots + \frac{1}{4n-4}\right] - \\ &- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ x^{n-1}\log x\left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1).(2n-2)!} + \frac{x^{2n-2}}{1.2\,(n-1)^2.(3n-3)!} + \cdots\cdots\right] \end{aligned}\right\} \quad (271)$$

$$+ \; C_1 \; x \left[1 + \frac{x^{n-1}}{1\,.\,n!} + \frac{x^{2n-2}}{1\,.\,n\,.\,(2n-1)!} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \right]$$

$$+ \; C_2 \; x^2 \left[\frac{1}{2!} + \frac{x^{n-1}}{2\,.\,(n+1)!} + \frac{x^{2n-2}}{2\,(n+1)\,.\,(2n)!} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \right]$$

$$+ \; C_3 \; x^3 \left[\frac{1}{3!} + \frac{x^{n-1}}{3\,.\,(n+2)!} + \frac{x^{2n-2}}{3\,(n+2)\,.\,(2n+1)!} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \right]$$

$$- - - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \; C_{n-1} \, x^{n-1} \left[\frac{1}{n-1!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,.\,(2n-2)!} + \frac{x^{2n-2}}{(n-1)(2n-2)\,.\,(3n-3)!} + \cdots\cdots\cdots\cdots \right]$$

Die Reihen, aus welchen er zusammengesetzt erscheint, erfreuen sich einer ausgezeichneten Convergenz und gestatten eine leichte Discussion bei Ermittlung der Werthe von α, für welche sie verschwinden, Maxima werden oder Minima, Wendepunkte u. dgl. Man sieht also, dass die aufsteigende Integration gelegentlich auch sehr brauchbare Resultate liefern kann, und diess zwar namentlich, wie nachgewiesen wurde, in dem Falle, wo sich in der Differentialgleichung Abfälle befinden von weniger als einer Einheit auf das Coefficientenpaar. Diess ist um so mehr zu beherzigen, als gerade bei solchen Abfällen die sämmtlichen anderen Integrationsmethoden, die asymptotische u. s. w. ihren Dienst versagen, indem sie entweder zu Ausdrücken führen, mit denen man weder weiter rechnen, noch eine Untersuchung der analytischen Eigenschaften einleiten kann, oder zu vorgängigen sehr weitläufigen Transformationen nöthigen. Wir haben eben mit dem jetzt erledigten Beispiele diese Erfahrung im ersten Bande II. Abschnitt Seite 57 gemacht, wo wir mit ihr einen Integrationsversuch in Form von bestimmten Integralen einleiteten.

Erkiesen wir, um den Gegenstand in mehreren speciellen Fällen vollständiger zu beleuchten, noch eine Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung als letztes Beispiel, deren Integrale aber mehrere logarithmische Transcendenten enthalten. Es sei die binomische:

$$x^r \,.\, y^{(n)} - y = 0. \quad (272)$$

Man kann sie betrachten als eine solche, deren Anfangscoefficienten beziehlich mit den Factoren x^r, x^{r-1}, ..., x, x^0 versehen sind, die aber alle bis auf den ersten, dem sich ein anderer Factor Eins zulegt, noch die Nulle zum Multiplicator erhalten.

Es deutet ein solches Vorkommen hin auf r particuläre Integrale, mit einem Divisor x^k und es ist der Exponent k nach §. 2 Seite 248 gegeben durch folgende algebraische Gleichung des r^{ten} Grades:

$$(k+n-1)(k+n-2)\,\ldots\ldots\ldots\,(k+n-r)=0. \tag{273}$$

Ihre Wurzeln sind:

$$k=-n+1,\quad -n+2,\quad -n+3,\quad \ldots\ldots\ldots\quad -n+r.$$

Hieraus erschliessen wir nicht bloss Factoren:

$$x^{n-1},\quad x^{n-2},\quad x^{n-3},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad x^{n-r}$$

in r particulären Integralen, denn diese würden sich von selbst verstehen, und brauchten nicht erst durch den Factor x^r des ersten Gleichungscoefficienten vertreten zu sein, sondern auch auf nie fehlende logarithmische Transcendenten $\log x$, $\log^2 x$, $\log^3 x$, ... $\log^r x$.

Um über die Art ihres Vorkommens und die sich daran knüpfende Transformation Aufschluss zu erhalten, thut man am besten, sich die Integralformel vorzustellen als mit unbestimmten Integralzeichen zusammengefügt, nach dem in §. 2 Seite 312 vorliegenden Muster; so nämlich:

$$\eta_1 x^{n-1}\int_0^x \frac{x^{n-2}\eta_2\,dx}{x^n}\int_0^x \frac{x^{n-3}\eta_3\,dx}{x^{n-1}}\,\ldots\ldots\,\int_0^x \frac{x^{n-r}\eta_r\,dx}{x^{n-r+2}}\int_0^x \frac{\eta_{r+1}\,dx}{x^{n-r+1}}\int_0^x \eta_{r+2}\,dx\,\ldots\ldots\ldots\int_0^x \eta_n\,dx. \tag{274}$$

Man entnimmt ihr alsogleich das allgemeine Integral in der folgenden Gestalt:

$$y=\mathfrak{Y}_0+\mathfrak{Y}_1 x^{n-r}\log x+\mathfrak{Y}_2 x^{n-r+1}\log^2 x+\ldots\ldots\ldots+\mathfrak{Y}_r x^{n-1}\log^r x, \tag{275}$$

und es wäre vermittelst dieser Substitution die Umformung der Gleichung zu bewerkstelligen. Man wird es indess immer vorziehen, den beim früheren Beispiele betretenen Weg einzuschlagen, und zuvörderst denjenigen Bestandtheil von y, der von der logarithmischen Transcendente frei ist, und desshalb die ungestörte Reihenentwicklung verträgt, der Berechnung unterwerfen. Diess thun wir hiemit und differenziren zu diesem Zwecke die Differentialgleichung 1, 2, ... allgemein p-mal. Diess gibt, wenn man zugleich nach geschehener Differentiation die Nulle setzt anstatt x, und y in Y verwandelt:

$$Y=Y'=Y''=\ldots\ldots\ldots=Y^{(r-1)}=0$$

$$Y^{(n)}=\frac{Y^{(r)}}{r!},\quad Y^{(n+1)}=\frac{1!\,Y^{(r+1)}}{(r+1)!},\quad Y^{(n+2)}=\frac{2!\,Y^{(r+2)}}{(r+2)!},\ \ldots\ldots\ldots\ Y^{(n+p-r)}=\frac{(p-r)!\,Y^{(p)}}{p!}. \tag{276}$$

Kraft der ersten Reihe dieser Gleichungen verweigert die Mac-Laurin'sche Entwicklung alle jene particulären Integrale, welche x^0, x, x^2, x^3, ... x^{r-1} zum Factor haben; kraft der übrigen erscheinen alle folgenden Coefficienten eben dieser Mac-Laurin'schen Reihe durch $Y^{(r)}$, $Y^{(r+1)}$, ... $Y^{(n-1)}$

In der Integralformel (275) kann man somit den ersten und den letzten Bestandtheil als berechnet ansehen; Ersteren durch die (278), Letzteren hingegen durch die vorliegende Formel (279), in welcher indess gelegentlich auch $C=0$ sein kann, somit auch $\mathfrak{Y}_r=0$. Es ist jetzt nur noch übrig, auch die Berechnung von $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \ldots\ldots \mathfrak{Y}_{r-1}$ einzuleiten. Hiezu aber wird es nothwendig sein, zur wirklichen Substitution des allgemeinen Werthes von y, wie er durch die (275) gegeben ist, zu schreiten.

Der §. 8 der Transformationslehre lehrt nun, wie man das Substitutionsresultat zu rechnen habe, wenn sich in demselben nur Ein logarithmischer Factor, zur Potenz s erhoben, befindet, unter s eine ganze positive Zahl verstanden. Nach den alldortigen Ergebnissen bekömmt man bei einer jeden Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung, anstatt η eine andere abhängige Veränderliche $\mathfrak{z}$ einführend vermittelst der Substitution:

$$y = x^h \log^s x \,.\, \mathfrak{z} \tag{280}$$

eine Transformirte in $\mathfrak{z}$, welche in symbolischer Schreibweise folgendermassen aussieht:

$$\mathrm{S}\left[\binom{s}{\gamma}\frac{(\lambda+\mu)!}{\lambda!\,\mu!}\, x^{h+r-\lambda-\omega} \underset{\lambda+\mu}{\mathfrak{X}} \frac{d^\gamma}{dh^\gamma} \mathfrak{A}_{h,0}^{(\lambda)} \log^\beta x \,.\, \mathfrak{z}^{(\mu)}\right] +$$
$$\lambda+\mu+\omega=n$$
$$\alpha+\omega=r$$
$$\gamma+\beta=s$$

$$+\,\mathrm{S}\left[\binom{s}{\gamma}\frac{(\lambda+\mu)!}{\lambda!\,\mu!}\, x^{h-\lambda}\, \mathfrak{X}_{\lambda+\mu} \frac{d^\gamma}{dh^\gamma} \mathfrak{A}_{h,0}^{(\lambda)} \log^\beta x \,.\, \mathfrak{z}^{(\mu)}\right] = 0$$
$$\lambda+\mu+\omega=n-r-1$$
$$\gamma+\beta=s$$

und es bedeutet hier $\mathfrak{A}_{h,0}^{(\lambda)}$, den folgenden sehr einfachen Werth:

$$\mathfrak{A}_{h,0}^{(\lambda)} = \frac{h!}{\overline{h-\lambda}!} = h\,(h-1)\,(h-2)\,\ldots\ldots\ldots\,(h-\lambda+1). \tag{281}$$

Ferner ist hier zu bemerken, dass die vorliegende Differentialgleichung nur zwei von Null verschiedene Coefficienten habe, nämlich: $\underset{n}{\mathfrak{X}}=1$ und $\mathfrak{X}_0=-1$. Man sieht sohin, dass in der ersten der beiden Summen $\lambda+\mu$ nur den einzigen Werth n zu haben vermag; folglich hat auch ω nur den einzigen Werth Null, und ertheilt man ihnen diese, so ist man berechtigt, die ersten der drei Bedingungsgleichungen als erfüllt auszulassen, und dafür die $\lambda+\mu=n$ anzufügen. Aber auch die zweite fällt ganz weg, weil sie eigentlich nur besagt, dass ω alle möglichen Werthe von o bis r anzunehmen vermöge und weil aus anderen Gründen von ihnen allen nur der erste nämlich Null der passende ist. Es bleibt also nur die dritte der Bedingungsgleichungen übrig, und ebenso verhält es sich mit der zweiten Summe auch. Weil nämlich hier $\lambda+\mu$ nur den einzigen Werth Null annehmen kann, hat ω den einzigen $n-r-1$. Diese gibt man ihnen und lässt dann die erste der Bedingungsgleichungen weg.

Unsere Transformirte in z sieht also gegenwärtig so aus:

$$\mathrm{S}\left[\binom{s}{\gamma}\frac{n!}{\lambda!\mu!}x^{h+r-\lambda}\frac{d^\gamma}{dh^\gamma}\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h,s}\log^\beta x\,.\,z^{(\mu)}\right]-$$
$$\lambda+\mu=n$$
$$\gamma+\beta=s$$
$$-\mathrm{S}\left[\binom{s}{\gamma}x^{h}\frac{d^\gamma}{dh^\gamma}\mathfrak{A}_{h,s}\log^\beta x\,.\,z\right]=0$$
$$\gamma+\beta=s$$

Es fällt aber sehr bald in die Augen, dass die zweite der in dieser Gleichung vorkommenden Summen zusammenschrumpfe in ein einziges Glied, denn da kraft der (281) $\mathfrak{A}^{(0)}_{h,s}=1$ ist, so ist $\frac{d^\gamma}{dh^\gamma}\mathfrak{A}^{(0)}_{h}=0$, wofern nicht auch $\gamma=0$ ist, woraus nun wieder folgt, dass β nur den einzigen Werth s anzunehmen vermag. Nimmt man darauf Rücksicht, so erhält man die Transformirte jetzt in der folgenden Gestalt:

$$\mathrm{S}\left[\binom{s}{\gamma}\frac{n!}{\lambda!\mu!}x^{h+r-\lambda}\frac{d^\gamma}{dh^\gamma}\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{h}\log^\beta x\,.\,z^{(\mu)}\right]-x^h\log^s x\,.\,z=0.$$
$$\lambda+\mu=n$$
$$\gamma+\beta=s$$

Sie ist nur das Resultat einer monomischen Substitution, nämlich der (280), wir haben aber einen mehrgliedrigen Ausdruck einzuführen, den (275) nämlich, in welchem s, h und z Glied für Glied genommen die folgenden Werthe annehmen:

$$\begin{array}{llllll} s= & 0, & 1, & 2, & \dots\dots\dots\dots & r \\ h= & 0, & n-r, & n-r+1, & \dots\dots\dots\dots & n-1 \\ z= & \mathfrak{Y}_0, & \mathfrak{Y}_1, & \mathfrak{Y}_2, & \dots\dots\dots\dots & \mathfrak{Y}_r. \end{array}$$

Das erste System zusammengehöriger Werthe s, h und z passt nicht in die Regel, nach welcher die übrigen gebildet sind. Wir fangen daher damit an, dieses eine zuvörderst einzuführen in die transformirte Gleichung und zeichnen das Resultat auf. Es ist offenbar jenes der einfachen Substitution: $z=\mathfrak{Y}_0$, mithin gleich dem Binome:

$$x^r\,\mathfrak{Y}^{(n)}_0-\mathfrak{Y}_0.$$

Anlangend die übrigen, so besteht, wenn $s=\sigma+1$ wird, $h=n-r+\sigma$ und $z=\mathfrak{Y}_{\sigma+1}$. Wir bewirken daher auch diese zweite Substitution und fügen, weil σ alle möglichen Werthe von 0 angefangen bis $r-1$ annehmen soll, noch die Bedingungsgleichung:

$$\sigma+\tau=r-1$$

hinzu. Diess Alles durchgeführt, ergibt sich die der Substitution (275) entsprechende transformirte Differentialgleichung:

$$0 = x^r\, \mathfrak{Y}_0^{(n)} - \left[\mathfrak{Y}_0 + x^{n-r} \log x\, \mathfrak{Y}_1 + x^{n-r+1} \log^2 x\, \mathfrak{Y}_2 + \dots\dots\dots + x^{n-1} \log^r x\, \mathfrak{Y}_r\right.$$

$$\left. + \mathbf{S}\left[\binom{\sigma+1}{\gamma} \frac{n!}{\lambda!\mu!} x^{\mu+\sigma} \frac{d^\gamma}{dh^\gamma} \mathfrak{A}_h^{(\lambda)} \log^\beta x \,.\, \mathfrak{Y}_{\sigma+1}^{(\mu)}\right]\right.$$

$$\begin{gathered}(h = n - r + \sigma)\\ \lambda + \mu = n\\ \gamma + \beta = \sigma + 1\\ \sigma + \tau = r - 1.\end{gathered}$$

Es ist nothwendig, sie nach den verschiedenen Potenzen der Transcendente $\log x$ zu or[dnen.] Wir ertheilen zu diesem Zwecke den Symbolen β und γ alle Werthe, deren sie fähig sind, en[thal]ten im folgenden Schema:

$$\begin{array}{llllll}\beta = 0, & 1, & 2, & 3, & \dots\dots\dots & r\\ \gamma = \sigma+1, & \sigma, & \sigma-1, & \sigma-2, & \dots\dots\dots & \sigma-r+1,\end{array}$$

und verwandeln so die (284), die Coefficienten der einzelnen Potenzen eben dieser Transcenden[te] für sich der Nulle gleich setzend, in das folgende System von Gleichungen, $r+1$ an der Zahl:

$$0 = x^r\, \mathfrak{Y}_0^{(n)} - \mathfrak{Y}_0 + \mathbf{S}\left[\frac{n!}{\lambda!\mu!} x^{\mu+\sigma} \frac{d^{\sigma+1}}{dh^{\sigma+1}} \mathfrak{A}_h^{(\lambda)}\, \mathfrak{Y}_{\sigma+1}^{(\mu)}\right]$$

$$\begin{gathered}(h = n - r + \sigma)\\ \lambda + \mu = n\\ \sigma + \tau = r - 1\end{gathered}$$

$$0 = x^{n-r}\, \mathfrak{Y}_1 - \mathbf{S}\left[(\sigma+1) \frac{n!}{\lambda!\mu!} x^{\mu+\sigma} \frac{d^{\sigma}}{dh^{\sigma}} \mathfrak{A}_h^{(\lambda)}\, \mathfrak{Y}_{\sigma+1}^{(\mu)}\right]$$

(285)

$$\begin{gathered}(h = n - r + \sigma)\\ \lambda + \mu = n\\ \sigma + \tau = r - 1\end{gathered}$$

$$0 = x^{n-r+1}\, \mathfrak{Y}_2 - \mathbf{S}\left[\binom{\sigma+1}{2} \frac{n!}{\lambda!\mu!} x^{\mu+\sigma} \frac{d^{\sigma-1}}{dh^{\sigma-1}} \mathfrak{A}_h^{(\lambda)}\, \mathfrak{Y}_{\sigma+1}^{(\mu)}\right]$$

$$\begin{gathered}(h = n - r + \sigma)\\ \lambda + \mu = n\\ \sigma + \tau = r - 1\end{gathered}$$

....

$$0 = x^{n-1}\, \mathfrak{Y}_r - \mathbf{S}\left[\binom{\sigma+1}{r} \frac{n!}{\lambda!\mu!} x^{\mu+\sigma} \frac{d^{\sigma-r+1}}{dh^{\sigma-r+1}} \mathfrak{A}_h^{(\lambda)}\, \mathfrak{Y}_{\sigma+1}^{(\mu)}\right]$$

$$\begin{gathered}(h = n - r + \sigma)\\ \lambda + \mu = n\\ \sigma + \tau = r - 1\end{gathered}$$

Wir differenziren nun behufs der Reihenentwicklungen des Integrales eine jede dieser Gleichungen p-mal, unter p eine annoch nach Belieben zu wählende ganze positive Zahl verstanden, setzen in dem so gewonnenen Differentialquotienten $x=0$ und verwandeln nun, dem getroffenen Übereinkommen gemäss, jedes $\mathfrak{Y}$ in Y, bemerkend, dass sich hiebei jeder p^{te} Differentialquotient eines Produktes wie $x^q\mathfrak{Y}^{(m)}$ reduzire auf ein einzelnes Glied; dass man nämlich für $x=0$ habe:

$$\frac{d^p}{dx^p}\,x^q\,\mathfrak{Y}^{(m)}=\frac{p!}{(p-q)!}\,\mathrm{Y}^{(m+p-q)}. \tag{286}$$

Hiemit ergibt sich zunächst das folgende System von Gleichungen:

$$0=\frac{p!}{(p-r)!}\,\mathrm{Y}_0^{(n+p-r)}-\mathrm{Y}_0^{(p)}+\mathbf{S}\left[\frac{n!\,p!}{\lambda!\,\mu!\,(p-\mu-\sigma)!}\,\frac{d^{\sigma+1}}{dh^{\sigma+1}}\,\mathfrak{A}_h^{(\lambda)}\,.\,\mathrm{Y}_{\sigma+1}^{(p-\sigma)}\right]$$

$$\begin{gathered}(h=n-r+\sigma)\\ \lambda+\mu=n\\ \sigma+\tau=r-1\end{gathered}$$

$$0=\frac{p!}{(p-n+r)!}\,\mathrm{Y}_1^{(p-n+r)}-\mathbf{S}\left[(\sigma+1)\,\frac{n!\,p!}{\lambda!\,\mu!\,(p-\mu-\sigma)!}\,\frac{d^{\sigma}}{dh^{\sigma}}\,\mathfrak{A}_h^{(\lambda)}\,\mathrm{Y}_{\sigma+1}^{(p-\sigma)}\right]$$

$$\begin{gathered}(h=n-r+\sigma)\\ \lambda+\mu=n\\ \sigma+\tau=r-1\end{gathered} \tag{287}$$

$$0=\frac{p!}{(p-n+r-1)!}\,\mathrm{Y}_2^{(p-n+r-1)}-\mathbf{S}\left[\binom{\sigma+1}{2}\,\frac{n!\,p!}{\lambda!\,\mu!\,(p-\mu-\sigma)!}\,\frac{d^{\sigma-1}}{dh^{\sigma-1}}\,\mathfrak{A}_h^{(\lambda)}\,\mathrm{Y}_{\sigma+1}^{(p-\sigma)}\right]$$

$$\begin{gathered}(h=n-r+\sigma)\\ \lambda+\mu=n\\ \sigma+\tau=r-1\end{gathered}$$

. . . .

$$0=\frac{p!}{(p-n+1)!}\,\mathrm{Y}_r^{(p-n+1)}-\mathbf{S}\left[\binom{\sigma+1}{r}\,\frac{n!\,p!}{\lambda!\,\mu!\,(p-\mu-\sigma)!}\,\frac{d^{\sigma-r+1}}{dh^{\sigma-r+1}}\,\mathfrak{A}_h^{(\lambda)}\,\mathrm{Y}_{\sigma+1}^{(p-\sigma)}\right]$$

$$\begin{gathered}(h=n-r+\sigma)\\ \lambda+\mu=n\\ \sigma+\tau=r-1\end{gathered}$$

In all' den hier vorkommenden Summen bewirken wir eine Vereinfachung durch die wirklich ins Werk gesetzte Summirung nach λ und μ, denken uns hiebei σ als unverändert, während dem λ und μ die im folgenden Schema erscheinenden Systeme von Werthen zugetheilt werden. Man hat so:

$$\mathbf{S}\left[\frac{n!\,p!}{\lambda!\,\mu!\,(p-\mu-\sigma)!}\,\mathfrak{A}_h^{(\lambda)}\right]=$$
$$\lambda+\mu=n$$
$$=\frac{n!\,p!}{n!\,(p-n-\sigma)!}\,\mathfrak{A}_h+\frac{n!\,p!}{1!\,(n-1)!\,(p-n+1-\sigma)!}\,\mathfrak{A}'_h+\frac{n!\,p!}{2!\,(n-2)!\,(p-n+2-\sigma)!}\,\mathfrak{A}''_h+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{n!\,p!}{n!\,(p-\sigma)!}\,\mathfrak{A}_h^{(n)}.$$

Die Werthe der mit $\mathfrak{A}$ bezeichneten Coefficienten sind gegeben durch die Formel (281) Substituirt man sie und sondert aus allen Gliedern den Factor $\frac{p!}{(p-\sigma)!}$, so ergibt sich:

$$\mathbf{S}\left[\frac{n!\,p!}{\lambda!\,\mu!\,(p-\mu-\sigma)!}\,\mathfrak{A}_h^{(\lambda)}\right]=$$
$$\lambda+\mu=n$$
$$(288)\quad=\frac{p!}{(p-\sigma)!}\left[\frac{h!}{(h-n)!}+\binom{n}{1}(p-\sigma)\frac{h!}{(h-n+1)!}+\binom{n}{2}(p-\sigma)(p-\sigma-1)\frac{h!}{(h-n+2)!}+\right.$$
$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots+(p-\sigma)(p-\sigma-1)\ldots\ldots(p-n-\sigma+1)\right]=$$
$$=\frac{1}{x^{h+p-\sigma-n}}\,\frac{p!}{(p-\sigma)!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[x^h.x^{p-\sigma}\right]=\frac{p!}{(p-\sigma)!}(h+p-\sigma)(h+p-\sigma-1)\ldots\ldots(h+p-\sigma-n+1)$$
$$=\frac{p!\,(h+p-\sigma)!}{(p-\sigma)!\,(h+p-n-\sigma)!}.$$

Diesen Ausdruck der in ein einziges Glied zusammengezogenen Summe denken wir uns nun nach h differenzirt beziehlich $\sigma+1,\ \sigma,\ \sigma-1,\ \ldots\ldots\ \sigma-r+1$ Mal, und multiplizirt beziehlich mit:

$$\mathrm{Y}_{\sigma+1}^{(p-\sigma)},\qquad\binom{\sigma+1}{1}\mathrm{Y}_{\sigma+1}^{(p-\sigma)},\qquad\binom{\sigma+1}{2}\mathrm{Y}_{\sigma+1}^{(p-\sigma)},\qquad\ldots\ldots\ldots\qquad\binom{\sigma+1}{r}\mathrm{Y}_{\sigma+1}^{(p-\sigma)},$$

sodann abermals summirt nach σ, wobei jedoch zu merken, dass alle Differentialquotienten nach h mi negativem Index durch die Nulle zu ersetzen seien, wie aus dem Inhalte von §. 8 sehr leicht erschlossen werden kann und dass endlich erst nach geschehener Differentiation h in $n-r+\sigma$ zu verwandeln komme, worauf die Summe auf alle jene Werthe von σ auszudehnen ist, welche die Bedingungsgleichung:

$$\sigma+\tau=r-1$$

erfüllen. Das so gewonnene System von Gleichungen, welches jetzt an die Stelle der (287) tritt, ist folgendes:

$$(289)\quad 0=\frac{p!}{(p-r)!}\,\mathrm{Y}_0^{(n+p-r)}-\mathrm{Y}_0^{(p)}+\mathbf{S}\left[\frac{p!}{(p-\sigma)!}\,\frac{d^{\sigma+1}}{dh^{\sigma+1}}\left[\frac{(h+p-\sigma)!}{(h+p-n-\sigma)!}\right]\mathrm{Y}_{\sigma+1}^{(p-\sigma)}\right]$$
$$(h=n-r+\sigma)$$
$$\sigma+\tau=r-1$$

$$0 = \frac{p!}{(p-n+r)!}\,Y_1^{(p-n+r)} - \mathrm{S}\left[\frac{(\sigma+1).p!}{(p-\sigma)!}\,\frac{d^\sigma}{dh^\sigma}\left[\frac{(h+p-\sigma)!}{(h+p-n-\sigma)!}\right]Y_{\sigma+1}^{(p-\sigma)}\right] \tag{289}$$

$$(h = n - r + \sigma)$$

$$\sigma + \tau = r - 1$$

. . . .

$$0 = \frac{p!}{(p-n+2)!}\,Y_{r-1}^{(p-n+2)} - \mathrm{S}\left[\binom{\sigma+1}{r-1}\frac{p!}{(p-\sigma)!}\,\frac{d^{\sigma-r+2}}{dh^{\sigma-r+2}}\left[\frac{(h+p-\sigma)!}{(h+p-n-\sigma)!}\right]Y_{\sigma+1}^{(p-\sigma)}\right]$$

$$(h = n - r + \sigma)$$

$$\sigma + \tau = r - 1$$

$$0 = \frac{p!}{(p-n+1)!}\,Y_r^{(p-n+1)} - \mathrm{S}\left[\binom{\sigma+1}{r}\frac{p!}{(p-\sigma)!}\,\frac{d^{\sigma-r+1}}{dh^{\sigma-r+1}}\left[\frac{(h+p-\sigma)!}{(h+p-n-\sigma)!}\right]Y_{\sigma+1}^{(p-\sigma)}\right]$$

$$(h = n - r + \sigma)$$

$$\sigma + \tau = r - 1$$

Man kann unmittelbar davon Gebrauch machen, um die Werthe der Coefficienten zu berechnen für die aufsteigenden Entwicklungen der Functionen $\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots\ldots \mathfrak{y}_r$, nämlich:

$$\mathfrak{y}_0 = Y_0 + Y'_0\,x + Y''_0\,\frac{x^2}{1.2} + Y'''_0\,\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{y}_1 = Y_1 + Y'_1\,x + Y''_1\,\frac{x^2}{1.2} + Y'''_1\,\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots \tag{290}$$

$$\mathfrak{y}_2 = Y_2 + Y'_2\,x + Y''_2\,\frac{x^2}{1.2} + Y'''_2\,\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots$$

. . . .

$$\mathfrak{y}_r = Y_r + Y'_r\,x + Y''_r\,\frac{x^2}{1.2} + Y'''_r\,\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots$$

Man ertheilt zu diesem Behufe dem Differentiationsindex p zuvörderst die kleinsten Werthe, deren derselbe in den auf einander folgenden Gleichungen fähig ist. Sie sind beziehlich:

$$p = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad r-1.$$

Für kleinere als diese gehen die (289) in identische über und dienen nicht mehr zur Coefficientenbestimmung. Für diese aber hat man:

$$Y_1 = (-1)^{r-1}\frac{Y_0}{(n-r)!\,(r-1)!}, \qquad Y_2 = 0, \qquad Y_3 = 0, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad Y_r = 0. \tag{291}$$

Diess gilt jedoch nicht für den Werth $r = n - 1$, weil für diesen die Coefficienten andere werden, wiewohl die Form des Integrales dieselbe bleibt, und auch nicht für $r > n - 1$, weil da die Form des Integrales in eine andere übergeht. Für kleinere r jedoch und namentlich dann, wenn $2r$ gleich oder kleiner als n ist, sind diese Coefficienten richtig.

Ertheilen wir jetzt demselben Differentiationsindex p in den aufeinanderfolgenden Gleichungen (289) die nächst grösseren Werthe, d. h. beziehlich:

$$p = 1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots\dots\dots\dots \quad r,$$

so gelangen wir zu einem Systeme von Gleichungen, welche die nachfolgenden Coefficienten bestimmen:

$$(292)\quad Y'_1 = (-1)^{r-2} \frac{Y'_0}{(n-r+1)!\,(r-2)!}, \quad Y'_2 = 0, \quad Y'_3 = 0, \quad \dots\dots\dots\dots \quad Y'_r = 0,$$

Zu einer dritten Verticalreihe von Reihencoefficienten gelangt man, wenn dem p in den Gleichungen (289) die Werthe ertheilt werden:

$$p = 2, \quad 3, \quad 4, \quad \dots\dots\dots\dots \quad r+1.$$

Sie sind:

$$(293)\quad Y''_1 = (-1)^{r-3} \frac{Y''_0}{(r-3)!\,(n-r+2)!}, \quad Y''_2 = 0, \quad Y''_3 = 0, \quad \dots\dots\dots\dots \quad Y''_r = 0.$$

Diesen ungestörten Fortgang nimmt nun die Rechnung bis zu folgenden Werthen des Differentiationsindex p:

$$p = r-1, \quad r, \quad r+1, \quad \dots\dots\dots\dots \quad 2r-2,$$

dem man die folgenden Coefficientenwerthe entringt:

$$(294)\quad Y_1^{(r-1)} = -\frac{Y_0^{(r-1)}}{1!\,(n-1)!}, \quad Y_2^{(r-1)} = 0, \quad Y_3^{(r-1)} = 0, \quad \dots\dots\dots\dots \quad Y_r^{(r-1)} = 0.$$

Von da an treten auch die bereits unter (277) berechneten Coefficienten in der Rechnung auf, die dem particulären Integrale angehörig sind, $n-r$ an der Zahl, welche die directe Reihenentwicklung vertragen, weil sie keinen Logarithmus besitzen. Sie sind, wie gesagt, schon unter (277) vorhanden, nur hat man dort jegliches Y mit dem Stellenzeiger Null zu versehen.

Es zeigt die bisher durchgeführte Rechnung, dass für $2r$ gleich oder kleiner als n, das allgemeine Integral nur mit einem einzigen Logarithmus, nämlich mit $\log x$ versehen ist. Man ist daher berechtigt, von der Voraussetzung:

$$(295)\quad \mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_2 = \dots\dots\dots\dots = \mathfrak{Y}_r = 0$$

auszugehen, was zur Vereinfachung der Fundamentalformeln (289) sehr viel beiträgt, indem sie sich nicht nur auf die beiden ersten reduziren, sondern diese beiden Summen auch noch in ein einziges Glied zusammengehen, weil σ keinen anderen Werth, als Null anzunehmen vermag. Die solchergestalt vereinfachten zwei aber sind:

$$(296)\quad \begin{aligned} 0 &= \frac{p!}{(p-r)!} Y_0^{(n+p-r)} - Y_0^{(p)} + (n-r+p) \dots\dots (p-r+1) \left[\frac{1}{n-r+p} + \dots\dots + \frac{1}{p-r+1}\right] Y_1^{(p)} \\ 0 &= \frac{p!}{(p-n+r)!} Y_1^{(p-n+r)} - (n-r+p) \dots\dots\dots\dots (p-r+1)\, Y_1^{(p)}. \end{aligned}$$

Die aufmerksamere Betrachtung derselben lehrt, dass man für:

$$p = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad r-1,$$

wirklich zu den Coefficientenwerthen (291), (292), (293) und (294) gelange, und zwar aus der ersten der beiden vorliegenden Gleichungen. Die zweite wird, allen diesen Werthen entsprechend, identisch, so lange $2r$ gleich oder kleiner als n ist. Im entgegengesetzten Falle liefert sie aber für irgend aus dieser Reihe genommene p:

$$Y_1 = Y'_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

wodurch dann auch:

$$Y_0 = Y'_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

werden, was den ganzen Integralbestandtheil, mit dessen Berechnung man eben beschäftigt ist, wieder zerstört.

Geben wir nun stets unter der Voraussetzung:

$$2r \overline{\overline{<}}\, n \tag{297}$$

dem Differentiationsindex p auch noch die ferneren, der Reihe:

$$p = r, \quad r+1, \quad r+2, \quad \ldots\ldots \quad n-r, \quad n-r+1, \quad \ldots\ldots$$

entnommenen Werthe, so gelangen wir zu zwei Systemen von Gleichungen, beziehlich aus der ersten und zweiten der (296) gezogen. Sie liefern die folgenden Gruppen von Coefficientenwerthen:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = \frac{(-1)^{r-1}\,Y_0}{(n-r)!\,(r-1)!}, \quad Y'_1 = \frac{(-1)^{r-2}\,Y'_0}{(n-r+1)!\,(r-2)!}, \quad \ldots\ldots \quad Y_1^{(r-1)} = -\frac{Y_0^{(r-1)}}{1!\,(n-1)!},\\
&\qquad Y_1^{(r)} = 0, \qquad Y_1^{(r+1)} = 0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad Y_1^{(n-r-1)} = 0\\
&Y_1^{(n-r)} = \frac{(-1)^{r-1}\,(n-2r)!}{(r-1)!\,(2n-2r)!}\,Y_0, \qquad Y_1^{(n-r+1)} = \frac{(-1)^{r-2}\,(n-2r+1)!}{(r-2)!\,1!\,(2n-2r+1)!}\,Y'_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad Y_1^{(n-1)} = -\frac{(n-r-1)!}{1!\,(r-1)!\,(2n-r-1)!}\,Y_0^{(r-1)}.\\
&\qquad Y_1^{(n)} = 0, \qquad Y_1^{(n+1)} = 0, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad Y_1^{(2n-2r-1)} = 0
\end{aligned} \tag{298}$$

- - - ....

- - - ....

$$Y_0^{(n)} = \frac{1}{r!}\,Y_0^{(r)}, \quad Y_0^{(n+1)} = \frac{1!}{(r+1)!}\,Y_0^{(r+1)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad Y_0^{(2n-2r-1)} = \frac{(n-2r-1)!}{(n-r-1)!}\,Y_0^{(n-r-1)}$$

$$Y_0^{(2n-2r)} = \frac{(n-2r)!}{(n-r)!}\left[Y_0^{(n-r)} - \frac{(-1)^{r-1}\,(n-2r+1)!\,(n-2r)!}{(2n-2r)!\,(n-r)!\,(r-1)!}\,Y_0\right]$$

$$Y_0^{(2n-2r+1)} = \frac{(n-2r+1)!}{(n-r+1)!}\left[Y_0^{(n-r+1)} - \frac{(-1)^{r-2}(n-2r+1)!(n-2r+2)!}{(r-2)!\,1!\,(2n-2r+1)!}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2r+2}\right]Y'_0\right]$$

$$Y_0^{(2n-3r+2)} = \frac{(n-2r+2)!}{(n-r+2)!}\left[Y_0^{(n-r+2)} - \frac{(-1)^{r-3}(n-2r+2)!(n-2r+3)!}{(r-3)!\,2!\,(2n-2r+2)!\,1!}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right.\right.$$

. . . .

$$Y_0^{(2n-r-1)} = \frac{(n-r-1)!}{(n-1)!}\left[Y_0^{(n-1)} + \frac{1}{1!(r-1)!}\left[\frac{1}{n-r} + \frac{1}{n-r+1} + \dots + \frac{1}{2n-r-1}\right.\right.$$

$$9)\quad Y_0^{(2n-r)} = \frac{(n-r)!}{n!\,r!}Y_0^{(r)},\quad Y_0^{(2n-r+1)} = \frac{(n-r+1)!\,1!}{(n+1)!(r+1)!}Y_0^{(r+1)}, \dots Y_0^{(3n-2r-1)} = \frac{(2n-3r-1)!(n-2r-}{(2n-2r-1)!(n-r-1}$$

$$Y_0^{(3n-3r)} = \frac{(2n-3r)!}{(2n-2r)!}\,\frac{(n-2r)!}{(n-r)!}\left[Y_0^{(n-r)} - \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left[\frac{(n-2r+1)!}{(2n-2r)!} + \frac{1}{2n-3r} + \dots + \frac{}{3n}\right.\right.$$

$$Y_0^{(3n-3r+1)} = \frac{(2n-3r+1)!}{(2n-2r+1)!}\,\frac{(n-2r+1)!}{(n-r+1)!}\left[Y_0^{(n-r+1)} - \frac{(-1)^{r-2}}{(r-2)!\,1!}\left\{\frac{(n-2r+1)!\,(n-2}{(2n-2r+1)}\right.\right.$$

$$\times\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-2r+2}\right] + \frac{1}{2n-3r+2} + \frac{1}{2n-3r+3} + \dots + \frac{1}{3n-}$$

. . . .

Aus ihnen lässt sich jetzt das allgemeine Integral mit den n willkürlichen ($Y_0, Y'_0, Y''_0, \dots Y_0^{(n-1)}$ und geordnet nach denselben zusammenstellen mit der einzi cendente $\log x$, welche sich in den r ersten particulären Integralen befindet, je mit and tionen von x in Reihenform multiplizirt, in den übrigen dagegen fehlt:

$$(300)\quad y = Y_0\left\{\begin{array}{l} 1 - (-1)^{r-1}\dfrac{(n-2r)!\,(n-2r+1)!\,(n-2r)!}{(r-1)!\,(n-r)!\,(2n-2r)!\,(n-r)!\,(2n-2r)!}x^{2n-2r} \\ -\dfrac{(-1)^{r-1}(2n-3r)!(n-2r)!}{(r-1)!(2n-2r)!(n-r)!}\left[\dfrac{(n-2r+1)!}{(2n-2r)!} + \dfrac{1}{2n-3r} + \dots + \dfrac{1}{3n-}\right. \\ - \dots\dots\dots\dots \\ + \dfrac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\log x\left[\dfrac{1}{(n-r)?} + \dfrac{(n-2r)!}{(2n-2r)!}\,\dfrac{x^{n-r}}{(n-r)!} + \dots\dots\right. \end{array}\right.$$

$$+ Y'_0 x\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{1!} - \dfrac{(-1)^{r-2}[(n-2r+1)!]^2(n-2r+2)!}{(r-2)!\,1!\,(n-r+1)!(2n-2r+1)!}\left[\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dots+\dfrac{1}{n-2r+2}\right. \\ -\dfrac{(-1)^{r-2}(2n-3r+1)!(n-2r+1)!}{(r-2)!1!(2n-2r+1)!(n-r+1)!}\left[\dfrac{(n-2r+1)!(n-2r+2)!}{(2n-2r+1)!}\left(\dfrac{1}{1}+\right.\right. \\ + \dfrac{1}{2n-3r+2} + \dfrac{1}{2n-3r+3} + \dots + \dfrac{}{3n} \\ - \dots\dots\dots\dots \\ + \dfrac{(-1)^{r-2}}{(r-2)!}\log x\left[\dfrac{1}{(n-r+1)!\,1!} + \dfrac{(n-2r+1)!\,x^{n-r}}{(2n-2r+1)!\,(n-r}\right. \end{array}\right.$$

$$+\mathrm{Y}''_0 x^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2!} - \frac{(-1)^{r-3}[(n-2r+2)!]^2 (n-2r+3)!}{(r-3)!\,2!\,(n-r+2)!\,(2n-2r+2)!\,1!}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2r+3}\right]\frac{x^{2n-2r}}{(2n-2r+2)!} - \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{(-1)^{r-3}}{(r-3)!}\log x \left[\frac{1}{(n-r+2)!\,2!} + \frac{(n-2r+2)!}{2!\,(2n-2r+2)!}\,\frac{x^{n-r}}{(n-r+2)!} + \ldots\ldots \right] \end{array} \right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\mathrm{Y}_0^{(r-1)} x^{r-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(r-1)!} + \frac{1}{1!(r-1)!}\left[\frac{1}{n-r}+\frac{1}{n-r+1}+\cdots+\frac{1}{2n-r-1}\right]\frac{(n-r-1)!}{(n-1)!}\,\frac{x^{2n-2r}}{(2n-r-1)!} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - \frac{1}{1!}\log x \left[\frac{1}{(n-1)!\,(r-1)!} + \frac{(n-r-1)!}{(r-1)!\,(2n-r-1)!}\,\frac{x^{n-r}}{(n-1)!} + \ldots\ldots\ldots \right] \end{array} \right.$$

$$+\mathrm{Y}_0^{(r)} x^r \left[\frac{1}{r!} + \frac{1}{r!}\,\frac{x^{n-r}}{n!} + \frac{(n-r)!}{n!\,r!}\,\frac{x^{2n-2r}}{(2n-r)!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right]$$

$$+\mathrm{Y}_0^{(r+1)} x^{r+1} \left[\frac{1}{(r+1)!} + \frac{1!}{(r+1)!}\,\frac{x^{n-r}}{(n+1)!} + \frac{(n-r+1)!\,1!}{(n+1)!\,(r+1)!}\,\frac{x^{2n-2r}}{(2n-r+1)!} + \ldots\ldots\ldots \right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\mathrm{Y}_0^{(n-1)} x^{n-1} \left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{(n-r-1)!\,x^{n-r}}{(n-1)!(2n-r-1)!} + \frac{(2n-2r-1)!\,(n-r-1)!\,x^{2n-2r}}{(n-1)!(2n-r-1)!(3n-2r-1)!} + \ldots\ldots \right]$$

Die Giltigkeit dieser Integralformel ist aber, wie gesagt, beschränkt auf solche Werthe des Parameters r, die gleich oder kleiner als $\frac{n}{2}$ sind, denn nur für diese kommt die Transcendente $\log x$ lediglich vor in der ersten Potenz. Wäre dagegen $r > \frac{n}{2}$, so würden in der Integralformel von den verschiedenen Potenzen des $\log x$, die in der (275) erscheinen, einige, und in dem speciellen Falle $r = n - 1$ sogar alle gewonnen werden, so dass selbst bei dieser sehr einfachen Differentialgleichung, in welcher nur ein einziger Parameter r erscheint, die Integration den Charakter annehmen muss einer Discussion der verschiedenen Formen, welche das Integral anzunehmen vermag selbst dann, wenn man nur die aufsteigende Entwicklung im Auge behält und auf die anderen, ebenso wichtigen Formen, wie die asymptotische, noch gar keine Rücksicht nimmt. Die Rechnung selbst bietet gar keine Schwierigkeiten. Sie geht immer von den Gleichungen (280) aus, nur mit dem Unterschiede, dass von ihnen nicht bloss die zwei ersten, sondern mehrere und für den speciellen Werth $r = n - 1$, alle in Anwendung gesetzt werden müssen.

Es ist wohl nicht nöthig, das Beispiel zu erschöpfen, aber die Integralformel für $r = n - 1$ dürfte noch einige Aufmerksamkeit verdienen. Wir wenden uns also an die Gleichungen (289), die für $r = n - 1$ folgendermassen aussehen:

$$0 = \frac{p!}{(p-n+1)!} Y_0^{(p+1)} - Y_0^{(p)} + \mathbf{S}\left[\frac{p!}{(p-\sigma)!} \frac{d^{\sigma+1}}{dh^{\sigma+1}} \left[\frac{(h+p-\sigma)!}{(h+p-n-\sigma)!}\right] Y_{\sigma+1}^{(p-\sigma)}\right]$$
$$(h = \sigma + 1)$$
$$\sigma + \tau = n - 2$$

$$0 = \frac{p!}{(p-1)!} Y_1^{(p-1)} - \mathbf{S}\left[(\sigma+1) \frac{p!}{(p-\sigma)!} \frac{d^{\sigma}}{dh^{\sigma}} \left[\frac{(h+p-\sigma)!}{(h+p-n-\sigma)!}\right] Y_{\sigma+1}^{(p-\sigma)}\right]$$
$$(h = \sigma + 1)$$

(301)
$$\sigma + \tau = n - 2$$

. . . .

$$0 = \frac{p!}{(p-n+2)!} Y_{n-2}^{(p-n+2)} - \mathbf{S}\left[\binom{\sigma+1}{n-2} \frac{p!}{(p-\sigma)!} \frac{d^{\sigma-n+2}}{dh^{\sigma-n+2}} \left[\frac{(h+p-\sigma)!}{(h+p-n-\sigma)!}\right] Y_{\sigma+1}^{(p-\sigma)}\right]$$
$$(h = \sigma + 1)$$
$$\sigma + \tau = n - 2$$

$$0 = \frac{p!}{(p-n+1)!} Y_{n-1}^{(p-n+1)} - \mathbf{S}\left[\binom{\sigma+1}{n-1} \frac{p!}{(p-\sigma)!} \frac{d^{\sigma-n+1}}{dh^{\sigma-n+1}} \left[\frac{(h+p-\sigma)!}{(h+p-n-\sigma)!}\right] Y_{\sigma+1}^{(p-\sigma)}\right].$$
$$(h = \sigma + 1)$$
$$\sigma + \tau = n - 2$$

Die letzte von ihnen gibt lediglich die Entwicklung von $\mathfrak{Y}_{n-1}$ und zwar mit Hilfe der fo genden, anstatt p gemachten Substitutionen:

$$p = n - 1, \quad n, \quad n + 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

kleinere Zahlen, anstatt dieses Differentiationsindex gesetzt, machen diese Gleichung identisch. Diese entsprechen aber die folgenden Coefficientenwerthe:

(302) $$Y'_{n-1} = \frac{1!}{n!} Y_{n-1}, \quad Y''_{n-1} = \frac{1!\,2!}{n!\,(n+1)!} Y_{n-1}, \quad Y'''_{n-1} = \frac{1!\,2!\,3!}{n!\,(n+1)!\,(n+2)!} Y_{n-1}, \quad \ldots\ldots\ldots$$

Hiemit wäre nun das folgende $\mathfrak{Y}_{n-1}$ gegeben, welches zu gleicher Zeit den Factor $\log^{n-1} x$ und einen Bestandtheil von $\mathfrak{Y}_0$ darstellt, welcher für sich ein particuläres Integral gibt:

(303) $$\mathfrak{Y}_{n-1} = Y_{n-1}\left[1 + \frac{1!}{n!} x + \frac{1!}{n!\,(n+1)!} x^2 + \frac{1!\,2!}{n!\,(n+1)!\,(n+2)!} x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right.$$

Zur Ermittlung der übrigen Bestandtheile des Integrales, nehmen wir diese Gleichungen, mit Ausnahme der letzten bereits verwendeten, vor, und setzen in ihnen beziehungsweise:

$$p = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad n - 2;$$

so ergibt sich:

$$Y_1 = (-1)^{n-2} \frac{Y_0}{1!(n-2)!}, \qquad Y_2 = -\frac{Y_0}{2.1!\,2!\,(n-2)!\,(n-3)!},$$

$$Y_3 = (-1)^{n-3} \frac{Y_0}{2.3.1!\,2!\,3!\,(n-2)!\,(n-3)!\,(n-4)!}, \tag{304}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_{n-1} = \frac{(-1)^{\frac{(n-1)(3n+2)}{2}}\, Y_0}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)\;1!\,2!\,3!\ldots\ldots(n-1)!\,(n-2)!\,(n-3)!\ldots\ldots 0!},$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir, anstatt p beziehlich die Werthe setzend:

$$p = 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad n-1$$

und die darnach gebildeten Gleichungen auflösend:

$$Y'_1 = \frac{(-1)^{n-3}}{1.2!(n-3)!} Y'_0 - 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{1}{n-3}\right] Y_2$$

$$Y'_2 = \frac{(-1)^{n-4}}{2.3!(n-4)!} Y'_1 - 3\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{1}{n-4}\right] Y_3$$

$$Y'_3 = \frac{(-1)^{n-5}}{3.4!(n-5)!} Y'_2 - 4\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \ldots\ldots\ldots - \frac{1}{n-5}\right] Y_4 \tag{305}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y'_{n-2} = \frac{1}{(n-2)[(n-1)!]\,1!} Y'_{n-3} - (n-1)\left[\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right] Y_{n-1}$$

$$Y''_{n-2} = \frac{2!}{n!} Y'_{n-2} - 2!\,(n-1)\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{1}\right] Y'_{n-1}$$

Es ist leicht ersichtlich, dass man die Rechnung auf diese Weise durch successives Entwickeln der Bestimmungsgleichungen für die mit Y bezeichneten Coefficienten nach Belieben fortzusetzen vermöge. Die nächste Gruppe derselben ergibt sich für die folgenden beziehlichen Werthe des Differentiationsindex p:

$$p = 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad n.$$

Schreitet man sodann zur Auflösung dieser Gleichungen, so findet sich, dass die (304), die beziehlich zu den logarithmischen Transcendenten $\log x$, $\log^2 x$, $\log^3 x$, ... $\log^{n-1} x$ gehörigen, d. h. mit ihnen multiplizirten Coefficienten Y_1, Y_2, Y_3, ... Y_{n-1} sämmtlich dem Y_0 proportional liefern, welcher letztere gehörig ist zu dem von der logarithmischen Transcendenten freien Bestandtheile des Integrales. Hieraus geht hervor, dass das erste der particulären Integrale, aus denen das erste zusammengesetzt ist, das dem x^0 proportionale, zu welchem eben Y_0 als erste willkürliche Constante gehört, alle Potenzen von $\log x$ bis zur $n-1^{sten}$ einschliesslich in sich enthalte.

Geht man jetzt über zu den Bestimmungsgleichungen (305), so sieht man alsobald, dass sie geeignet seien, Y', Y'_1, Y'_2, ... Y'_{n-2} auszudrücken durch Y_0 und Y'_0. Man wird daher Y'_0

als eine zweite, demjenigen particulären Integrale angehörige, in die Rechnung eingeführte Constante auffassen können, welches dem x proportional ist und nur mehr die aufeinanderfolgenden Potenzen des $log\,x$ einschliesslich bis zur $n-2^{ten}$ enthalten kann. Ebenso wird nun das dritte particuläre Integral, zu welchem die dritte willkürliche Constante Y''_0 gehörig ist, und welches x^2 zum Factor hat, nur mehr die $n-3^{te}$ und die niederen Potenzen von $log\,x$ besitzen u. s. w.

In jedem vorkommenden speciellen Falle, d. h. für jeden bestimmten der Ordnungszahl n ertheilten Zahlenwerth lassen sich diese Rechnungen durchführen ohne alle Schwierigkeit und so, dass auch das Gesetz, nach welchem die Reihencoefficienten aus einander gebildet werden, mithin der Grad ihrer Convergenz offen zu Tage liegen. Es würde jedoch hier kaum nutzbringend sein, den Calcul, dessen Gang hier nur obenhin angedeutet wird, für beliebige n allgemein durchzuführen und das sehr complizirte Rechnungsresultat aufzuzeichnen. Es frommt jedoch, wiederholt aufmerksam zu machen auf den Umstand, dass selbst in den einfachsten Fällen, wo nur eine sehr geringe Anzahl constanter Parameter vorkommt in der Differentialgleichung, das Integriren den Charakter annehmen muss, einer Discussion der verschiedenen Formen, die das allgemeine Integral den verschiedenen Werthen dieser Parameter entsprechend annehmen kann.

Es ist vielfältig dargethan worden, dass eine jede höhere Differentialgleichung erfüllt werden könne durch unzählige Gruppen Genüge leistender Werthe, welche aus einer von ihnen erhalten werden durch Multiplication der für sich Genüge leistenden Bestandtheile mit bestimmten Constanten und Addition; dass es gar sehr darauf ankomme, von diesen unendlich vielen verschiedenen Combinationen diejenige zu wählen, welche vor allen den Vorzug der Klarheit besitzt, in der somit Ungleichförmiges gesondert, Gleichförmiges gesammelt erscheint; dass ferner für unser geometrisches Vorstellungsvermögen in den Asymptoten der particulären Integrale das charakteristischeste Merkmal liege, das Curvenende, oder so zu sagen derjenige Ausläufer ins Unendliche, an welchem wir mit der grösstmöglichen Bequemlichkeit den einen Genüge leistenden Werth aus der Verschlingung mit allen übrigen entwirren; dass endlich gerade die Asymptoten es sind, die schon bei der unmittelbaren Ansicht der Differentialgleichung lediglich durch die Gradzahlen der Coefficienten sich zu erkennen geben. Wir haben darum der asymptotischen Form auch in der Transformationslehre besondere Aufmerksamkeit geschenkt, namentlich aber das Aufsuchen derselben durch Sonderung desjenigen exponentiellen Factors vorbereitet, die eine Herabsetzung des particulären Integrales von der zweiten zur ersten Classe zu Folge hat. Die Asymptote desselben ist, wie wir wissen, hiedurch von einer Exponentiellen algebraisch geworden, und das particuläre Integral selbst kann nach S. 21 der Formenlehre in Form eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl aufgefasst werden. Wenn es uns daher gelingt, seiner in dieser Gestalt mit beliebiger Genauigkeit habhaft zu werden, so haben wir die vollständigste Kenntniss davon und zwar in der lichtvollsten Form errungen. Da aber nach den Ergebnissen eben dieses Paragraphes die Form des Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl nur unter der Bedingung vorhanden ist, dass es in der Differentialgleichung im Niveau stehende, oder einen Abfall, der nicht über der negativen Einheit liegt, biethende Coefficientenpaare gibt; so wollen wir nur Gleichungen, deren Coefficienten dieselbe Gradzahl haben, aber mit gänzlich unbestimmt gelassenen Parametern der Betrachtung unterwerfen. Liegt es dann gelegentlich in unserem Wunsche, den Einfluss von Ansteigungen oder Abfällen auf den Gang der Rechnung kennen zu lernen, so ist diess durch Nullsetzen einer gewissen Anzahl constanter Parameter jedesmal auf das leichteste erreicht. Wir werden überdem mit dem einfachsten Falle beginnen, und werden zuerst diejenige Gleichung, die wir bereits im zweiten Abschnitte erschöpfend behandelt haben, nämlich die mit Coefficienten vom ersten Grade, wie $ax+b$ der Integration in Form von Differentialquotienten von allgemeiner Ordnungszahl unterwerfen. Sie sei:

(306) $$(a_n x + b_n) y^{(n)} + (a_{n-1} x + b_{n-1}) y^{(n-1)} + \ldots + (a_1 x + b_1) y' + (a_0 x + b_0) y = 0.$$

Wir nehmen einen ihr Genüge leistenden Werth an in der Gestalt:

(307) $$y = \frac{d^h}{du^h} [e^{ux} W]\Big\}_\alpha,$$

in welchem h einen constanten Differentiationsindex, W eine Function von u, die kein x in sich enthält, und α eine gleichfalls von x unabhängige Constante andeutet, die nach geschehener h-maliger Differentiation anstatt u gesetzt werden muss, und es handelt sich offenbar darum, durch schickliche Wahl dieser Grössen die (306) identisch zu machen. Man überzeugt sich sehr leicht, dass diese Form mit den von der Formenlehre gebothenen in der vollsten Uebereinstimmung stehe. Die Formenlehre nämlich bezeichnet den gleich hoch gebauten Coefficienten entsprechend, also der Ansteigungszahl Null auf das Coefficientenpaar angehörig, lauter particuläre Integrale von der Form:

$$e^{\alpha x} . Q,$$

allwo Q eine Function erster Classe bedeutet. Aber auch der eben angeführte Ausdruck in Form eines h^{ten} Differentialquotienten verwandelt sich nach geschehener Entwicklung in eine solche Form. Wir substituiren demnach den angenommenen Ausdruck (307) in dieselbe, und bemerken, dass, weil man allgemein für jedes r hat:

(308) $$y^{(r)} = \frac{d^h}{du^h} [u^r e^{ux} W]\Big\}_\alpha$$

das Substitutionsresultat so aussehe:

(309) $$\frac{d^h}{du^h} [(U_1 x + U_0) e^{ux} W]\Big\}_\alpha = 0$$

mit den Werthen:

(310) $$\begin{aligned} U_1 &= a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots + a_1 u + a_0 \\ U_0 &= b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \ldots + b_1 u + b_0. \end{aligned}$$

Führen wir hier die h-malige Differentiation nach u mit Hilfe derjenigen Formel durch, die wir für den h^{ten} Differentialquotienten des Produktes PQ besitzen, indem wir e^{ux} als ersten und $U_1 Wx + U_0 W$ als zweiten Factor auffassen; denken wir uns sodann α anstatt u substituirt, und bezeichnen allgemein dasjenige, was aus irgend einem r^{ten} Differentialquotienten des Produktes $U_0 W$ oder $U_1 W$ durch die Substitution $u = \alpha$ wird, durch $(U_0 W)^{(r)}$ oder $(U_1 W)^{(r)}$, wobei jedoch wohl zu bemerken ist, dass hier die Substitution nach der r-maligen Differentiation ausgeführt gedacht wird und nicht umgekehrt; ordnen wir endlich das Resultat nach absteigenden Potenzen von x: so liegt dann folgende durch schickliche Wahl von h, W und α identisch zu machende Gleichung vor:

$$0 = e^{\alpha x} \begin{cases} x^{h+1} \,.\, U_1 W \\ + x^h \,.\, [U_0 W + h\,(U_1 W)'] \\ + x^{h-1} \,.\, h \left[(U_0 W)' + \frac{h-1}{2}\,(U_1 W)''\right] \\ + x^{h-2} \,.\, \frac{h\,.\,(h-1)}{1\,.\,2} \left[(U_0 W)'' + \frac{h-2}{3}\,(U_1 W)'''\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + x^{h-r} \,.\, \frac{h(h-1)\ldots\ldots(h-r+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots r} \left[(U_0 W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1}\,(U_1 W)^{(r+1)}\right] \\ + x^{h-r-1} \,.\, \frac{h(h-1)\ldots\ldots(h-r)}{1.2\ldots(r+1)} \left[(U_0 W)^{(r+1)} + \frac{h-r-1}{r+2}\,(U_1 W)^{(r+2)}\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{311}$$

was für beliebige x nur dann möglich ist, wenn die Coefficienten der verschiedenen Potenzen dieser Variablen je für sich gleich Null werden. Man erhält also folgende Reihe von Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} U_1 W &= 0 \\ U_0 W + h\,(U_1 W)' &= 0 \\ (U_0 W)' + \frac{h-1}{2}\,(U_1 W)'' &= 0 \\ (U_0 W)'' + \frac{h-2}{3}\,(U_1 W)''' &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (U_0 W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1}\,(U_1 W)^{(r+1)} &= 0 \\ (U_0 W)^{(r+1)} + \frac{h-r-1}{r+2}\,(U_1 W)^{(r+2)} &= 0. \end{aligned} \tag{312}$$

Der ersten von ihnen kann Genüge geleistet werden, durch Nullwerden von U_1 oder von W, da aber Letzteres unstatthaft ist, weil die entwickelt geschriebene Zweite: d. h. die:

$$(U_0 + hU_1')\,W + hU_1 W' = 0, \tag{313}$$

dann auch $W' = 0$, die darauffolgende $W'' = 0$ u. s. w., ihr Inbegriff aber $W = 0$ liefern würde, was auch $y = 0$ macht, ihm also allerdings einen Genüge leistenden Werth ertheilt, der aber kein particuläres Integral ist; so bleibt uns nur übrig:

$$U_1 = a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1\,\alpha + a_0 = 0 \tag{314}$$

anzunehmen, und die zweite, die jetzt in die einfachere:

$$U_0 + hU_1' = 0 \tag{315}$$

übergeht, zur Bestimmung von h zu benützen. Sie liefert:

$$h = -\frac{U_0}{U_1'}, \tag{316}$$

und da die $U_1 = 0$ eine algebraische Gleichung des n^{ten} Grades ist, die in der Regel n vo
verschiedene Wurzeln: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ besitzen wird, so gewinnt man ihnen entspre
in der Regel und namentlich so lange, als es keine gleichen Wurzeln gibt, und der
a_n von der Nulle verschieden bleibt, n verschiedene und zwar endliche Werthe für h, die
bar n verschiedenen particulären Integralen angehören, so dass eigentlich durch eine a
Rechnung, und nur mittelst der n Substitutionen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ alsogleich das
Integral erhalten wird.

Nachdem wir gesehen haben, dass die ersten beiden der Bestimmungsgleichungen
Werthe von α und h geben, entwickeln wir die dritte. Sie ist:

$$\left(U_0'' + \frac{h-1}{2} U_1''\right) W + \left(U_0 + (h-1) U_1'\right) W' + \frac{h-1}{2} U_1 W'' = 0. \tag{317}$$

Das in ihr enthaltene Glied mit W'' verschwindet wegen des Factors U_1, der Coefficien
geht in Folge der (315) in $-U_1'$ über, ist somit unter der gemachten Voraussetzung verschie
zeln von der Nulle verschieden, daher denn diese Gleichung jedesmal W' bestimmt, indem
einen dem W proportionalen Ausdruck liefert. Zur Bestimmung des W selbst ist gar kein
handen, es spielt daher die Rolle einer willkürlichen Constante, oder vielmehr von n ve
den Substitutionen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ angehörigen Constanten. Dass nun dasselbe mit d
Bestimmungsgleichungen in derselben Weise der Fall sei, davon belehrt uns die allgemeine
die von dem Verschwinden des Coefficienten von x^{h-r} spricht, nämlich die:

$$(U_0 W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1} (U_1 W)^{(r+1)} = 0. \tag{318}$$

Die höchsten in ihr vorkommenden Differentialquotienten von W sind der r^{te} und r-
ihnen gehörigen Coefficienten aber offenbar:

$$U_0 + (h-r) U_1', \qquad \frac{h-r}{r+1} U_1.$$

Ersterer geht vermöge der (315) über in das von Null verschiedene $-r U_1'$, der ande

Die Gleichung dient also bei dem Hinausfallen von $W^{(r+1)}$ zur Bestimmun
sieht daher, dass die Gleichungen (312), von der dritten angefangen, der Reihe nac
$W^{(r)}, W^{(r+1)}$ geben, und zwar jedesmal vermittelst einer Division durch U_1'. Man
Grössen der Reihe nach dem willkührlichen W proportionale, beziehlich durch U_1'
gebrochene, somit endliche Ausdrücke erhalten, und, da der in entwickelter Form hi
mene Werth von y (307) auch so aussieht:

$$y = e^{\alpha x}\left[x^h W + h x^{h-1} W' + \frac{h(h-1)}{2} x^{h-2} W'' + \ldots\ldots + \frac{h\ldots(h-r+1)}{1\ldots r} x^{h-r} W^{(r)} + \ldots\right], \quad (319)$$

so sind in demselben alle Coefficienten der eingeklammerten, nach absteigenden Potenzen von x geordneten Reihe, als dem W proportionale Ausdrücke bekannt. Dieses W erscheint somit als herauszusetzender gemeinschaftlicher Factor, und statuirt man, ein öfters gebrauchtes Symbol benützend, allgemein für den Werth $\alpha = \alpha_s$:

$$W = W_s \quad \text{und} \quad W^{(r)} = [s,r]\, W_s;$$

so ist in der nachfolgenden Formel das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung enthalten:

$$\begin{aligned} y = \; & W_1 e^{\alpha_1 x}\left[x^{h_1} + h_1[1,1]x^{h_1-1} + \binom{h_1}{2}[1,2]x^{h_1-2} + \ldots\ldots + \binom{h_1}{r}[1,r]x^{h_1-r} + \ldots\right] + \\ & + W_2 e^{\alpha_2 x}\left[x^{h_2} + h_2[2,1]x^{h_2-1} + \binom{h_2}{2}[2,2]x^{h_2-2} + \ldots\ldots + \binom{h_2}{r}[2,r]x^{h_2-r} + \ldots\right] + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + W_n e^{\alpha_n x}\left[x^{h_n} + h_n[n,1]x^{h_n-1} + \binom{h_n}{2}[n,2]x^{h_n-2} + \ldots\ldots + \binom{h_n}{r}[n,r]x^{h_n-r} + \ldots\right]. \end{aligned} \quad (320)$$

Die Werthe aber von W', W'', ... sind hier der Reihe nach:

$$\begin{aligned} W' &= \frac{W}{2U_1'^2}\left\{(2U_0' - U_1'')U_1' - U_0 U_1''\right\} \\ W'' &= \frac{W}{12\,U_1'^4}\left\{\begin{aligned} &(6U_0'' - 4U_1''')U_1'^3 + (-2U_0 U_1''' + 12U_0'^2 - 18U_0' U_1'' + 6U_1''^2)U_1'^2 + \\ &+ (-12U_0 U_0' U_1'' + 9U_0 U_1''^2)U_1' + 3U_0^2 U_1''^2 \end{aligned}\right\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (321)$$

Die n an der Zahl vorhandenen Werthe von h sind wohl in den meisten Fällen Functionen der constanten, in die Differentialgleichung eingehenden Parameter, können daher durch schickliche Wahl der letzteren entweder alle, oder auch nur einige unter ihnen verwandelt werden in ganze positive Zahlen; oft sind sie bereits solche. Es interessirt uns dieser Fall darum, weil er die Reihen in den Ausdrücken der particulären Integrale bei dem $h+1^{\text{sten}}$ Gliede abbrechen macht, und so in geschlossene Polynome verwandelt, denn hat man h gleich einer ganzen positiven Zahl r, so gehen in der (319) das Glied:

$$\frac{h\;\ldots\ldots\;(h-r)}{1\;\ldots\ldots\;(r+1)}\, x^{h-r-1}\, W^{(r+1)},$$

und die darauffolgenden, wegen des ihnen allen gemeinschaftlichen, verschwindenden Factors $h-r$ in die Nulle über, denn es lässt sich zeigen, dass nicht zu gleicher Zeit $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$ ..... unendlich angenommen werden müssen, um der Differentialgleichung zu genügen. Man betrachte zu diesem Zwecke die Gleichung (311). Der Coefficient von x^{h-r}, der Nulle gleichgesetzt, hat $W^{(r)}$ geliefert; der hierauf

folgende ist vermöge des Factors $h-r$ identisch der Nulle gleich, was auch immer $W^{(r+1)}$ bedeute mag, dieses ist also nicht unendlich, sondern willkührlich, kann sohin, wenn man von seiner Eigenschaf der $r+1^{ste}$ Differentialquotient einer angebbaren Function von u für $u=\alpha$ zu sein, absehen wil auch durch Null ersetzt werden, und die Gleichung (319) enthält ein abbrechendes, algebraische Polynom, was auch immer die endlich gedachten Werthe von $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$, ... sein mögen, s dass also für ganze positive h der angenommene Ausdruck (307) Genüge zu leisten die Eigenscha besitzt für unzählige, anstatt W gesetzte Functionen von u, alle diejenigen nämlich, deren erste Differentialquotienten W', W'', ... $W^{(h)}$ sind, oder mit anderen Worten, die vermittelst der Ma Laurin'schen Formel nach Potenzen von $u-\alpha$ entwickelt, dieselben $h+1$ Anfangsglieder mit de algebraischen Polynome

$$W + W'(u-\alpha) + W''\frac{(u-\alpha)^2}{2} + \dots\dots\dots + W^{(h)}\frac{(u-\alpha)^h}{1\dots h}$$

besitzen. Hört h auf, eine ganze Zahl zu sein, so ist auch diese Vieldeutigkeit von W nicht mehr vo handen, dieses erscheint vielmehr als eine bestimmte Function von u; alle seine Differentialquotiente bekommen bestimmte, aus den Gleichungen (312) abzuleitende Werthe und das in der (319) vorh dige eingeklammerte Polynom verwandelt sich in der Regel in eine unendliche Reihe, den Fall ausg nommen, wo W eine ganze algebraische Function von u ist. Er wird sich durch das Verschwind sämmtlicher aus den Gleichungen (312) gezogenen Differentialquotienten von W, angefangen v irgend einem derselben, kundgeben, man wird aber auf ihn höchst selten stossen, da sich leicht zeig lässt, dass die Function W_1 das Product: $(u-\alpha_1)^{h_1+1}(u-\alpha_2)^{h_2+1}\dots\dots(u-\alpha_n)^{h_n+1}$ im Nenner hab und noch überdiess oft mit einem angebbaren exponentiellen Factor versehen sei, allein eben weil m diess weiss, ist man auch im Stande diese Hindernisse, die der Auffindung des W in geschlossen Form entgegenstehen, zu beseitigen. Diess ist übrigens im gegenwärtigen Falle nicht nothwendig, w man, $y=\int_{u'}^{u''}e^{ux}\,Vdu$ annehmend, das V aus einer Differentialgleichung der ersten Ordnung in geschlo sener Form findet, und sodann unmittelbar:

$$W_1=(u-\alpha_1)^{h_1+1}V,\qquad W_2=(u-\alpha_2)^{h_2+1}V,\qquad \dots\dots\dots\qquad W_n=(u-\alpha_n)^{h_n+1}V \tag{322}$$

hat, wie demnächst gezeigt werden soll; bei Differentialgleichungen hingegen mit höher gebaut Coefficienten kann uns diese Bemerkung zu gute kommen.

Findet sich in der Differentialgleichung (306) in Folge des Verschwindens von a_0 ein Abfall u eine Einheit in der Gradzahl der beiden letzten Coefficienten, so gibt die Algebraische (314), dems ben entsprechend, eine Wurzel Null, die das particuläre Integral, wenn das zugehörige h noch überdi ganz und positiv ist, in eine ganze und algebraische Function umwandelt, in jedem Falle aber die leic teste Substitution, die oft ein mühsamer Bestandtheil der eingeleiteten Rechnung ist, nämlich die d Nulle, im Gefolge hat, und diess ist ein kleiner Vortheil, den man durch Herabbringen des particulär Integrales zur ersten Classe erringt.

Es ist schon bemerkt worden, dass Differentialgleichungen von der Form der gegenwärti

besprochenen, mit Coefficienten nämlich wie $ax+b$, bereits im ersten Bande II. Abschnitt allgemein integrirt worden seien und zwar ursprünglich durch bestimmte Integrale, wie:

$$y=\int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V du,$$

mit dem alldort aus unseren Rechnungen abgeleiteten Werthe von V:

$$V=\frac{1}{U_1}\, e^{\int \frac{U_0}{U_1} du},$$

in welchem U_0 und U_1 dieselben Bedeutungen haben, die ihnen auch hier unter (310) beigelegt werden — und erst, wenn diese Form des bestimmten Integrales unzulässig erschien desshalb, weil für irgend einen Werth von u etwa den $u=\alpha$, der zwischen den Integrationsgrenzen u' und u'' lag, die Function V unendlich wurde, weil in ihrem Nenner $(u-\alpha)^{h+1}$ als Factor erschien, was wieder nur die Folge war eines Partialbruches, gehörig zu $\frac{U_0}{U_1}$ und zwar des $-\frac{h}{u-\alpha}$, sehen wir uns genöthigt der Form eines h^{ten} Differentialquotienten den Vorzug zu geben. Der Uebergang von einer dieser Formen zur anderen wurde vermittelt durch Gebilde von einem ähnlichen analytischen Charakter wie $\frac{0}{0}$, durch besondere Integrale nämlich, mit unendlich nahe aneinander liegenden Integrationsgrenzen und einer unendlichen Function unter dem Integralzeichen. Dieser Uebergang war zudem nur giltig für ganze und positive Werthe von h, wurde aber doch in der Folge für beliebige als bestehend anerkannt, und alles das durch eine Kette von Folgerungen, denen ein vorsichtiger Analyst allenfalls einige Kühnheit vorzuwerfen sich geneigt finden dürfte. Wenn nun auch der erwähnte Uebergang den doppelten, sehr beachtenswerthen Vortheil biethet, die Verwandtschaft zweier Hauptformen der Integrale linearer Differentialgleichungen darzulegen und die Verwandlung der einen, gelegentlich unbrauchbar gewordenen in die andere, als tadellos auftretende zu ermöglichen, ohne dass es nöthig ist, die Rechnung von vorne anzufangen, so blieb doch eine Methode wünschenswerth, die nicht durch bestimmte Integrale, sondern direct zu der Hauptform des Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl leitet. Wir haben eine solche eben kennen gelernt und es ist nur noch nothwendig, zu zeigen, dass die hier gewonnenen Resultate für ganz beliebige Differentiationsexponenten h mit denjenigen übereinstimmen. die nach den Vorschriften von §. 4 des II. Abschnittes gebildet werden aus der Function V. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, $u-\alpha$ sei ein einzelner Factor von U_1. Der dazu gehörige Differentiationsindex h, wie er hier durch die Formel (316) gegeben wird, ist derselbe, der auch bei der Zerlegung von $\frac{U_0}{U_1}$ in Partialbrüche, und zwar als Zähler des Bestandbruches $-\frac{h}{u-\alpha}$ erhalten wird. Ihm entspricht offenbar ein Divisor $(u-\alpha)^h$ von $e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}$, und somit ein Divisor $(u-\alpha)^{h+1}$ von V. Nach den obangedeuteten Vorschriften nun des § 4 hat man eben diesen Divisor in V wegzulassen und von dem mit e^{ux} multiplizirten, so gewonnenen Resultate, d. h.:

$$\frac{(u-\alpha)^{h+1}}{U_1}\, e^{ux+\int \frac{U_0}{U_1} du},$$

den h^{ten} Differentialquotienten für $u = \alpha$ zu nehmen, um zu einem Genüge leistenden Werthe der Form:

$$y = \frac{d^h}{du^h}\left[\frac{(u-\alpha)^{h+1}}{U_1} e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}\right]_\alpha$$

zu gelangen. Dieser wird mit dem gleichgestalteten (307) offenbar zusammenfallen, wenn man

(323) $$W = \frac{(u-\alpha)^{h+1}}{U_1} e^{\int\frac{U_0}{U_1}du} = (u-\alpha)^{h+1} V$$

hat. Wir hätten daher nur zu zeigen, dass aus dieser Gleichung dieselben Werthe von **W**, **W**′, **W**″, ... somit allgemein dasselbe W hervorgehe, welches auch die Gleichungen (312) liefern, u diess thun wir auf folgende Weise: Wir schreiben die vorliegende (323) so:

$$U_1 W (u-\alpha)^{-h-1} = e^{\int\frac{U_0}{U_1}du},$$

und differenziren sie, mit Berücksichtigung des aus der (323) hervorgehenden Werthes der in i erscheinenden Exponentialgrösse. Wir erhalten so:

$$\left[(U_1 W)' - U_0 W\right](u-\alpha) + (h+1)\, U_1 W = 0,$$

differenziren abermals r-mal nach u nach der bekannten Formel für die Differentiation eines Produkte unter r eine beliebige ganze positive Zahl verstanden, gelangen hiedurch zu:

$$\left[(U_1 W)^{(r+1)} - (U_0 W)^{(r)}\right](u-\alpha) + (r-h-1)\,(U_1 W)^{(r)} - r\,(U_0 W)^{(r-1)} = 0,$$

und denken uns hier der Reihe nach r durch die Zahlen 1, 2, 3, ... r, $r+1$ .. .. ersetzt, s dann α für u geschrieben, und, um diess anzudeuten, von den früher eingeführten Bezeichnung U_0, U_1, **W** anstatt U_0, U_1, W Gebrauch gemacht, so gehen aus dieser einen letzten Gleichung a unsere zur Bestimmung von **W**′, **W**″, ... dienenden (312) hervor und es ist sohin erwiesen, da die im §. 4 des II. Abschnittes gegebenen Vorschriften und der hier eingeschlagene directe Weg einerlei Resultaten führen. Erstere erringen sich sogar den Vorzug, als sie jedesmal von einem in geschlossener Form ausgehen und folglich auch zu einem geschlossenen **W** führen, während die Function hier, ganze positive h etwa abgerechnet, in der Form von einer unendlichen Reihe erhalt wird. Und hiemit sehen wir, dass die als Behauptung aufgestellten Relationsgleichungen (322), die den verschiedenen particulären Integralen gehörigen $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, ... $\mathbf{W}_n$ ganz richtig angeben.

Jetzt wollen wir den bisher ausgeschlossenen Fall gleicher Wurzeln der algebraisch Gleichung (314) in α der Betrachtung unterwerfen, und namentlich wollen wir, um gerade den i structivsten und einfachsten Fall vor Augen zu haben, sie gleiche Wurzeln Null sein lassen. S erscheinen m an der Zahl dann, wenn $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_{m-1} = 0$ ist; da aber dann e gemeinschaftlicher repartirter Abfall von $\frac{1}{m}$ Einheiten auf die m letzten Coefficientenpaare fällt,

wissen wir aus den Ergebnissen der Formenlehre, dass dann m particuläre Integrale in der abweichenden Form:

$$e^{\int \frac{A dx}{\sqrt[m]{x}}} . Q$$

erscheinen, sie also die Analysis in der früher vorausgesetzten nimmer zu liefern im Stande sei. Dem ist nun auch wirklich so, da nicht bloss die der Wurzel $\alpha = 0$ entsprechenden Werthe für h, sondern auch die für W', W'', ... aus den (312) abgeleiteten unendlich, sohin unbrauchbar werden. Dasselbe ist nun der Fall auch bei von der Nulle verschiedenen gleichen Wurzeln, etwa α_1, nur mit dem Unterschiede, dass anstatt der vor Augen liegenden die verwandte Form:

$$e^{\int \left[\alpha_1 + \frac{A}{\sqrt[m]{x}}\right] dx} . Q$$

einer Gruppe von m particulären Integralen zukömmt. Zu ihrer Ermittlung führt am besten eine passende Umwandlung der unabhängigen Veränderlichen, wenn man es nicht etwa vorzieht, ohne Umwandlung die höhere algebraische Gleichung zu suchen, die der Differentialen zu Grunde liegt.

Der Exponent h, kann auch aufhören, einen unendlichen Werth zu haben, ungeachtet er einem wiederholten Wurzelfactor $u - \alpha$ von U_1 entspricht. Es geschieht diess dann, wenn eben dieser wiederholte Wurzelfactor sich sowohl im Polynome U_1, wie in U_0 vorfindet. Hiemit verbindet sich die Rückkehr einer Gruppe particulärer Integrale zur normalen Form eines Produktes, wie $e^{\alpha x} Q$. In der That, setzen wir voraus, es sei dem U_0 und U_1 der Factor $(u - \alpha)^{r+1}$ gemeinschaftlich, so bietet das in der asymptotischen Form absteigend geordnete Gleichungspolynom (311) dem $u = \alpha$ entsprechend identisch verschwindende Anfangsglieder $r + 1$ an der Zahl, und zwar was auch W, W', W''..... bedeuten mögen. Die Darauffolgenden haben alle das Produkt $h\,(h-1)\,(h-2)\,.....\,(h-r)$ zum Factor, gehen daher gleichermassen in die Nulle über, wenn man dem Exponenten h einen Werth ertheilt, gezogen aus der Reihe der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ... r. Diess führt zu particulären Integralen r an der Zahl, denen allen einerlei exponentieller Factor $e^{\alpha x}$ angehört, während der andere der ersten Classe angehörige Factor in ein geschlossenes algebraisches Polynom übergeht, beziehlich vom 0ten, 1sten, ... $r$ten Grade und mit willkührlichen Coefficienten: W, W', W'', ... Diese r particulären Integrale bilden daher aggregirt einen Ausdruck, wie folgt:

$$e^{\alpha x}\left[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + C_r x^r\right],$$

als mit $r + 1$ willkührlichen Constanten versehenen Bestandtheil des allgemeinen Integrales.

Hiezu vermag noch ein particuläres Integral mit noch einer willkührlichen Constanten zu treten, wenn an Factoren $u - \alpha$ die Polynome U_0 und U_1 beziehlich $r + 1$ und $r + 2$ an der Zahl besitzen. Die Anzahl der verschwindenden Anfangsglieder in der Formel (311) ist dann $r + 2$. Das folgende $(r + 3)$te der Nulle gleich gesetzt:

$$(U_0\,W)^{(r+1)} + \frac{h-r}{r+2}\,\frac{1}{}\,(U_1\,W)^{(r+2)} = 0$$

oder:

$$U_0^{(r+1)} W + \frac{h-r-1}{r+2} U_1^{(r+2)} W = 0$$

liefert den Werth von h:

$$h = -\frac{(r+2)\, U_0^{(r+1)}}{U_1^{(r+2)}} + r + 1, \ldots$$

während wir aus den darauffolgenden, so lange $U_1^{(r+2)}$ von Null verschieden ist, $W', W'', W''', \ldots$ ableiten. Diess gibt augenscheinlich noch ein particuläres Integral mit derselben Exponentiellen $e^{\alpha x}$, welches zu den $r+1$ in der Formel (324) enthaltenen noch hinzuzutreten hat, aber alsogleich abhanden kommt, sobald U_1 mehr als $r+2$ Factoren $u-\alpha$ besitzt.

Um aber auch ganz allgemein in dem Falle, wo U_0 und U_1 beziehlich $r+1$ und $r+s+1$ Factoren $u-\alpha$ haben, Aufschluss zu gewinnen über die Form der sämmtlichen Genüge leistenden Werthe, erwäge man, dass der Ausdruck (324) auch hier einen Genüge leistenden Werth vorstelle, und dass man durch eine eingeleitete sehr einfache Transformation vermittelst der Substitution: $y = e^{\alpha x}. z$ das Integral von dem Factor $e^{\alpha x}$ befreien könne, wodurch der Ausdruck (324) in eine ganze algebraische Function des r^{ten} Grades verwandelt wird. Die Transformirte in z wird daher die Eigenschaft haben, durch eine solche Function erfüllt zu sein, was dann der Fall ist, wenn in ihr weder z noch die Differentialquotienten bis zum r^{ten} inclusive vorkommen. Die Form dieser Gleichung in z fällt insoferne mit der in y zusammen, als man auch keine anderen Coefficienten, als solche des ersten Grades in ihr wahrnehmen wird, nur werden die gleichen Wurzeln α der Gegebenen in y in gleiche Wurzeln Null der Transformirten übergehen. Letztere trägt daher offenbar die Form:

$$(a_n x + b_n) z^{(n)} + (a_{n-1} x + b_{n-1}) z^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + (a_{r+s+1} x + b_{r+s+1}) z^{(r+s+1)} + \\ + b_{r+s} z^{(r+s)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_{r+1} z^{(r+1)} = 0.$$

Die Schlusscoefficienten bieten hier den Abfall von einer Einheit in der Gradzahl auf s Paare, also von $\frac{1}{s}$ Einheiten auf das Paar. Dem entspricht nach den Angaben der Formenlehre eine Gruppe von $s-1$ particulären Werthen in der Form:

$$z^{(r+1)} = e^{\int \frac{A dx}{\sqrt[s]{x}}} . Q. \tag{325}$$

Die s Werthe des Coefficienten A sind gezogen aus der algebraischen Gleichung:

$$a_{r+s+1} A^s + b_{r+1} = 0,$$

und die Transformationen, deren man benöthigt, um jedes der particulären Integrale zur ersten Classe herabzubringen und auf dem hier betretenen Wege hiemit integrabel zu machen, werden in §. 2 und §. 5 der Transformationslehre zur Sprache gebracht.

Die Anzahl der durch die asymptotische Integrationsmethode gewonnenen particulären Integrale wird auch dann verringert, wenn die Gleichung $U_1 = 0$ wegen des Verschwindens der Anfangsglieder

ihres Polynoms in gewisser Anzahl aufhört dem n^{ten} Grade anzugehören. Diess findet nur dann statt, wenn in der Differentialgleichung die Anfangscoefficienten in Constante übergehen, d. h. wenn dieselbe die Form:

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + (a_{n-s}\, x + b_{n-s})\, y^{(n-s)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (a_0\, x + b_0)\, y = 0$$

annimmt. Die Ansteigung in den Anfangscoefficienten von einer Einheit auf s Paare, also von $\frac{1}{s}$ Einheit auf das Paar, deutet hier auf particuläre Integrale, s an der Zahl hin, die nicht die Gestalt $e^{ax}\, Q$, sondern die andere:

$$y = e^{\int A dx \sqrt[s]{x}} \,.\, Q.$$

besitzen, und man mag nach Belieben diesen s-gliedrigen Bestandtheil des Integrales entweder durch eine Reihe von Transformationen, oder, was hier noch zweckmässiger ist, in Form einer Summe von $s+1$ bestimmten Integralen zwischen Grenzen 0 und ∞ und mit einer Relationsgleichung zwischen den $s+1$ Constanten sich zu verschaffen suchen.

§. 5.

Asymptotische Integration der Gleichungen mit quadratischen Coefficienten.

Schreiten wir jetzt zur Integration derjenigen Differentialgleichung, die auf die (306) deren Coefficienten vom ersten Grade sind, zunächst kommt, die nämlich mit quadratischen Coefficienten:

$$(a_n x^2 + b_n x + c_n)\, y^{(n)} + (a_{n-1} x^2 + b_{n-1} x + c_{n-1})\, y^{(n-1)} + \ldots + (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)\, y' + (a_0 x^2 + b_0 x + c_0)\, y = 0 \quad (326)$$

Wir entnehmen auch hier den Vorschriften der Formenlehre einen Genüge leistenden Werth in der Form:

$$y = \frac{d^k}{du^k}\, [e^{ux}\, W] \Big\}_{\alpha} \quad (327)$$

und erhalten durch Substitution desselben in die vorliegende Gleichung:

$$\frac{d^k}{du^k} \left[e^{ux}\, W\, (U_2\, x^2 + U_1\, x + U_0) \right] \Big\}_{\alpha} = 0,$$

allwo:

$$\begin{aligned} U_2 &= a_n\, u^n + a_{n-1}\, u^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1\, u + a_0 \\ U_1 &= b_n\, u^n + b_{n-1}\, u^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_1\, u + b_0 \\ U_0 &= c_n\, u^n + c_{n-1}\, u^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_1\, u + c_0 \end{aligned} \quad (328)$$

sind. Durch Entwicklung dieses Substitutionsresultates und mit Hilfe der bereits gebrauchten, die Einführung von α anstatt u andeutenden Bezeichnung gelangen wir zur folgenden identischen Gleichung:

$$
(329)\quad 0 = e^{\alpha x}\left\{
\begin{aligned}
&+x^{h}\Big[U_0 W + h\,(U_1 W)' + \frac{h(h-1)}{2}\,(U_2 W)''\Big] \\
&+h x^{h-1}\Big[(U_0 W)' + \frac{h-1}{2}\,(U_1 W)'' + \frac{(h-1)(h-2)}{2\,.\,3}\,(U_2 W)'''\Big] \\
&+\frac{h(h-1)}{2}\,x^{h-2}\Big[(U_0 W)'' + \frac{h-2}{3}\,(U_1 W)''' + \frac{(h-2)(h-3)}{3\,.\,4}\,(U_2 W)^{IV}\Big] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\frac{h\ldots(h-r+2)}{1\ldots(r-1)}\,x^{h-r+1}\Big[(U_0 W)^{(r-1)} + \frac{h-r+1}{r}\,(U_1 W)^{(r)} + \frac{(h-r+1)(h-r)}{r\,(r+1)}\,(U_2 W)^{(r+1)}\Big] \\
&+\frac{h\ldots(h-r+1)}{1\ldots r}\,x^{h-r}\Big[(U_0 W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1}\,(U_1 W)^{(r+1)} + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(r+1)(r+2)}\,(U_2 W)^{(r+2)}\Big] \\
&+\frac{h\ldots(h-r)}{1\ldots(r+1)}\,x^{h-r-1}\Big[(U_0 W)^{(r+1)} + \frac{h-r-1}{r+2}\,(U_1 W)^{(r+2)} + \frac{(h-r-1)(h-r-2)}{(r+2)(r+3)}\,(U_2 W)^{(r+3)}\Big] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

bei der die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x je für sich der Nulle gleich sein müssen, die demnach in folgende Bestimmungsgleichungen zerfällt:

$$
(330)\quad
\begin{aligned}
U_2 W &= 0 \\
U_1 W + h\,(U_2 W)' &= 0 \\
U_0 W + h\,(U_1 W)' + \frac{h(h-1)}{2}\,(U_2 W)'' &= 0 \\
(U_0 W)' + \frac{h-1}{2}\,(U_1 W)'' + \frac{(h-1)(h-2)}{2\,.\,3}\,(U_2 W)''' &= 0 \\
(U_0 W)'' + \frac{h-2}{3}\,(U_1 W)''' + \frac{(h-2)(h-3)}{3\,.\,4}\,(U_2 W)^{IV} &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(U_0 W)^{(r-1)} + \frac{h-r+1}{r}\,(U_1 W)^{(r)} + \frac{(h-r+1)(h-r)}{r\,(r+1)}\,(U_2 W)^{(r+1)} &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{aligned}
$$

Der ersten von ihnen kann nur dadurch Genüge geleistet werden, dass man:

$$
(331)\quad U_2 = a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1\,\alpha + a_0 = 0
$$

nimmt; nachdem in Folge des etwa angenommenen $W = 0$ auch W', W'', ... der Nulle gleich werden würden, was ein Verschwinden von y zur Folge hätte. Die Zweite bestimmt dann in der Regel den Werth von h, da sie übergeht in:

$$
(332)\quad U_1 + h\,U'_2 = 0; \quad \text{woraus} \quad h = -\frac{U_1}{U'_2}.
$$

Da nun aber die $U_2 = 0$ als dem n^{ten} Grade angehörend gewöhnlich n von einander verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ besitzt, so lange wenigstens, als α_n nicht Null ist, so hat man ihnen entsprechend auch gewöhnlich n von einander verschiedene Werthe von h, die offenbar n verschiedenen particulären Integralen angehören. Die Dritte liefert jetzt W' als einen dem W proportionalen Ausdruck, und zwar:

$$W' = \frac{W}{hU'_1}\left(U_0 + hU'_1 + \frac{h(h-1)}{2}U''_2\right),$$

und ebenso wird die darauffolgende Vierte W'' geben durch W ausgedrückt, die Fünfte zu W''' führen, und fassen wir endlich die:

$$(U_0 W)^{(r-1)} + \frac{h-r+1}{r}(U_1 W)^{(r)} + \frac{(h-r+1)(h-r)}{r(r+1)}(U_2 W)^{(r+1)} = 0 \tag{333}$$

ins Auge, bemerkend, dass die höchsten in derselben vorkommenden Differentialquotienten von W, nämlich $W^{(r)}$ und $W^{(r+1)}$ beziehlich multiplizirt erscheinen mit:

$$\frac{h-r+1}{r}\left[(h-r)\,U'_2 + U_1\right] \quad \text{und} \quad \frac{(h-r+1)(h-r)}{r(r+1)}U_2,$$

Factoren, von welchen der erste der (332) zufolge gleich $-(h-r+1)U'_2$, der zweite aber gleich Null ist; so sehen wir, dass sie, die die $r+2^{te}$ an der Zahl ist, zu dem Werthe von $W^{(r)}$ führe, und diess zwar vermittelst einer Division durch $(h-r+1)U'_2$. Da dem zufolge die $W', W'', W''' \ldots$ eine ähnliche Division durch hU'_2, $(h-1)U'_2$, $(h-2)U'_2$, ... erheischen, so erscheinen offenbar die Werthe dieser Grössen in Bruchform, und es enthält allgemein der von $W^{(r)}$ den Nenner:

$$h(h-1)(h-2)\ldots\ldots(h-r+1)\,U_2'^{r},$$

der in der Regel von der Nulle verschieden ist, woraus dann folgt, dass der Werth von $W^{(r)}$ ein endlicher sei. Die Formeln, die sich früher für eine Differentialgleichung mit Coefficienten, wie $ax+b$ ergeben haben, bestehen also ungeändert auch hier, nur werden die Werthe von $W', W'', \ldots\ldots$ andere, durch andere Gleichungen gegebene. Zu ihrer Aufstellung in passender, die Übersicht erleichternder Gestalt, welche auch die Bildung der Allgemeinen r^{ten} unter ihnen durch ein einfaches geregeltes Verfahren möglich macht, schreiten wir in folgender Weise: Wir ordnen die zur Bestimmung von $W^{(r+1)}$ dienende Gleichung, d. h. die:

$$(U_0 W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1}(U_1 W)^{(r+1)} + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(r+1)(r+2)}(U_2 W)^{(r+2)} = 0 \tag{334}$$

nach den darin vorkommenden Differentialquotienten von W, indem wir $(U_0 W)^{(r)}$, $(U_1 W)^{(r+1)}$, $(U_2 W)^{(r+2)}$ vermittelst der bekannten Formel entwickeln. Die auf solche Art erhaltene Gleichung:

$$
\begin{aligned}
0 = &- (h-r)\, U'_2 \,.\, W^{(r+1)} + \\
&+ \left[U_0 + (h-r)\, U'_1 + \frac{(h-r)(h-r-1)}{1\,.\,2}\, U''_2\right] W^{(r)} + \\
&+ r \left[U'_0 + \frac{h-r}{2}\, U''_1 + \frac{(h-r)(h-r-1)}{2\,.\,3}\, U'''_2\right] W^{(r-1)} + \\
&+ \binom{r}{2} \left[U''_0 + \frac{h-r}{3}\, U'''_1 + \frac{(h-r)(h-r-1)}{3\,.\,4}\, U^{IV}_2\right] W^{(r-2)} + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \binom{r}{s} \left[U^{(s)}_0 + \frac{h-r}{s+1}\, U^{(s+1)}_1 + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(s+1)(s+2)}\, U^{(s+2)}_2\right] W^{(r-s)} + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \binom{r}{2} \left[U^{(r-2)}_0 + \frac{h-r}{r-1}\, U^{(r-1)}_1 + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(r-1)\, r}\, U^{(r)}_2\right] W'' + \\
&+ r \left[U^{(r-1)}_0 + \frac{h-r}{r}\, U^{(r)}_1 + \frac{(h-r)(h-r-1)}{r\,(r+1)}\, U^{(r+1)}_2\right] W' + \\
&+ \left[U^{(r)}_0 + \frac{h-r}{r+1}\, U^{(r+1)}_1 + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(r+1)(r+2)}\, U^{(r+2)}_2\right] W
\end{aligned}
\tag{335}
$$

verwandeln wir durch die folgenden, für beliebige r und s zu gelten bestimmten Bezeichnungen

$$
\begin{aligned}
(h-r)\, U'_2 &= h \underset{*}{-} r \\
U_0 + (h-r)\, U'_1 + \frac{(h-r)(h-r-1)}{1\,.\,2}\, U''_2 &= h \overset{*}{-} r \\
r\left[U'_0 + \frac{h-r}{2}\, U'' + \frac{(h-r)(h-r-1)}{2\,.\,3}\, U'''_2\right] &= h \overset{*'}{-} r \\
\binom{r}{2}\left[U''_0 + \frac{h-r}{3}\, U'''_1 + \frac{(h-r)(h-r-1)}{3\,.\,4}\, U^{IV}_2\right] &= h \overset{*''}{-} r \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\binom{r}{s}\left[U^{(s)}_0 + \frac{h-r}{s+1}\, U^{(s+1)}_1 + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(s+1)(s+2)}\, U^{(s+2)}_2\right] &= h \overset{*^{(s)}}{-} r \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}
\tag{336}
$$

in die sehr einfach aussehende:

$$
\begin{aligned}
h \underset{*}{-} r \,.\, W^{(r+1)} = {} & h \overset{*}{-} r \,.\, W^{(r)} + h \overset{*'}{-} r \,.\, W^{(r-1)} + h \overset{*''}{-} r \,.\, W^{(r-2)} + \cdots\cdots \\
& + h \overset{*^{(p)}}{-} r \,.\, W^{(r-p)} + \cdots + h \overset{*^{(r-2)}}{-} r \,.\, W'' + h \overset{*^{(r-1)}}{-} r \,.\, W' + h \overset{*^{(r)}}{-} r \,.\, W
\end{aligned}
\tag{337}
$$

Aus ihr gewinnen wir sodann die den speciellen Annahmen $r = 0, 1, 2, \ldots\ldots, r, r +$
sprechenden:

$$
\begin{aligned}
\underset{*}{h}\quad . \ W' &= \overset{*}{h} . W \\
\underset{*}{h-1} . W'' &= \overset{*}{h-1} . W' + \overset{*}{h-1} . W \\
\underset{*}{h-2} . W''' &= \overset{*}{h-2} . W'' + \overset{*'}{h-2}\ W' + \overset{*''}{h-2} . W \qquad (338)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\underset{*}{h-r} . W^{(r+1)} &= \overset{*}{h-r} . W^{(r)} + \overset{*'}{h-r} . W^{(r-1)} + \overset{*''}{h-r} . W^{(r-2)} + \dots\dots + \overset{*^{(r)}}{h-r} . W \\
h-\underset{*}{r}-1 . W^{(r+1)} &= h-\overset{*}{r}-1 . W^{(r+1)} + h-\overset{*'}{r}-1 . W^{(r)} + h-\overset{*''}{r}-1 . W^{(r-1)} + \dots\dots + h-\overset{*^{(r+1)}}{r}-1 . W.
\end{aligned}
$$

Die zweite von ihnen gibt, mit $\underset{*}{h}$ multiplizirt, und sodann mit der ersten durch Elimination von W' verknüpft, W'' in Function von W:

$$
\underset{*}{h} . \underset{*}{h-1} . W'' = [\overset{*}{h} . \overset{*}{h-1} + \underset{*}{h} . \overset{*'}{h-1}] . W, \qquad (339)
$$

ebenso liefert die dritte, mit $\underset{*}{h} . \underset{*}{h-1}$ multiplizirt, nach bewerkstelligter Elimination von W' und W'' vermittelst der ersten und zweiten, oder auch vermittelst der ersten und der (339) einen Ausdruck für W''':

$$
\underset{*}{h} . \underset{*}{h-1} . \underset{*}{h-2} . W''' = [\overset{*}{h} . \overset{*}{h-1} . \overset{*}{h-2} + \underset{*}{h} . \overset{*'}{h-1} . \overset{*}{h-2} + \overset{*}{h} . \underset{*}{h-1} . \overset{*'}{h-2} + \underset{*}{h} . \underset{*}{h-1} . \overset{*''}{h-2}]\ W. \qquad (340)
$$

In ähnlicher Weise wird auch W^{IV} dem W proportional gefunden:

$$
\underset{*}{h} . \underset{*}{h-1} . \underset{*}{h-2} . \underset{*}{h-3} . W^{IV} = \left[
\begin{array}{l}
\quad \overset{*}{h} . \overset{*}{h-1} . \overset{*}{h-2} . \overset{*}{h-3} + \underset{*}{h} . \overset{*'}{h-1} . \overset{*}{h-2} . \overset{*}{h-3} + \\
+ \overset{*}{h} . \underset{*}{h-1} . \overset{*'}{h-2} . \overset{*}{h-3} + \overset{*}{h} . \overset{*}{h-1} . \underset{*}{h-2} . \overset{*'}{h-3} + \\
+ \underset{*}{h} . \underset{*}{h-1} . \overset{*''}{h-2} . \overset{*}{h-3} + \underset{*}{h} . \overset{*'}{h-1} . \underset{*}{h-2} . \overset{*'}{h-3} + \\
+ \overset{*}{h} . \underset{*}{h-1} . \underset{*}{h-2} . \overset{*''}{h-3} + \underset{*}{h} . \underset{*}{h-1} . \underset{*}{h-2} . \overset{*'''}{h-3}
\end{array}
\right] W \qquad (341)
$$

und nun sind wir bereits im Stande der unmittelbaren Ansicht der Gleichungen (339), (340) und (341) folgendes graphische Verfahren zur Construction der allgemeinen Formel für $W^{(r)}$ zu entnehmen:

Man schreibe die Factorielle:

$$
h . h-1 . h-2 . h-3 \dots\dots\dots h-r+1
$$

so oft additiv auf, als die Zahl 2^{r-1} Einheiten in sich enthält und bezeichne im ersten Gliede des so erhaltenen, die Gestalt einer Produktensumme tragenden Ausdruckes sämmtliche Factoren oben mit einem Stern. Das so gewonnene erste Glied ist:

$$
\overset{*}{h} . \overset{*}{h-1} . \overset{*}{h-2} . \overset{*}{h-3} \dots\dots\dots h-\overset{*}{r}+1.
$$

In den darauffolgenden Gliedern, $r-1$ an der Zahl, versehe man Einen der Factoren, ausschliesslich des letzten, unten mit einem Sterne, und diess zwar auf alle möglichen Arten, dabei als

allgemeine Regel festhaltend, dass der letzte Factor niemals unten, sondern nur stets oben besternt werden dürfe. Die übrigen Factoren $r-1$ an der Zahl erhalten oben Sterne und der auf den unten besternten unmittelbar folgende noch überdiess einen Accent. Die in dieser Weise erhaltenen $r-1$ Glieder sehen so aus:

$$\underset{*}{h} \,.\, \overset{*'}{h-1} \,.\, \overset{*}{h-2} \,.\, \overset{*}{h-3} \ldots\ldots\ldots \overset{*}{h-r+2} \,.\, \overset{*}{h-r+1}$$

$$\overset{*}{h} \,.\, \underset{*}{h-1} \,.\, \overset{*'}{h-2} \,.\, \overset{*}{h-3} \ldots\ldots\ldots \overset{*}{h-r+2} \,.\, \overset{*}{h-r+1}$$

$$\overset{*}{h} \,.\, \overset{*}{h-1} \,.\, \underset{*}{h-2} \,.\, \overset{*'}{h-3} \ldots\ldots\ldots \overset{*}{h-r+2} \,.\, \overset{*}{h-r+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{*}{h} \,.\, \overset{*}{h-1} \,.\, \overset{*}{h-2} \,.\, \overset{*}{h-3} \ldots\ldots\ldots \underset{*}{h-r+2} \,.\, \overset{*'}{h-r+1}$$

In den darauf kommenden $\frac{(r-1)(r-2)}{2}$ Gliedern füge man auf alle möglichen Weisen zu zweien der Factoren unten einen Stern, diess jedoch, wie schon gesagt, mit Ausnahme des letzten, der nie unten besternt werden darf. Alle andern $r-2$ an der Zahl bekommen oben Sterne und noch überdiess diejenigen unter ihnen, die auf einen einzeln stehenden, unten besternten folgen, einen Accent, und die auf zwei neben einanderstehende, unten besternte unmittelbar kommenden einen Doppelaccent. Die so gewonnenen Glieder sind der Form nach:

$$\underset{*}{h} \,.\, \underset{*}{h-1} \,.\, \overset{*''}{h-2} \,.\, \overset{*}{h-3} \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{*}{h-r+1}$$

$$\underset{*}{h} \,.\, \overset{*'}{h-1} \,.\, \underset{*}{h-2} \,.\, \overset{*'}{h-3} \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{*}{h-r+1}$$

$$\overset{*}{h} \,.\, \underset{*}{h-1} \,.\, \underset{*}{h-2} \,.\, \overset{*''}{h-3} \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{*}{h-r+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{*}{h} \,.\, \overset{*}{h-1} \,.\, \overset{*}{h-2} \,.\, \overset{*}{h-3} \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{*''}{h-r+1}$$

Hierauf bilde man $\frac{(r-1)(r-2)(r-2)}{2.3}$ neue Glieder aus den folgenden Produkten, indem man dreien der dem letzten vorangehenden Factoren auf alle möglichen Arten Sterne unten verleiht, und die übrigen mit solchen oben bezeichnet, überdiess aber noch einem jeden oben besternten, der einem einzelnen unten besternten unmittelbar nachfolgt, Einen Accent, einem jeden auf zwei aneinanderliegende unten besternte folgenden zwei Accente, und einem jeden, der auf drei unten besternte unmittelbar kommt, drei Accente hinzufügt. So fährt man fort, bis endlich nur ein einziges Glied übrig ist, dessen dem letzten vorangehende Factoren sämmtlich unten besternt werden, der letzte aber einen Stern oben mit Accenten $r-1$ an der Zahl erhält. Die Gesammtzahl aller durch dieses combinatorisch-graphische Verfahren erhaltenen Glieder ist offenbar:

$$1 + r - 1 + \frac{(r-1)(r-2)}{2} + \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3} + \ldots\ldots\ldots + 1 = 2^{r-1},$$

wie wir oben sagten, und ihre Summe gibt mit W multiplizirt den Werth von:

$$\underset{*}{h} . \underset{*}{h}-1 . \underset{*}{h}-2 . \underset{*}{h}-3 \ldots\ldots \underset{*}{h}-r+1 . W^{(r)} = h(h-1)(h-2)(h-3) \ldots\ldots (h-r+1)\, U_{*}^{\prime r} . W^{(r)}.$$

Bezeichnen wir also die auf solche Weise gebildete 2^{r-1}-gliedrige Produktensumme durch das Symbol:

$$[h . h-1 . h-2 . h-3 \ldots\ldots\ldots h-r+1]^{*}$$

so besteht für jedes r die Gleichung:

$$\underset{*}{h} . \underset{*}{h}-1 . \underset{*}{h}-2 . \underset{*}{h}-3 \ldots\ldots \underset{*}{h}-r+1 . W^{(r)} = [h . h-1 . h-2 . h-3 \ldots\ldots h-r+1]^{*} . W,$$

in der wieder als specielle Fälle enthalten sind die, für $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ aus ihr hervorgehenden:

$$\underset{*}{h} . W' = [h]^{*} W$$

$$\underset{*}{h} . \underset{*}{h}-1 . W'' = [h . h-1]^{*} W$$

$$\underset{*}{h} . \underset{*}{h}-1 . \underset{*}{h}-2 . W''' = [h . h-1 . h-2]^{*} . W$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Um die Allgemeinheit dieses für $r = 1, 2, 3$ und 4 durch die Formeln (339), (340) und (341) gerechtfertigten Verfahrens darzuthun, dient der gewöhnliche Inductionsbeweis. Man kann nämlich zeigen, dass, wenn dasselbe W', W'', W''', ... $W^{(r)}$ richtig angibt, es auch $W^{(r+1)}$ ebenso richtig liefere. Hiezu mag die Formel (337) dienen, deren Richtigkeit unbezweifelt ist, und diess zwar auf folgende Weise: Angenommen, die in eben angedeuteter Weise gefundenen Werthe von W', W'', W''', ... $W^{(r)}$ seien alle richtig und man sucht $W^{(r+1)}$ dazu vermittelst der ebenfalls ganz exacten Gleichung (337), so wird auch dieses vollkommen verlässlich sein. Können wir nun darthun, dass unser combinatorisch-graphisches Verfahren denselben Werth von $W^{(r+1)}$ liefere, den auch die (337) gibt, so ist seine Giltigkeit für die nächst höhere Zahl $r+1$ und dadurch eben auch allgemein bewiesen. Um nun die (337) dazu verwenden zu können, multipliziren wir sie mit $\underset{*}{h} . \underset{*}{h}-1 . \underset{*}{h}-2 \ldots \underset{*}{h}-r+1$, und erhalten:

$$\begin{aligned}\underset{*}{h} . \underset{*}{h}-1 . \underset{*}{h}-2 \ldots \underset{*}{h}-r+1 . \underset{*}{h}-r . W^{(r+1)} = {} & \underset{*}{h} . \underset{*}{h}-1 . \underset{*}{h}-2 \ldots\ldots \underset{*}{h}-r+2 . \underset{*}{h}-r+1 . \overset{*}{h}-r . W^{(r)} + \\ & + \underset{*}{h} . \underset{*}{h}-1 . \underset{*}{h}-2 \ldots\ldots \underset{*}{h}-r+2 . \underset{*}{h}-r+1 . \overset{*'}{h}-r . W^{(r-1)} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \underset{*}{h} . \underset{*}{h}-1 \ldots \underset{*}{h}-r+p+1 . \underset{*}{h}-r+p \ldots \underset{*}{h}-r+1 . \overset{*(p)}{h}-r . W^{(r-p)} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \underset{*}{h} . \underset{*}{h}-1 . \underset{*}{h}-2 \ldots\ldots \underset{*}{h}-r+2 . \underset{*}{h}-r+1 . \overset{*(r)}{h}-r . W\end{aligned}$$

sodann führen wir die Werthe aus den (342) und (343) ein und gewinnen:

$$\underset{*}{h}.\underset{*}{h-1}.\underset{*}{h-2}\ldots\underset{*}{h-r+1}.\underset{*}{h-r}.\mathrm{W}^{(r+1)}=\left[\begin{array}{l}[h.h-1.h-2\ldots\ldots h-r+2.h-r+1]^{*}.\overset{*}{h-r}+\\ +[h.h-1.h-2\ldots\ldots h-r+2]^{*}\underset{*}{h-r+1}.\overset{*'}{h-r}+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +[h.h-1\ldots h-r+p+1]^{*}.\underset{*}{h-r+p}\ldots\underset{*}{h-r+1}.\overset{*(p)}{h-r}+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\underset{*}{h}.\underset{*}{h-1}.\underset{*}{h-2}\ldots\ldots\underset{*}{h-r+2}.\underset{*}{h-r+1}.\overset{*(r)}{h-r}\end{array}\right]\mathrm{W}$$

eine kraft der gemachten Voraussetzungen exacte Formel. Mit ihr stimmt aber auch das Resultat der combinatorisch-graphischen Bildungsweise Glied für Glied überein, weil sich leicht einsehen lässt, dass es zu demselben allgemeinen Gliede:

$$[h.h-1\ldots\ldots h-r+p+1]^{*}.\underset{*}{h-r+p}\ldots\ldots\underset{*}{h-r+2}.\underset{*}{h-r+1}.\overset{*(p)}{h-r},$$

und folglich auch zu derselben Summe führe. In der That ist dieses allgemeine Glied eigentlich der Inbegriff aller derjenigen, die den gemeinschaftlichen Factor $\overset{*(p)}{h-r}$ besitzen. Accente aber p an der Zahl bekommt ein Factor nur dann, wenn ihm p an der Zahl, nicht mehr und auch nicht weniger, untenbesternte Factoren unmittelbar vorangehen. Es hängt also allen diesen Gliedern in Folge der Art, wie sie gebildet werden, offenbar der Factor:

$$\underset{*}{h-r+p}\ldots\ldots\ldots\ldots\underset{*}{h-r+1}.\overset{*(p)}{h-r}$$

an, und überdiess muss der ihnen unmittelbar Vorangehende $h-r+p+1$ nothwendig oben besternt sein, weil sonst der letzte $h-r$ mehr als p Accente erhalten würde. Unter dieser einzigen Beschränkung nun werden die sämmtlichen dem vor Augen liegenden gemeinschaftlichen vorangehenden Factoren jede mögliche ihnen nach der Natur des Verfahrens zukommende Art der Besternung und Accentuirung tragen können. Es wird also offenbar dieser gemeinschaftliche Factor mit der ganzen, durch:

$$[h.h-1.h-2\ldots\ldots\ldots\ldots h-r+p+1]^{*}$$

angedeuteten Produktensumme multiplizirt erscheinen, wodurch die Identität der beiden in Rede stehenden Resultate und zugleich die allgemeine Giltigkeit der für $\mathrm{W}^{(r)}$ gebauten Formel erwiesen ist.

Mit Hilfe der so ermittelten Coefficientenwerthe lässt sich nun der den particulären Integralen der Gestalt nach im Allgemeinen zukommende Werth (319) in der folgenden für Differentialgleichungen von beliebiger Ordnung mit quadratischen Coefficienten, so lange keine wiederholte Wurzel α der Gleichung $U_2=0$ vorhanden ist, geltenden Form wiedergeben:

$$y=\mathrm{W}e^{\alpha x}x^{h}\left[1+\frac{h^{*}}{1}.\frac{1}{\mathrm{U}'_2 x}+\frac{[h.h-1]^{*}}{1.2}\frac{1}{(\mathrm{U}'_2 x)^2}+\frac{[h.h-1.h-2]^{*}}{1.2.3}\frac{1}{(\mathrm{U}'_2 x)^3}+\right.$$

$$(344)\qquad \left.+\ldots\ldots\ldots+\frac{[h.h-1\ldots\ldots h-p+1]^{*}}{1.2\ldots\ldots p}\frac{1}{(\mathrm{U}'_2 x)^p}+\ldots\ldots\right]$$

und hieraus das allgemeine Integral durch Substitution aller dem α und h zukommenden Werthe und Addition der Substitutionsresultate ableiten.

Auch hier kann bemerkt werden, dass der Werth von h manchmal ein ganzer positiver sei, viel öfter aber durch schickliche Wahl der in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen constanten Parameter in einen solchen verwandelt werden könne, und diess zwar auf unendlich viele verschiedene Weisen. Unter solchen Umständen schiene nun die in der Formel (344) enthaltene eingeklammerte Reihe, so wie diejenige, welche sich in der (319) befindet, abzubrechen; dem ist aber nur bedingungsweise so. Denn es ist zwar richtig, dass, wenn h der ganzen positiven Zahl r gleicht, das in dem Werthe von y vorfindige Glied $\frac{h(h-1)\ldots(h-r)}{1.2\ldots(r+1)}\,x^{h-r-1}\,W^{(r+1)}$ den verschwindenden Factor $h-r$ bekommt, der auch bei allen folgenden ist; sie würden also sämmtlich wegfallen, wenn $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$ ... endliche Werthe hätten; nun betrachte man aber die Gleichung (329) und fasse in derselben das Glied mit x^{h-r+1} ins Auge. Sein Coefficient, der Nulle gleich gesetzt, bestimmt $W^{(r)}$. Der von x^{h-r} verwandelt sich wegen $h=r$ einfacher Weise in $(U_0 W)^{(r)}$, kann also, der Nulle gleichgesetzt, zur Bestimmung von $W^{(r+1)}$ nicht benützt werden, weil er diese Grösse nicht enthält; er wird also abermals $W^{(r)}$ bestimmen und wird dafür einen anderen analytischen Ausdruck geben, als die vorige Gleichung. Sind nun diese Ausdrücke für $W^{(r)}$ trotz ihrer analytischen Verschiedenheit, dem Zahlenwerthe nach nicht identisch gleich, so liegt ein Widerspruch vor, und will man diesen vermeiden, so ist man genöthigt durch Gleichstellung der zwei für diesen Reihencoefficienten gewonnenen Ausdrücke eine Bedingungsgleichung zwischen den constanten Parametern der Differentialgleichung festzusetzen. Das darauffolgende Glied mit x^{h-r-1} und alle nach demselben kommenden verschwinden dann von selbst in Folge des gemeinschaftlichen Factors $h-r$, und wir sehen, dass auch bei Differentialgleichungen mit quadratischen Coefficienten geschlossene Formen, wie die (324) als particuläre Integrale auftauchen können, aber nicht mehr unter der einzigen Bedingung, dass h gleich einer ganzen, positiven Zahl r sei, sondern unter zweien, von denen die erste noch immer $h=r$ ist, die andere aber mit der ganzen Zahl r variirt. Zu einem Ausdrucke in Gleichungsform dieser letzten Bedingung gelangen wir am besten, bedenkend, dass, weil in der (334), oder in der daraus durch Entwicklung erhaltenen (335) der Coefficient von $W^{(r+1)}$ in die Nulle übergeht, während gleichwohl die eben zur Bestimmung dieses $W^{(r+1)}$ im Allgemeinen dienen sollende, jetzt aber diesen Dienst versagende (335) erfüllt sein muss, der hieraus gezogene allgemeine Werth von $W^{(r+1)}$ nothwendig unter der Form $\frac{0}{0}$, also unbestimmt erscheinen müsse, wenn wirklich ein Abbrechen der Reihe Platz greifen soll. Es ist also die Bedingungsgleichung des Abbrechens folgende:

$$[h\ .\ h-1\ .\ h-2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ h-r]^* = 0. \qquad ($$

Abbrechen wird daher namentlich die Reihe bei dem ersten Gliede, und es erscheint ein particuläres Integral, das eine reine Exponentielle $e^{\alpha x}$ ist, wenn seinem α ein $h=-\frac{U_1}{U'_2}=0$ angehört, und wenn zugleich:

$$h^* = U_0 + hU'_1 + \frac{h(h-1)}{2}\,U''_2 = U_0 = 0 \qquad ($$

ist, also, wenn U_0, U_1 und U_2 den Factor $x-\alpha$ gemeinschaftlich besitzen, eine An
deren Richtigkeit man sich auch durch die bereits an mehreren Orten, und namentlich Se
ersten Bandes benützte Betrachtungsweise alsogleich überzeugen kann.

Bei dem zweiten Gliede bricht die Reihe ab und liefert ein particuläres Inte
$e^{\alpha x}(Ax+B)$, wenn für dieses α das $h=-\frac{U_1}{U'_2}=1$ ausfällt, d. h. wenn $U_1=-U'_2$
überdiess:

$$[h\,.\,h-1]^* = \overset{*}{h}\,h\overset{*}{-}1 + \underset{*}{h}\,h\overset{*'}{-}1 = U_0^2 + U_0 U'_1 + U'_0 U'_2 = 0 \tag{347}$$

wird, oder was dasselbe ist, wenn man:

$$\left(\frac{U_1}{U_0}\right)' = -1 \tag{348}$$

hat. Es lässt sich hier gleich die Bemerkung anfügen, dass diese Bedingungsgleichung zwar
zige scheine, zu erfüllen durch die constanten Parameter der Differentialgleichung, dass s
der Regel in deren mehrere zerlegt werden kann, was schon aus dem Umstande ersichtlich
sie eben diese Parameter in zwei Dimensionen enthält.

Bei dem dritten Gliede bricht die Reihe ab, und liefert ein particuläres Inte
$e^{\alpha x}[Ax^2+Bx+C]$, wenn $h=2$ und:

$$\begin{aligned}[h\,.\,h-1\,.\,h-2]^* &= \overset{*}{h}\,.\,h\overset{*}{-}1\,.\,h\overset{*}{-}2 + \underset{*}{h}\,.\,h\overset{*'}{-}1\,.\,h\overset{*}{-}2 + \overset{*}{h}\,.\,h\underset{*}{-}1\,.\,h\overset{*'}{-}2 + \underset{*}{h}\,.\,h\underset{*}{-}1\,. \\ &= U_0^3 + 3U_0^2 U'_1 + U_0^2 U''_2 + 3U_0 U'_0 U'_2 + 2U_0 U_1'^2 + U_0 U'_1 U''_2 + U_0 U''_1 U'_2 \\ &\quad + 2U'_0 U'_1 U'_2 + U'_0 U'_2 U''_2 + 2U''_0 U_2'^2 = 0\end{aligned} \tag{349}$$

besteht. In dieser Bedingungsgleichung erscheinen die Parameter bereits in drei Dimens
sind in der Regel noch mehr Zerlegungsweisen derselben denkbar und überhaupt wird di
ser Letzteren zunehmen mit der ganzen Zahl $h=r$ und die darauf bezügliche Beding
des Abbrechens die in Rede stehenden Parameter in r Dimensionen enthalten.

Wir schliessen hieraus, dass Differentialgleichungen, wie diejenige, die
dieser unserer Untersuchung ist, mit quadratischen Coefficienten nämlich, auch ges
culäre Integrale zulassen, und zwar kommt Ein solches vor unter unzähligen Bedingu
mehr, um genauer zu sprechen, unter unzähligen Paaren von solchen, weil zwei er
zu gleicher Zeit. Von ihnen besagt die erste jedesmal, dass der Differentiationsindex l
cher offenbar im Allgemeinen eine Function ist der constanten Parameter, die sich i
gleichung vorfinden, eine übrigens beliebige ganze positive Zahl sein müsse; die and
Form (345) enthalten, und gestattet in der Regel eine Zerlegung in deren mehrere.
Anzahl vorhandene, je grösser der ganze und positive dem h ertheilte Werth ist.
der in der (345) enthaltenen Bestandgleichungen nebst der $h=r$ erfüllt ist,
$W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$, $W^{(r+3)}$, ... und sohin auch W einen unbestimmten Werth,

ticulären Integrale vorausgesetzte Form (327) für alle diejenigen Functionen W Genüge zu leisten die Eigenschaft besitzt, die in den r ersten Differentialquotienten übereinstimmen und von welchen die einfachste das folgende nach aufsteigenden Potenzen von $u-\alpha$ geordnete algebraische Polynom sein wird:

$$W + W'(u-\alpha) + W'' \frac{(u-\alpha)^2}{2} + \dots\dots\dots + W^{(r)} \frac{(u-\alpha)^r}{2 \dots r}.$$

Im Falle dass keine der Bedingungsgleichungen erfüllt sein sollte, und sohin gar kein Abbrechen Statt fände, was entweder für solche h vorkommt, die keine ganzen positiven Zahlen sind, oder auch für ganze positive h vorkommen kann, erscheint das particuläre Integral in der Gestalt eines Produktes aus einer Exponentielle, wie $e^{\alpha x}$, in eine unendliche Reihe, die, wenn h gebrochen oder negativ ausfallen sollte, keine Erscheinung darbietet, die besonders zu besprechen wäre. Für ganze und positive h jedoch erscheint der Werth von $W^{(r+1)}$ unendlich, ohne dass desshalb die in dem Ausdrucke für y vorhandenen Coefficienten unendliche Werthe bekommen, und es erleichtert für diesen Fall die festgestellte Thatsache des von selbst Abbrechens der Reihe bei erfüllter Bedingungsgleichung die Berechnung der weiteren Reihencoefficienten. In der That, nachdem die (335), wenn auch nicht für $W^{(r+1)}$, welches unendlich wird, doch wenigstens für das als Reihencoefficient vorkommende Produkt:

$$h\,(h-1)\,(h-2) \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (h-r)\,.\,W^{(r+1)}$$

einen endlichen Werth gegeben hat, wenden wir uns zu der letzten der Gleichungen (338), d. h. zur:

$$h-\underset{*}{r}-1\,.\,W^{(r+2)} = h-\overset{*}{r}-1\,.\,W^{(r+1)} + h-\overset{*'}{r}-1\,.\,W^{(r)} + h-\overset{*''}{r}-1\,.\,W^{(r-1)} + \dots\dots + h-\overset{*(r+1)}{r}-1\,.\,W,$$

multipliziren sie mit $\underset{*}{h}\,.\,h\underset{*}{-}1 \dots\dots h\underset{*}{-}r$, welches wegen $h\underset{*}{-}r = (h-r)\,U'_2 = 0$ eine verschwindende Grösse ist, und gewahren, dass dadurch das erste Glied im zweiten Theile der vorliegenden Gleichung in einen von Null verschiedenen Werth, alle übrigen dagegen in Null übergehen, so dass wir erhalten:

$$\underset{*}{h}\,.\,h\underset{*}{-}1 \dots\dots h-\underset{*}{r}-1\,.\,W^{(r+2)} = [h\,.\,h-1\,.\,h-2 \dots\dots h-r]^{*}\,h-\overset{*}{r}-1\,.\,W.$$

Aus derjenigen Formel ferner, in die sich die (350) verwandelt, wenn man in derselben $r+1$ anstatt r setzt, d. h. aus der:

$$h-\underset{*}{r}-2\,.\,W^{(r+3)} = h-\overset{*}{r}-2\,.\,W^{(r+2)} + h-\overset{*'}{r}-2\,.\,W^{(r+1)} + h-\overset{*''}{r}-2\,.\,W^{(r)} + \dots\dots + h-\overset{*(r+2)}{r}-2\,.\,W,$$

gewinnen wir durch Multiplication mit dem verschwindenden Produkte $\underset{*}{h}\,.\,h\underset{*}{-}1 \dots h\underset{*}{-}r\,.\,h-\underset{*}{r}-1$ und Weglassung der darnach in die Nulle übergehenden Glieder:

$$\begin{aligned}\underset{*}{h}\,.\,h\underset{*}{-}1 \dots\dots h-\underset{*}{r}-2\,.\,W^{(r+3)} &= [h\,.\,h-1\,.\,h-2 \dots\dots h-r]^{*}\,.\,h-\overset{*}{r}-1\,.\,h-\overset{*}{r}-2\,.\,W + \\ &+ [h\,.\,h-1\,.\,h-2 \dots\dots h-r]^{*}\,.\,h-\underset{*}{r}-1\,.\,h-\overset{*'}{r}-2\,.\,W = \\ &= [h\,.\,h-1\,.\,h-2 \dots\dots h-r]^{*}\,[h-r-1\,.\,h-r-2]^{*}\,.\,W,\end{aligned}$$

Genau auf demselben Wege gelangen wir ferner zu:

$$\underset{*}{h}\,.\,\underset{*}{h-1}\;\ldots\ldots\;h-\underset{*}{r}-3\,.\,\mathrm{W}^{(r+4)}=\left[h.h-1.h-2\;\ldots\ldots\;h-r\right]^{*}\left[h-r-1.h-r-2.h-r-3\right]^{*}.\,\mathrm{W}$$

und allgemein:

$$\underset{*}{h}\,.\,\underset{*}{h-1}\;\ldots\;h-\underset{*}{r}-p+1\;\mathrm{W}^{(r+p)}=\left[h.h-1\;\ldots\ldots\;h-r\right]^{*}\left[h-r-1.h-r-2\;\ldots\ldots\;h-r-p+1\right]^{*}.\,\mathrm{W}$$

Diess gibt die folgende, an die Stelle der (344) tretende, und für den Fall des Nichtabbrechens, ungeachtet der ganzen und positiven Beschaffenheit von $h=r$, die Rechnung erleichternde Formel für y

$$(351)\quad y=\mathrm{W}e^{\alpha x}\left[\begin{array}{l} x^{h}+\frac{\overset{*}{h}}{1}\cdot\frac{x^{h-1}}{\mathrm{U}'_2}+\frac{[h.h-1]^{*}}{1.2}\cdot\frac{x^{h-2}}{\mathrm{U}'^{2}_2}+\frac{[h.h-1.h-2]^{*}}{1.2.3}\cdot\frac{x^{h-3}}{\mathrm{U}'^{3}_2}+\ldots+\frac{[h.h-1\ldots h-r+1]^{*}}{1\ldots r.\mathrm{U}'^{r}_2}+ \\ +\frac{[h.h-1\ldots h-r]^{*}}{1.2\ldots(r+1)}\cdot\frac{1}{\mathrm{U}'^{r}_2}\left[\frac{1}{\mathrm{U}'_2x}+\frac{h-\overset{*}{r}-1}{r+2}\cdot\frac{1}{(\mathrm{U}'_2x)^{2}}+\frac{[h-r-1.h-r-2]^{*}}{(r+2)(r+3)}\cdot\frac{1}{(\mathrm{U}'_2x)^{3}}+\ldots\right] \end{array}\right]$$

Es wird, wie man hier sieht, in zwei Theilen gebothen, von denen der erste ein Produkt ist aus einer Exponentialgrösse in eine ganze Function von x des $h=r^{\text{ten}}$ Grades, der andere dagegen ein Produkt aus derselben Exponentialgrösse in eine nach absteigenden Potenzen von x geordnete unendliche Reihe, und dieser zweite Theil ist es, der bei erfüllter Bedingungsgleichung des Abbrechens, welche eben die:

$$\left[h\;.\;h-1\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;h-r\right]^{*}=0$$

ist, die Nulle zum Coefficienten erhält und desshalb wegfällt:

Wiewohl die Anzahl der Bedingungen, unter welchen geschlossene Formen der particulären Integrale zu erscheinen vermögen, unendlich ist, so ist doch die geschlossene Form nur der specielle Fall, die Ausnahme von der Regel, während die nach absteigenden Potenzen von x geordnete unendliche Reihe der allgemeine Fall, die Regel ist. Nun sind aber unendliche Reihen zur Darstellung der Functionen nur dann von wirklichem Nutzen, wenn wir, dieselben bei irgend einem Gliede willkührlich abbrechend, einen angenäherten Werth der Function selbst erhalten. Unser particuläres Integral y ist also eine solche in Reihenform erhaltene Function von x. Als unbegrenzter analytischer Ausdruck betrachtet, leistet sie alles, was von ihr verlangt wird, d. h. sie erfüllt die Differentialgleichung. Bricht man aber die Reihe willkührlich ab bei irgend einem Gliede, so wird das auf solche Weise gekürzte y offenbar die Genüge leistende Function nicht mehr in aller Strenge, sondern höchstens annäherungsweise wieder geben können, und das Substitutionsresultat wird daher auch nicht Null, sondern eben so, wie das hineingesetzte y, ein Produkt sein aus einer Exponentialgrösse in ein nach absteigenden Potenzen von x geordnetes geschlossenes Polynom, von dessen Beschaffenheit die practische Brauchbarkeit des gekürzten Werthes von y abhängig ist. Liegen nämlich die Werthe, die eben dieses Substitutionsresultat für solche x anzunehmen vermag, die nicht ausser dem Bereiche der Untersuchung sind, die zu der Differentialgleichung geführt hat, nahe genug an einander und an Null, so besitzen wir auch ein y im genügenden Grade der Annäherung, wo nicht, so hat man das y ent-

weder in einer grösseren Anzahl von Anfangsgliedern zu bestimmen, oder, so diess nichts frommen sollte, in einer anderen Form aufzusuchen. Bei einem jeden in Reihenform erscheinenden und willkührlich bei irgend einem, etwa dem r^{ten} Gliede abgebrochenen particulären Integrale wird man sich daher noch die doppelte Frage zu stellen haben:

Erstens: Liegt das Substitutionsresultat der Nulle nahe genug, oder, präciser gesprochen, für welche x nähert es sich genügend dem Verschwinden, und

Zweitens: Zwischen welchen, nahe genug aneinander liegenden Grenzen befindet sich der wahre, wirklich Genüge leistende Functionswerth?

Nachdem nun solchergestalt die Kenntniss des Substitutionsresultates unumgänglich nothwendig ist, wollen wir dasselbe aus seinem allgemeinen Ausdruck (329) abzuleiten suchen, unter der Voraussetzung, dass durch schickliche Wahl der α, h, W', W'', ... $W^{(r)}$ aus den hiefür aufgestellten Gleichungen Anfangsglieder desselben $r+2$ an der Zahl zum Verschwinden gebracht sind, man aber die $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$, ... dermassen nicht mehr dazuzurechnen beabsichtige, dass auch die folgenden Glieder identisch der Nulle gleich werden, es vielmehr vorziehe, sie sämmtlich zu ersetzen durch Null, was darauf hinauskommt, dem y willkührlich den geschlossenen Werth:

$$y = We^{ax}x^{h}\left[1 + \frac{\overset{*}{h}}{1}\cdot\frac{1}{U'_2 x} + \frac{\overset{*}{[h.h-1]}}{1.2}\cdot\frac{1}{(U'_2 x)^2} + \cdots\cdots + \frac{\overset{*}{[h.h-1\ldots h-r+1]}}{1.2\ldots r}\cdot\frac{1}{(U'_2 x)^r}\right]$$

zu ertheilen. Das offenbar nicht verschwindende Substitutionsresultat, welches wir mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen wollen, erscheint zunächst in folgender Gestalt:

$$\mathfrak{S} = e^{ax}\left[\begin{array}{l}
\frac{h(h-1)\ldots(h-r+1)}{1.2\,\ldots\ldots\, r}x^{h-r}\left[(U_0W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1}(U_1W)^{(r+1)} + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(r+1)(r+2)}(U_2W)^{(r+2)}\right] + \\
+\frac{h(h-1)\ldots(h-r)}{1.2\,\ldots\,(r+1)}x^{h-r-1}\left[(U_0W)^{(r+1)} + \frac{h-r-1}{r+2}(U_1W)^{(r+2)} + \frac{(h-r-1)(h-r-2)}{(r+2)(r+3)}(U_2W)^{(r+3)}\right] + \\
+\frac{h(h-1)\ldots(h-r-1)}{1.2\,\ldots\,(r+2)}x^{h-r-2}\left[(U_0W)^{(r+2)} + \frac{h-r-2}{r+3}(U_1W)^{(r+3)} + \frac{(h-r-2)(h-r-3)}{(r+3)(r+4)}(U_2W)^{(r+4)}\right] + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right]$$

kann aber auch als Function der ohnehin jedesmal durch directe Rechnung zu bestimmenden von uns kurz vorher eingeführten Symbole, bezüglich Reihencoefficienten in der (352) wiedergegeben werden, und zwar wird der erste Coefficient auf diejenige Weise entwickelt, welche von der (334) zur (335), und sodann vermittelst der Bezeichnungen (336) zur (337) geführt hat, mit Rücksicht darauf, dass $W^{(r+1)}$ willkührlich gleich der Nulle angenommen worden ist, sich so stellen lassen:

$$\frac{W}{1\ldots r.U_2'^{\,r}}\Big[\overset{*}{[h.h-1\ \ldots\ h-r+1]}\,\overset{*}{h-r} + \overset{*}{[h\,.\,h-1\ \ldots\ h-r+2]}\,\underset{*}{h-r+1}\,.\,\overset{*'}{h-r} +$$
$$+\overset{*}{[h.h-1\ldots h-r+3]}\,\underset{*}{h-r+2}\,.\,\underset{*}{h-r+1}\,.\,\overset{*''}{h-r}+\ldots\ldots+\underset{*}{h}\,.\,\underset{*}{h-1}\ldots\underset{*}{h-r+1}\,.\,\overset{*(r)}{h-r}\Big].$$

Die darauffolgenden aber werden vermittelst derselben Entwicklung und mit steter Rücksicht auf die Annahme $W^{(r+1)} = W^{(r+2)} = \ldots\ldots = 0$ zuvörderst die Gestalt annehmen:

$$\frac{h(h-1)\ldots(h-r)}{1.2\ldots(r+1)}\left[\overset{*'}{h-r}-1.W^{(r)} + \overset{*''}{h-r}-1.W^{(r-1)} + \ldots\ldots + \overset{*(r)}{h-r}-1.W' + \overset{*(r+1)}{h-r}-1.W\right]$$

$$(355)\quad \frac{h(h-1)\ldots(h-r-1)}{1.2\ldots(r+2)}\left[\overset{*''}{h-r}-2.W^{(r)} + \overset{*'''}{h-r}-2.W^{(r-1)} + \ldots\ldots + \overset{*(r+1)}{h-r}-2.W' + \overset{*(r+2)}{h-r}-2.W\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sie existiren nicht in unbeschränkter Anzahl, weil kraft der Bedeutung des Symboles:

$$\binom{r}{s}\left[U_0^{(s)} + \frac{h-r}{s+1}U_1^{(s+1)} + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(s+1)(s+2)}U_2^{(s+2)}\right] = \overset{*(s)}{h-r},$$

dieses jedesmal gleich der Nulle ausfällt, so oft die Anzahl s der angehängten Accente grösser ist, als die Ordnungszahl der Differentialgleichung n, die zugleich die Gradzahl der algebraischen Polynome U_0, U_1 und U_2, oder mindestens des höchsten unter ihnen ist. Der letzte nicht verschwindende, der in $\mathfrak{S}$ vorhandenen Coefficienten ist demnach in der Regel:

$$\frac{h(h-1)\ldots\ldots(h-r-n+1)}{1.2\ldots\ldots(r+n)}\,.\,\overset{*(n)}{h-r}-n\;W^{(r)},$$

und das $\mathfrak{S}$ selbst besteht aus nicht mehr als $n+1$ Gliedern, kann aber deren in speciellen Fällen auch weniger enthalten. Es bekömmt, wenn man von der Bezeichnungsweise (336) Gebrauch macht und die bereits ermittelten Werthe von W', W'', ... $W^{(r)}$ gehörig benützt, die folgende Form:

$$(356)\quad \mathfrak{S} = We^{ax}\left[\begin{array}{l}
x^{h-r}.\dfrac{1}{1\ldots r.U_2'^{\,r}}\left[\begin{array}{l}[h\ldots h-r+1]^{*}.\overset{*}{h-r}+[h\ldots h-r+2]^{*}\,h-\underset{*}{r}+1.\overset{*'}{h-r}+\\ +\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;+\underset{*}{h}.\underset{*}{h-1}\;\ldots\ldots\;h-\underset{*}{r}+1\,.\,\overset{*(r)}{h-r}\end{array}\right]+\\
+x^{h-r-1}.\dfrac{1}{1\ldots(r+1).U_2'^{\,r+1}}\left[\begin{array}{l}[h\ldots h-r+1]^{*}.h-\underset{*}{r}.\overset{*'}{h-r}-1+[h\ldots h-r+2]^{*}.h-\underset{*}{r}+1\times\\ \times h-\underset{*}{r}.\overset{*''}{h-r}-1+\ldots\ldots+\underset{*}{h}.\underset{*}{h-1}\ldots h-\underset{*}{r}.\overset{*(r+1)}{h-r}-1\end{array}\right]+\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+x^{h-r-n}.\dfrac{1}{1\ldots(r+n).U_2'^{\,r+n}}\,[h\ldots h-r+1]^{*}.\,h-\underset{*}{r}\ldots h-\underset{*}{r}-n+1\,.\,\overset{*(n)}{h-r}-n
\end{array}\right]=$$

$$= e^{ax}\left[\begin{array}{l}
\dfrac{h(h-1)\ldots(h-r+1)}{1.2\ldots r}\,x^{h-r}\left[\overset{*}{h-r}\,.\,W^{(r)}+\overset{*'}{h-r}\,.\,W^{(r-1)}+\ldots\ldots+\overset{*(r)}{h-r}\,.\,W\right]+\\
+\dfrac{h(h-1)\ldots(h-r)}{1.2\ldots(r+1)}\,x^{h-r-1}\left[\overset{*'}{h-r}-1.W^{(r)}+\overset{*''}{h-r}-1.W^{(r-1)}+\ldots+\overset{*(r+1)}{h-r}-1.W\right]+\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\dfrac{h(h-1)\ldots(h-r-n+1)}{1.2\ldots(r+n)}\,x^{h-r-n}\,.\,\overset{*(n)}{h-r}-n\,.\,W^{(r)}
\end{array}\right]$$

Es ist noch übrig, die Ausnahmsfälle, in welchen die asymptotische Integrationsmethode weniger, als die normale Anzahl von Genüge leistenden Werthen liefert, oder wenigstens dem ersten Anscheine nach zu liefern scheint, der Erörterung zu unterwerfen. Man begegnet ihnen, so oft die Gleichung $U_2=0$ weniger als n verschiedene Wurzeln hat, und diess geschieht wieder erstens dann, wenn sie wegen des Verschwindens der Anfangscoefficienten ihres Polynoms in gewisser Anzahl dem n^{ten} Grade nicht mehr angehört, und zweitens dann, wenn sie gleiche Wurzeln hat. Im ersten Falle besitzt die Differentialgleichung nothwendigerweise Ansteigungen in ihren ersten Coefficienten, die auf eine andere Form des Integrales, als die hier vorausgesetzte: $e^{\alpha x}Q$ hindeuten, welche Form man den Gesetzen der Formenlehre gemäss zu beurtheilen und darnach seine ferneren Massregeln zu nehmen hat. Der zweite Fall jedoch, der gleicher Wurzeln, mag hier etwas näher beleuchtet werden.

Wir bemerken hier, um die darauf bezüglichen Betrachtungen einfacher zu gestalten, dass sich beliebige gleiche Wurzeln α jedesmal durch Einführung einer neuen Veränderlichen vermittelst der Substitution: $y=e^{\alpha x}.z$ verwandeln lassen in ebenso viele gleiche Wurzeln Null, dass wir uns daher damit begnügen können, den Fall gleicher Wurzeln Null einer sorgfältigeren Discussion zu unterziehen und diess um so mehr, als es wirklich rationell ist, diese Verwandlung in gleiche Nullwurzeln zu bewirken, weil die in ihrem Gefolge auftretenden Substitutionen des Werthes Null die bequemsten denkbaren sind.

Nehmen wir also an, U_2 besitze mehrere Factoren u, eine Eigenschaft, welche dann in der Regel U_1 und U_0 nicht theilen werden; so geschieht diess offenbar dadurch, dass in den Endcoefficienten $a_0=a_1=a_2=\ldots\ldots=0$ sind. Die Abfälle, die sich dann in den Endcoefficienten der Differentialgleichung kundgeben und gewöhnlich gebrochene Repartitionszahlen bieten, weisen dann auf andere Integralformen hin mit Irrationalgrössen im Exponenten der Exponentielle, die der asymptotischen Integrationsmethode nicht mehr direct unterworfen sind, die aber durch schickliche Transformationen wieder in ihren Bereich hineingezogen werden können. Ist aber der Factor u nicht nur in U_2 sondern auch in U_1, vielleicht auch in U_0 ein oder mehrere Male enthalten, dann vermag unsere Integrationsmethode auch ohne vorgängige Transformation gelegentlich in ihre vollen Rechte wieder einzutreten. Diess geschieht namentlich in dem einfachen Falle, wo U_2 und U_1 beziehlich an Factoren u zwei und Einen an der Zahl besitzen, gleichgiltig ob U_0 deren hat, oder nicht. Die Differentialgleichung bietet unter solchen Umständen zwei Abfälle um die Einheit in den Gradzahlen der zwei letzten Coefficientenpaare und weist hiemit auf zwei particuläre Integrale der ersten Classe hin, die vermittelst der asymptotischen Methode ihrer Natur nach zu erringen sind. Dem ist auch wirklich so, denn fasst man das absteigend geordnete Resultat der Substitution in die Differentialgleichung (329) gehörig ins Auge, so sieht man, dass für $u=0$ das erste und zweite Glied desselben identisch der Nulle gleich werden; das dritte Glied aber, zur Bestimmung des Exponenten h der Nulle gleich gesetzt, liefert:

$$\frac{h(h-1)}{2}U_2'' + hU_1' + U_0 = 0.$$

Diese Gleichung bietet zwei Werthe ...

Das nächstfolgende Glied, der Nulle gleich geschrieben, d. h.:

$$8)\quad W'\left[\frac{(h-1)(h-2)}{2}U''_2+(h-1)U'_1+U_0\right]+W\left[\frac{(h-1)(h-2)}{2.3}U'''_2+\frac{h-1}{2}U''_1+U'_0\right]$$

gibt W' dem W proportional, gewöhnlich zweiwerthig, weil meistens h zwei Werthe hat, wo gedeutet ist, dass man mit der Berechnung zweier particulärer Integrale beschäftigt sei, ausg men der Coefficient von W' wäre ebenfalls der Nulle gleich, und so bekömmt man aus den n genden Gleichungen W'', W'''..., den Fall ausgenommen, wo irgend einer der Coefficienten Grössen in die Nulle übergeht, und die betreffende Gleichung im Allgemeinen widersprechend Diese Coefficienten sind aber alle enthalten in der Form: $U_0+(h-r)U'_1+\frac{(h-r)(h-r-1}{2}$ und gehen aus dem Polynome der h bestimmenden Gleichung (357) hervor, wenn man h ganze positive Zahl r vermindert. Diese Berechnung zweier particulärer Integrale kann also nu unterbrochen werden durch das Erscheinen eines unendlichen Coefficienten, wenn die (357) zwei zeln hat, von denen die kleinere von der grösseren um eine ganze positive Zahl verschieden ist

Richtet nun Jemand auf geschlossene Formen sein Augenmerk, welche vorzugswe ganze und positive h vorhanden sind, so gewahrt er hier alsbald, dass, wenn alle zwei dur (357) gelieferten Werthe dieses Exponenten ganz und positiv sind, der Berechnung jenes partic Integrales, dem das kleinere h eigen ist, gar kein Hinderniss in den Weg trete; ja noch mehr ses particuläre Integral erscheint geschlossen, ohne dass das Stattfinden irgend einer anderen gung nebst der ganzen Beschaffenheit des h hiezu erforderlich wäre. Das andere particuläre I jedoch, dem das grössere h entspricht, lässt sich nur dann in geschlossener Form ebenso ber wenn noch eine andere Bedingungsgleichung erfüllt ist, so dass also gelegentlich nur eines der ersten Classe angehörigen particulären Integrale direct berechenbar, respective geschlo tritt, das der Gradzahl nach niedrigere nämlich; eine Regel, die nicht zu gelten aufhört, w Werthe von h einander gleich werden, oder was dasselbe ist, einen Unterschied Null b dann auch nur einer von ihnen der unmittelbaren Berechnung unterliegt, der andere aber si gemeinen derselben entzieht, und zwar, wie gewöhnlich, durch das Auftauchen eines unendl ficientenwerthes, der dann bei der absteigenden Entwicklung eben so gut, wie diess bei genden der Fall war, auf eine logarithmische Transcendente in der Integralformel hir man auch hier durch Einführung unbestimmter Integralzeichen in die Integralformel im Stande ist. Dieser in der absteigenden Entwicklung vorhandene Logarithmus kan noch dadurch umgangen werden, dass man anstatt einer einzigen Variablen deren führt durch ähnliche Substitutionen, wie die in der aufsteigenden Entwicklung vork welchen die Glieder den Potenzen dieser Transcendente proportional erscheinen. Da e sentlichen nur dann auftritt, wenn particuläre Integrale in geschlossener Form vorh da man von diesen letzteren am zweckmässigsten die Differentialgleichung befreit

der aus unbestimmten Integralzeichen zusammengesetzten Form, die die Logarithmen vermeidet, sein Augenmerk zuwendet, so wird man von dieser Einführung neuer Veränderlichen hier wohl nur sehr selten Gebrauch machen. Wir werden übrigens bei der folgenden Integrationsmethode in Form von bestimmten Integralen nämlich darauf zurückkommen und fügen nur noch die Bemerkung an, dass bei der absteigenden Entwicklung die logarithmischen Transcendenten nicht ebenso wie bei der aufsteigenden vermieden werden können, durch den einfachen Kunstgriff, dass man anstatt nach Potenzen von x lieber nach Potenzen von $x - \alpha$ oder umgekehrt entwickelt, denn hier hilft diess nichts, und der $\log x$ geht damit nur in den $\log (x - \alpha)$, oder umgekehrt über. Es scheint diess in der Natur dieser Reihen begründet zu sein und seine Ursache zu finden in dem Umstande, dass in der aufsteigenden Entwicklung z. B. von $\log (x - \alpha)$ kein nach x veränderlicher Logarithmus erscheint, denn man hat:

$$\log (x - \alpha) = \log (-\alpha) + \log \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = \log (-\alpha) - \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2x^2} - \frac{x^3}{3\alpha^3} - \dots\dots\dots,$$

während in der absteigenden Entwicklung ein veränderlicher Logarithmus nicht vermieden werden kann, denn es ist:

$$\log (x - \alpha) = \log x + \log \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) = \log x - \frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha^2}{2x^2} - \frac{\alpha^3}{3x^3} - \dots\dots\dots$$

Hätten die Polynome U_0, U_1, U_2 an Factoren u eine grössere Anzahl, z. B. $r + 1$ gemeinschaftliche, was nur dann geschieht, wenn ihre Endcoefficienten, mindestens r an der Zahl:

$$a_0,\ a_1,\ a_2\ \dots\dots\ a_r; \qquad b_0,\ b_1,\ b_2\ \dots\dots\ b_r; \qquad c_0,\ c_1,\ c_2\ \dots\dots\ c_r$$

der Nulle gleich werden, so zieht diess unmittelbar das Verschwinden der Schlusscoefficienten der Differentialgleichung $r + 1$ an der Zahl nach sich. Diese enthält daher keine Glieder mit $y, y', y'', \dots y^{(r)}$ und wird erfüllt durch all' diejenigen Werthe, welche $y^{(r+1)} = 0$ geben und die, wie man weiss, in Gestalt eines ganzen algebraischen Polynoms vorhanden sind, das dem r^{ten} Grade angehört, und willkührliche Coefficienten $r + 1$ an der Zahl besitzt. Sollten sich nun noch überdiess vermöge $a_{r+1} = 0$, oder vermöge: $a_{r+1} = a_{r+2} = b_{r+1} = 0$ in den Endcoefficienten der Differentialgleichung Abfälle um die Einheit in der Gradzahl vorfinden, einer oder zwei, so tritt wieder das Verhalten ein, welches wir so eben beleuchtet haben. Es vermag ein geschlossener Werth in der Regel von $y^{(r+1)}$ zu erscheinen und nur ausnahmsweise deren zwei, im Allgemeinen aber hat man der Form nach:

$$y^{(r+1)} = W\left[x^k + C_1 x^{k-1} + C_2 x^{k-2} + \dots\dots\dots\right],$$

und somit nach $r + 1$-maliger Integration abermals der Form nach:

$$y = A\left[x^{k+r+1} + B_1 x^{k+r} + B_2 x^{k+r-1} + \dots\dots\dots\right].$$

Ist hier k negativ, ein Fall, in welchem die absteigende Reihe (359) gewöhnlich eine unendliche ist, so kann der Werth von y ungeachtet $k + r + 1$ eine ganze positive Zahl zu sein vermag, doch ver-

sehen sein mit einem Logarithmus, der dem Integriren in geschlossener Form hindernd in den We tritt. Und es setzt diess die Entstehungsweise einer solchen Transcendente in ein etwas helleres Licht

S. 6.

Asymptotische Integration einer Gleichung mit cubischen Coefficienten.

Die für Differentialgleichungen mit Coefficienten des ersten und zweiten Grades umständlic durchgeführte asymptotische Integrationsmethode kann mit wenig Veränderungen auch auf Gleichunge angewendet werden, deren Coefficienten alle oder einige den dritten Grad erreichen. Sie sind enthalte in der Form:

$$(360)\quad (a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + g_n)\, y^{(n)} + (a_{n-1} x^3 + b_{n-1} x^2 + c_{n-1} x + g_{n-1})\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots +$$
$$+ (a_0 x^3 + b_0 x^2 + c_0 x + g_0)\, y = 0.$$

Da die bisher in der Rechnung vorausgesetzte Form $e^{\alpha x} Q$ nach den Vorschriften der For menlehre auf das Fortschreiten der Gradzahlen der Gleichungscoefficienten im Niveau gegründet is so besteht sie auch hier zurecht und man kann:

$$(361)\qquad y = \frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux} W\right]\Big\}_{\alpha}$$

annehmen, als Genüge leistenden Werth. Er liefert substituirt in die Differentialgleichung:

$$(362)\qquad \frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux} W \left(U_3 x^3 + U_2 x^2 + U_1 x + U_0\right)\right]\Big\}_{\alpha} = 0,$$

allwo:

$$(363)\qquad \begin{aligned} U_3 &= a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 u + a_0 \\ U_2 &= b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 u + b_0 \\ U_1 &= c_n u^n + c_{n-1} u^{n-1} + \ldots\ldots + c_1 u + c_0 \\ U_0 &= g_n u^n + g_{n-1} u^{n-1} + \ldots\ldots + g_1 u + g_0 \end{aligned}$$

sind, und es handelt sich auch hier um die Werthbestimmung der beiden Constanten α und h un um die Angabe des W, welches als eine Function von u gedacht wird, die x in sich nicht enthäl Auch die Bestimmung dieser Function kann auf jene einer unbegränzten Anzahl von Constanten zu rückgeführt werden, der Coefficienten nämlich, welche in der aufsteigenden Entwicklung von W er scheinen, nämlich:

$$W = \mathrm{W} + \mathrm{W}' (u-\alpha) + \frac{1}{2} \mathrm{W}'' (u-\alpha)^2 + \ldots\ldots$$

Um also der Werthe von α, h, W', W'', ... habhaft zu werden, verwandeln wir die für y su stituirte Form sowohl, wie auch das Substitutionsresultat in absteigende Reihen und gelangen so den zwei Gleichungen:

$$y = e^{\alpha x}\left[x^h W_{\cdot} + \binom{h}{1} x^{h-1} W' + \binom{h}{2} x^{h-2} W'' + \ldots\ldots\ldots\right] \qquad (364)$$

$$0 = e^{\alpha x}\begin{cases} x^{h+2}.U_2W + \\ + x^{h+2}\left[U_1W + h(U_2W)'\right] + \\ + x^{h+1}\left[U_1W + h(U_1W)' + \frac{h(h-1)}{1.2}(U_2W)''\right] + \\ + x^h\left[U_0W + h(U_1W)' + \frac{h(h-1)}{1.2}(U_1W)'' + \frac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3}(U_2W)'''\right] + \\ + hx^{h-1}\left[(U_0W)' + \frac{h-1}{2}(U_1W)'' + \frac{(h-1)(h-2)}{2.3}(U_1W)''' + \frac{(h-1)(h-2)(h-3)}{2.3.4}(U_2W)^{IV}\right] + \\ + \binom{h}{2} x^{h-2}\left[(U_0W)'' + \frac{h-2}{3}(U_1W)''' + \frac{(h-2)(h-3)}{3.4}(U_2W)^{IV} + \right. \\ \qquad \left. + \frac{(h-2)(h-3)(h-4)}{3.4.5}(U_2W)^{V}\right] + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \binom{h}{r-2} x^{h-r+2}\left[(U_0W)^{(r-2)} + \frac{h-r+2}{r-1}(U_1W)^{(r-1)} + \frac{(h-r+2)(h-r+1)}{(r-1).r}(U_2W)^{(r)} + \right. \\ \qquad \left. + \frac{(h-r+2)(h-r+1)(h-r)}{(r-1)r(r+1)}(U_2W)^{(r+1)}\right] \\ + \binom{h}{r-1} x^{h-r+1}\left[(U_0W)^{(r-1)} + \frac{h-r+1}{r}(U_1W)^{(r)} + \frac{(h-r+1)(h-r)}{r(r+1)}(U_2W)^{(r+1)} + \right. \\ \qquad \left. + \frac{(h-r+1)(h-r)(h-r-1)}{r(r+1)(r+2)}(U_2W)^{(r+2)}\right] \\ + \binom{h}{r} x^{h-r}\left[(U_0W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1}(U_1W)^{(r+1)} + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(r+1)(r+2)}(U_2W)^{(r+2)} + \right. \\ \qquad \left. + \frac{(h-r)(h-r-1)(h-r-2)}{(r+1)(r+2)(r+3)}(U_2W)^{(r+3)}\right] \\ + \binom{h}{r+1} x^{h-r-1}\left[(U_0W)^{(r+1)} + \frac{h-r-1}{r+2}(U_1W)^{(r+2)} + \frac{(h-r-1)(h-r-2)}{(r+2)(r+3)}(U_2W)^{(r+3)} + \right. \\ \qquad \left. + \frac{(h-r-1)(h-r-2)(h-r-3)}{(r+2)(r+3)(r+4)}(U_2W)^{(r+4)}\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (365)$$

Die zweite von ihnen, in ihre Bestandgleichungen zerlegt, wird auch hier die Werthe der Constanten α, h, W', W'', ..., die in der ersten vorkommen, zu liefern haben. Aus der Zerlegung ergibt sich:

$$0 = U_2 W$$
$$0 = U_1 W + h (U_2 W)'$$
$$0 = U_1 W + h (U_2 W)' + \frac{h(h-1)}{1.2} (U_2 W)''$$
$$0 = U_0 W + h (U_1 W)' + \frac{h(h-1)}{1.2} (U_1 W)'' + \frac{h(h-1)(h-2)}{1.2\,3} (U_2 W)'''$$
$$0 = (U_0 W)' + \frac{h-1}{2} (U_1 W)'' + \frac{(h-1)(h-2)}{2.3} (U_2 W)'' + \frac{(h-1)(h-2)(h-3)}{2.3.4} (U_2$$
$$0 = (U_0 W)'' + \frac{h-2}{3} (U_1 W)''' + \frac{(h-2)(h-3)}{3.4} (U_2 W)^{IV} + \frac{(h-2)(h-3)(h-4)}{3.4.5} (U_2$$

....

(366)

$$0 = (U_0 W)^{(r-2)} + \frac{h-r+2}{r-1} (U_1 W)^{(r-1)} + \frac{(h-r+2)(h-r+1)}{(r-1)\,r} (U_2 W)^{(r)} + \\ + \frac{(h-r+2)(h-r+1)(h-r)}{(r-1)\,r\,(r+1)} (U_2 W)^{(r+1)}$$
$$0 = (U_0 W)^{(r-1)} + \frac{h-r+1}{r} (U_1 W)^{(r)} + \frac{(h-r+1)(h-r)}{r\,(r+1)} (U_2 W)^{(r+1)} + \\ + \frac{(h-r+1)(h-r)(h-r-1)}{r\,(r+1)(r+2)} (U_2 W)^{(r+2)}$$
$$0 = (U_0 W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1} (U_1 W)^{(r+1)} + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(r+1)(r+2)} (U_2 W)^{(r+2)} + \\ + \frac{(h-r)(h-r-1)(h-r-2)}{(r+1)(r+2)(r+3)} (U_2 W)^{(r+3)}$$
$$0 = (U_0 W)^{(r+1)} + \frac{h-r-1}{r+2} (U_1 W)^{(r+2)} + \frac{(h-r-1)(h-r-2)}{(r+2)(r+3)} (U_2 W)^{(r+3)} + \\ + \frac{(h-r-1)(h-r-2)(h-r-3)}{(r+2)(r+3)(r+4)} (U_2 W)^{(r+4)}$$

Von diesen Bestimmungsgleichungen führt die erste, da W nicht verschwinden kann, i dann auch W', W", ... Null sein müssten, zu:

(367) $$0 = U_2 = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 \alpha + a_0,$$

welche nicht mehr als n von einander verschiedene Werthe von α angibt, wohl aber gelege deren weniger. Sie seien, wenn wirklich vorhanden: α_1, α_2, α_3, ... α_n. Die zweite Gleic bestimmt dann h durch dieselbe Formel, wie im vorhergehenden Paragraphe, nämlich:

(368) $$h = -\frac{U_1}{U'_2},$$

welchem ebenfalls, dem n-deutigen α zukommend, verschiedene Werthe n an der Zahl zufallen.

seien beziehlich: h_1, h_2, h_3, ... h_n. Die nächste Gleichung dient dazu, um W' durch W auszudrücken. Sie gibt mit Rücksicht auf (368):

$$hU'_0 W' = \left[U_1 + hU'_1 + \frac{h(h-1)}{2} U''_2\right] W \tag{369}$$

Die folgenden Gleichungen geben dann der Reihe nach: W'', W''', ... dem W proportional und so wie α und h n-deutig. Die Rechnung ist also mit der Entwicklung von allen n particulären Integralen auf einmal beschäftigt, so oft sie wirklich vorkommen in der vorausgesetzten Form. Aus dem Erscheinen der Binomialcoefficienten in den vorliegenden Formeln erschliessen wir auch hier wieder gelegentlich, wenn es ganze und positive Werthe von h gibt, vorhandene geschlossene Formeln. Es ist jedoch ihre Existenz nicht mehr an das Stattfinden nur einer einzigen Bedingungsgleichung, wie bei Gleichungen mit quadratischen Coefficienten, geknüpft, sondern vielmehr an das Identischwerden von deren zweien. In der That, nimmt man an, dass h in eine ganze Zahl r übergeht, so zieht diess sofort das identische Verschwinden gewisser Glieder in dem Schlusse der Gleichung (365) nach sich, in Folge dessen eben diese Schlussglieder die folgenden werden:

$$\begin{aligned}
&\binom{h}{r-2} x^{h-r+2} \left[(U_0 W)^{(r-2)} + \frac{2}{r-1} (U_1 W)^{(r-1)} + \frac{2.1}{(r-1).r} (U_2 W)^{(r)}\right] + \\
&+ \binom{h}{r-1} x^{h-r+1} \left[(U_0 W)^{(r-1)} + \frac{1}{r} (U_1 W)^{(r)}\right] + \\
&+ \binom{h}{r} x^{h-r} . (U_0 W)^{(r)}
\end{aligned} \tag{370}$$

Erwägt man nun, dass unter andern Umständen diese drei Glieder, der Nulle gleich gesetzt, zur Bestimmung von $W^{(r)}$, $W^{(r+1)}$ und $W^{(r+2)}$ gedient haben würden, gegenwärtig aber, da die beiden letzten dieser Coefficienten darin nicht erscheinen, nur zu einer dreimaligen Bestimmung von $W^{(r)}$ dienen können, so sieht man, dass diesen Gleichungen durch endliche Werthe nur dann Genüge geleistet werden kann, wenn die drei solchergestalt abgeleiteten $W^{(r)}$ identisch dieselben sind, d. h. wenn für dasselbe $W^{(r)}$, welches aus der Gleichung:

$$(U_0 W)^{(r-2)} + \frac{2}{r-1} (U_1 W)^{(r-1)} + \frac{2.1}{(r-1) r} (U_2 W)^{(r)} = 0$$

folgt, auch:

$$(U_0 W)^{(r)} = (U_0 W)^{(r-1)} + \frac{1}{r} (U_1 W)^{(r)} = 0 \tag{371}$$

wird. Endlich lassen sich auch hier die aufeinanderfolgenden Reihencoefficienten W', W'', ... $W^{(r)}$, ... sowohl recurrent, als auch von einander unabhängig bestimmen und zwar vermittelst des im vorhergehenden Paragraphe auseinandergesetzten Verfahrens. Man legt sich nämlich diejenigen der Gleichungen vor, welche $W^{(r+2)}$ zu liefern hat, d. h. die:

$$+ \frac{\quad}{(r+1)(r+2)(r+3)}$$

Man entwickelt ihre Glieder durch wirklich eingeleitetes Differenziren der darin enthaltenen, ordnet nach den Differentialquotienten von W und nimmt Rücksicht auf die Gleichung: $U_s + hU_s' = 0$ und gelangt so zunächst zu:

$$(373)\quad \begin{aligned}
0 = & - \frac{(h-r)(h-r-1)}{r+1} U_2' \,.\, W^{(r+2)} + \\
& + \frac{h-r}{r+1} \left[U_1 + (h-r-1) U_2' + \frac{(h-r-1)(h-r-2)}{1\,.\,2} U_2'' \right] W^{(r+1)} \\
& + \left[U_0 + (h-r) U_1' + \frac{(h-r)(h-r-1)}{1\,.\,2} U_2'' + \frac{(h-r)(h-r-1)(h-r-2)}{1\,.\,2\,.\,3} U_2''' \right] W^{(r)} + \\
& + \binom{r}{1} \left[U_0' + \frac{h-r}{2} U_1'' + \frac{(h-r)(h-r-1)}{2\,.\,3} U_2''' + \frac{(h-r)(h-r-1)(h-r-2)}{2\,.\,3\,.\,4} U_2^{IV} \right] W^{(r-1)} + \\
& + \binom{r}{2} \left[U_0'' + \frac{h-r}{3} U_1''' + \frac{(h-r)(h-r-1)}{3\,.\,4} U_2^{IV} + \frac{(h-r)(h-r-1)(h-r-2)}{3\,.\,4\,.\,5} U_2^{V} \right] W^{(r-2)} + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \binom{r}{2} \left[U_0^{(r-2)} + \frac{h-r}{r-1} U_1^{(r-1)} + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(r-1)\,.\,r} U_2^{(r)} + \frac{(h-r)(h-r-1)(h-r-2)}{(r-1)\,r\,(r+1)} U_2^{(r+1)} \right] W'' + \\
& + \binom{r}{1} \left[U_0^{(r-1)} + \frac{h-r}{r} U_1^{(r)} + \frac{(h-r)(h-r-1)}{r\,(r+1)} U_2^{(r+1)} + \frac{(h-r)(h-r-1)(h-r-2)}{r\,(r+1)\,(r+2)} U_2^{(r+2)} \right] W' + \\
& + \left[U_0^{(r)} + \frac{h-r}{r+1} U_1^{(r+1)} + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(r+1)\,(r+2)} U_2^{(r+2)} + \frac{(h-r)(h-r-1)(h-r-2)}{(r+1)(r+2)(r+3)} U_2^{(r+3)} \right] W
\end{aligned}$$

Dann aber durch Einführung der den (336) analogen Bezeichnungen:

$$(374)\quad \begin{aligned}
& \frac{(h-r)(h-r-1)}{r+1} U_2' = h_{\,2} r \\
& \frac{h-r}{r+1} \left[U_1 + (h-r-1) U_2' + \frac{(h-r-1)(h-r-2)}{1.2} U_2'' \right] = h_{\,1} r \\
& U_0 + (h-r) U_1' + \frac{(h-r)(h-r-1)}{1\,.\,2} U_2'' + \frac{(h-r)(h-r-1)(h-r-2)}{1\,.\,2\,.\,3} U_2''' = h_{\,0} r \\
& \binom{r}{1} \left[U_0' + \frac{h-r}{2} U_1'' + \frac{(h-r)(h-r-1)}{2\,.\,3} U_2''' + \frac{(h-r)(h-r-1)(h-r-2)}{2\,.\,3\,.\,4} U_2^{IV} \right] = h_{\,-1} r \\
& \binom{r}{2} \left[U_0'' + \frac{h-r}{3} U_1''' + \frac{(h-r)(h-r-1)}{3\,.\,4} U_2^{IV} + \frac{(h-r)(h-r-1)(h-r-2)}{3\,.\,4\,.\,5} U_2^{V} \right] = h_{\,-2} r \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \binom{r}{s} \left[U_0^{(s)} + \frac{h-r}{s+1} U_1^{(s+1)} + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(s+1)(s+2)} U_2^{(s+2)} + \frac{(h-r)(h-r-1)(h-r-2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} U_2^{(s+3)} \right] = h_{\,-s} r \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

zur folgenden Gleichung von sehr einfacher Gestalt:

$$h \underset{*}{-} r\, W^{(r+2)} = h \overset{*}{-} r \,.\, W^{(r+1)} + h \overset{*'}{-} r \,.\, W^{(r)} + h \overset{*''}{-} r \,.\, W^{(r-1)} + \dots\dots\dots + \\ + h \overset{*(r-1)}{-} r \,.\, W'' + h \overset{*(r)}{-} r \,.\, W' + h \overset{*(r+1)}{-} r \,.\, W \qquad (375)$$

Um nun aus dieser einzigen die Werthe der sämmtlichen Reihencoefficienten W', W'', ... abzuleiten, ist es nöthig, r der Reihe nach die Zahlen: $-1, 0, 1, 2, 3, \dots$ bedeuten zu lassen, wodurch man zu dem folgenden Systeme von Gleichungen gelangt, die zu diesem Zwecke dienlich sind:

$$h \underset{*}{+} 1 \,.\, W' = h \overset{*}{+} 1 \,.\, W$$

$$\underset{*}{h} \,.\, W'' = \overset{*}{h} \,.\, W' + \overset{*'}{h} \,.\, W \qquad (376)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$h - \underset{*}{r} + 1 \,.\, W^{(r+1)} = h - \overset{*}{r} + 1 \,.\, W^{(r)} + h - \overset{*'}{r} + 1 \,.\, W^{(r-1)} + h - \overset{*''}{r} + 1 \,.\, W^{(r-2)} + \dots\dots + h - \overset{*(r)}{r} + 1 \,.\, W$$

Sie gehen aus den (338) des vorigen Paragraphes dadurch hervor, dass man in allen Coefficienten h in $h+1$ verwandelt, können daher mit Rücksicht auf die Umänderung auch genau auf dieselbe graphische Weise aufgelöst werden. Um nämlich zu dem Werthe zu gelangen von:

$$h \underset{*}{+} 1 \,.\, \underset{*}{h} \,.\, h \underset{*}{-} 1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad h - \underset{*}{r} + 2 \,.\, W^{(r)}$$

zeichnet man sich die Factorielle:

$$h + 1 \,.\, h \,.\, h - 1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad h - r + 2$$

so vielmal auf, als die Zahl 2^{r-1} Einheiten enthält und besternt jetzt die Factoren aller so erhaltenen Produkte, die einen unten, die anderen oben nach der alldort umständlich auseinandergesetzten Regel, aggregirt sie, und nennt diese Summe:

$$[h + 1 \,.\, h \,.\, h - 1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad h - r + 2]^*$$

so ist dann $W^{(r)}$ dem W proportional, gegeben durch folgende Formel:

$$h \underset{*}{+} 1 \,.\, \underset{*}{h} \,.\, h \underset{*}{-} 1 \dots\dots h - \underset{*}{r} + 2 \,.\, W^{(r)} = [h + 1 \,.\, h \,.\, h - 1 \dots\dots h - r + 2]^* W \qquad (377)$$

und es kömmt nur noch zu bemerken, dass sich die Bedeutungen der Symbole $h \underset{*}{+} 1$ und $h \overset{*}{+} 1$ am besten durch Vergleichung der Formel (369) mit der ersten der (376) ergeben, wie folgt:

$$h \underset{*}{+} 1 = hU'_2$$

$$h \overset{*}{+} 1 = U_1 + hU'_1 + \frac{h(h-1)}{2} U''_2 \,. \qquad (378)$$

während die Bedeutungen der übrigen Symbole alle den Formeln (374) entnommen werden. Mit den auf diese Weise berechneten Coefficientenwerthen construiren wir dann den in der Gestalt (364) er-

scheinenden Werth von y, der in der angenommenen symbolischen Ausdrucksweise, wie folgt, aussehen wird:

$$9)\qquad y = e^{ax}\,\mathrm{W}\left[x^k + \binom{h}{1}\frac{[h+1]^{*}}{h\underset{*}{+}1}x^{h-1} + \binom{h}{2}\frac{[h+1\,.\,h]^{*}}{h\underset{*}{+}1\,.\,\underset{*}{h}}x^{h-2} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

Er ist ein Produkt einer Exponentielle in eine Function erster Classe, gegeben in absteigender Reihenform. Vermöge der darin enthaltenen Binomialcoefficienten theilt diese Reihe gewisse Eigenschaften mit der Binomialformel und namentlich die, abzubrechen, wenn h eine ganze positive Zahl wird und wenn die früher erwähnten Bedingungsgleichungen (371) zwei an der Zahl erfüllt sind, wo dann das Abbrechen stattfindet bei dem mit dem Coefficienten $\mathrm{W}^{(r)}$ versehenen Gliede, welches zugleich $x^{h-r}=x^0$ zum Factor hat. Sind die in Rede stehenden Bedingungsgleichungen nicht erfüllt, dann ist den Bestimmungsgleichungen (366) durch endliche Werthe von $\mathrm{W}^{(r+1)}$, $\mathrm{W}^{(r+2)}$, ... nicht mehr Genüge zu leisten, wohl vermag man aber diess durch solche unendliche, die den verschwindenden Factor $h-r$ in erster Potenz im Nenner tragen, so zwar, dass mindestens $(h-r)\,\mathrm{W}^{(r+1)}$, $(h-r)\,\mathrm{W}^{(r+2)}$, ... endliche Werthe beibehalten. Dem zufolge hört die Reihe in der Formel (379) auf, abzubrechen beim $r+1^{\text{sten}}$ Gliede, behält aber der Beschaffenheit der Binomialcoefficienten nach durchaus nur endliche Glieder, wiewohl sie sich in eine unendliche Reihe verwandelt. Um, wie diess zugeht, genauer einzusehen, richten wir zuerst unser Augenmerk auf zwei der Bestimmungsgleichungen: die allgemeine unter (375) angeführte und diejenige, die ihr zunächst vorangeht, d. h.

$$(380)\qquad h-\underset{*}{r}+1\,.\,\mathrm{W}^{(r+1)} = h-\overset{*}{r}+1\,.\,\mathrm{W}^{(r)} + h-\overset{*'}{r}+1\,.\,\mathrm{W}^{(r-1)} + \ldots\ldots\ldots + h-\overset{*(r)}{r}+1\,\mathrm{W}$$

Hier hat $h-\underset{*}{r}+1$ bereits den verschwindenden Factor $h-r$; es ist also $\mathrm{W}^{(r+1)}$ der erste der unendlich werdenden Reihencoefficienten, und diess zwar vermöge eines einzigen verschwindenden Factors $h-r$, der in seinen Nenner fällt, so dass also $(h-r)\,\mathrm{W}^{(r+1)}$ dennoch eine endliche Grösse bleibt. Nachdem man diese bestimmt, wendet man sich an die folgende Gleichung, die (375) nämlich, und gewahrt in ihr zwei mit dem Factor Null versehene Coefficienten: $h-\underset{*}{r}$ nämlich und $h-\overset{*}{r}$. Somit i[st] auch $(h-r)\,\mathrm{W}^{(r+2)}$ begabt mit einem endlichen Werthe. In den darauffolgenden Bestimmungsgleichun- gen, die $\mathrm{W}^{(r+3)}$, $\mathrm{W}^{(r+4)}$, zu liefern haben, kommt kein Factor Null der zu bestimmenden Grösse wei[ter] vor. Sie drücken Beziehungen aus zwischen den unendlichen Grössen $\mathrm{W}^{(r+1)}$, $\mathrm{W}^{(r+2)}$, $\mathrm{W}^{(r+3)}$, .. und vereinfachen sich dadurch, dass man die sämmtlichen endlichen gegen die unendlichen Glieder verschwindend betrachtet, wodurch sie übergehen in:

$$(381)\qquad \begin{aligned} &h-\underset{*}{r}-1\,.\,\mathrm{W}^{(r+3)} = h-\overset{*}{r}-1\,.\,\mathrm{W}^{(r+2)} + h-\overset{*'}{r}-1\,.\,\mathrm{W}^{(r+1)}\\ &h-\underset{*}{r}-2\,.\,\mathrm{W}^{(r+4)} = h-\overset{*}{r}-2\,.\,\mathrm{W}^{(r+3)} + h-\overset{*'}{r}-2\,.\,\mathrm{W}^{(r+2)} + h-\overset{*''}{r}-2\,.\,\mathrm{W}^{(r+1)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und so eine Form tragen, auf welche unsere graphische Auflösungsmethode Anwendung find[et]

wird es also sein, welche man in einem vorkommenden Falle eines ganzen oder positiven h und wenn die Reihe (379) nicht abbricht, wiederholt anzuwenden haben wird.

Da nun solchergestalt sämmtliche particuläre Integrale nur ausnahmsweise geschlossen, in der Regel aber als unendliche Reihen erhalten werden, von denen man alle Glieder nicht berechnen kann, so frägt sich, mit welcher Anzahl derselben man sich bei dem Grade der anzustrebenden Genauigkeit begnügen könne. Diese Frage lässt sich nun allgemein nicht beantworten; ihre Beantwortung kann aber dadurch erleichtert werden, dass man angibt, auf was, anstatt Null, sich das Polynom der Differentialgleichung reduzire, wenn man anstatt y nicht den vollständigen Werth (364) substituirt, sondern, wenn man die demselben als Factor anhängende Reihe willkürlich bei irgend einem Gliede, etwa demjenigen mit $W^{(r)}$ abbricht, $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$, ... durch die Nulle ersetzend. Das Substitutionsresultat ist in (365) enthalten und es verschwinden in demselben identisch vermöge der getroffenen schicklichen Wahl von W', W'', ... $W^{(r)}$ Glieder $r+2$ an der Zahl. Dann folgt eine Gruppe von Gliedern, die von Null verschieden sind, die von x^{h-r+1} anfängt und bis zu x^{h-r-n} geht. Die übrigen werden wieder identisch Null. Nennen wir nun den Werth dieses Substitutionsresultates $\mathbf{S}$ und benützen wir zur Darstellung desselben die angenommene symbolische Ausdrucksweise, so ergibt sich:

$$\mathbf{S} = e^{\alpha x}\left\{\begin{array}{l} \binom{h}{r-1} x^{h-r+1}\left[\overset{*}{h-r+1}\,.\,W^{(r)} + \overset{*'}{h-r+1}\,.\,W^{(r-1)} + \overset{*''}{h-r+1}\,.\,W^{(r-2)} + \ldots + \overset{*(r)}{h-r+1}\,.\,W\right] + \\ + \binom{h}{r} x^{h-r}\left[\overset{*'}{h-r}\,.\,W^{(r)} + \overset{*''}{h-r}\,.\,W^{(r-1)} + \overset{*'''}{h-r}\,.\,W^{(r-2)} + \ldots\ldots + \overset{*(r+1)}{h-r}\,.\,W\right] + \\ + \binom{h}{r+1} x^{h-r-1}\left[\overset{*''}{h-r-1}\,.\,W^{(r)} + \overset{*'''}{h-r-1}\,W^{(r-1)} + \overset{*^{\mathrm{IV}}}{h-r-1}\,.\,W^{(r-2)} + \ldots + \overset{*(r+2)}{h-r-1}\,.\,W\right] + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \binom{h}{r+n} x^{h-r-n}\,.\,\overset{*(n+1)}{h-r-n}\,.\,W^{(r)} \end{array}\right. \tag{382}$$

und an diesen Ausdruck wird man sich wenden müssen, wenn man zu erfahren wünscht, mit welchem Masse von Genauigkeit das bei dem $(r+1)^{\text{sten}}$ Gliede abgebrochene y den Werth des particulären Integrales wiedergibt.

Wir hätten jetzt nur noch den Ausnahmsfällen, in denen das asymptotische Integriren das Integral mit der nöthigen Anzahl von willkührlichen Constanten nicht liefert, unsere Aufmerksamkeit zu schenken. Die ausführlichere Behandlung, die wir angedeihen liessen den Fällen in den vorhergehenden Paragraphen, wird uns gestatten, hier etwas kürzer zu sein. Sie kommen vor, so oft die algebraische Gleichung (367) in α weniger als n verschiedene Wurzeln hat, was wieder entweder dann geschieht, wenn wegen des Verschwindens ihrer Anfangscoefficienten dieselbe zu einem niedereren Grade herabsinkt, oder wenn gleiche Wurzeln vorhanden sind. Im ersten Falle hat die Differentialgleichung in ihren Coefficienten Ansteigungen, die auf andere Formen hinweisen und nach den Vorschriften der Formenlehre beurtheilt werden müssen. In dem anderen Falle, dem gleicher α nämlich, kommt eben so vielen particulären Integralen ein gemeinschaftlicher Factor $e^{\alpha x}$ zu, von welchem man die

Gleichung befreien wird, ohne, wie man weiss, ihren Bau zu compliziren. Die nächste Folge da sind Abfälle in den letzten Coefficientenpaaren, welche auf das Paar repartirt, entweder eine Einl oder weniger als eine Einheit abwerfen, woraus man dann ersehen wird, ob durch die Sonderung exponentiellen Factors e^{ax} die mit demselben versehenen particulären Integrale zur ersten Functio classe herabgebracht sind, oder nicht; ob man also das asymptotische Integriren unmittelbar, oder e nach einer vorgängigen Transformation anzuwenden haben wird. Fälle, wo diess unmittelbar geschel kann, wären z. B. die, wo U_3 und U_2 einen Wurzelfactor beziehlich zwei- und einmal besitzen, wo U_3, U_2, und U_1 mit demselben beziehlich drei — zwei — und Einmal versehen sind. Die betr fende wiederholte Wurzel mag, da man auf dem Wege der Transformation darüber verfügt, Null se Im ersten dieser zwei Fälle geht in der Substitutionsgleichung (365) das erste und zweite Gl identisch in Null über, und erst das dritte kann, gleich Null gesetzt, zur Bestimmung von h dien gibt aber dafür eine Gleichung des zweiten Grades, nämlich die:

$$U_1 + hU'_2 + \frac{h(h-1)}{1\,.\,2} U''_3 = 0 \tag{383}$$

mit doppelwerthigem h, zum Zeichen, dass sich zwei particuläre Integrale nicht in dem exponenti len Factor, sondern nur in den Werthen von h unterscheiden. Die darauffolgenden der Bestimmun gleichungen liefern dann W', W'', ... so wie h doppelwerthig, so dass man im Allgemeinen der Berechnung zweier verschiedener particulärer Integrale beschäftigt ist. Auch erleidet diese Re nung nirgends eine Unterbrechung durch Erscheinen eines unendlichen Coefficienten, den Fall aus nommen, wo der Unterschied der beiden aus der (383) gezogenen Wurzeln eine ganze positive Z $r+1$ ist. Dann wird nämlich nicht nur h, sondern auch ein kleinerer Werth $h-r-1$ die (38 erfüllen. Man wird daher haben:

$$U_1 + (h-r-1)\, U'_2 + \frac{(h-r-1)\,(h-r-2)}{1\,.\,2} U''_3 = 0,$$

und sucht man nun unter den Bestimmungsgleichungen die allgemeine (373) heraus, die aber je nicht mehr wie sonst zur Bestimmung von $W^{(r+2)}$ dient, sondern erst $W^{(r+1)}$ gibt, so sieht m dass dieser Coefficient versehen sei mit dem letzterwähnten Gleichungspolynome als Factor, somit ein unendlichen Werth bekomme, der uns nöthigt, das eine der zwei particulären Integrale, denen grössere h angehört, aufzugeben, wenn nicht auch zufälligerweise die Summe der übrigen Glie dieser Bestimmungsgleichung übergeht in Null. Hiedurch hört sie dann auf, den Werth zu liefern $W^{(r+1)}$. Dieses erscheint also willkührlich und spielt die Rolle einer neu hinzutretenden Integratio constante. Im Allgemeinen also wird, wenn die Differenz zwischen den beiden Werthen des h ei ganze Zahl ist, nur dem kleineren von ihnen wirklich ein particuläres Integral angehören; die I rechnung des anderen aber durch das Erscheinen eines unendlichen Coefficienten unterbrochen werd Es gilt diess auch für solche Werthe von h, deren Unterschied Null ist, d. h. für gleiche. Auch h kann man sagen, dass nur einem von ihnen ein berechenbares particuläres Integral entspreche. Die l

sache dieser Erscheinung ist abermals, so wie im vorigen Paragraphe, eine in der absteigenden Entwicklung vorhandene logarithmische Transcendente, der man aber nicht ausweichen kann dadurch, dass man absteigend nach Potenzen einer Differenz wie $x-\beta$ anstatt nach x entwickelt, sondern nur dadurch, dass man entweder das logarithmische Glied aussondert, oder die Gleichung von dem berechenbaren Integrale befreit, wodurch in den Werth von y unbestimmte Integralzeichen hineinfallen. Sind die beiden aus der (383) gezogenen h zufällig ganze und positive Zahlen, dann vermögen die ihnen entsprechenden particulären Integrale auch geschlossen aufzutreten, jedoch ist hiezu das Stattfinden von Einer Bedingungsgleichung nöthig, wenn das mit dem kleineren h versehene geschlossen sein soll, und noch einer ferneren, wenn man auch das mit dem grösseren h behaftete geschlossen haben will. In der That, geben wir zuerst dem k seinen kleineren ganzen und positiven Werth r, und schliessen unendliche Coefficientenwerthe aus, so fällt das Substitutionsresultat (365) geschlossen aus, da die darin enthaltenen Binomialcoefficienten von $\binom{h}{r+1}$ angefangen in Null übergehen. Die drei Schlussglieder dieses Resultates haben wir unter (370) aufgezeichnet. Denkt man sie sich der Nulle gleich gesetzt, so erhält man drei Gleichungen, von denen die erste $W^{(r-1)}$ gibt, die zweite aber sowohl, wie auch die dritte nur $W^{(r)}$ bestimmen können. Dieses aus der zweiten gezogene $W^{(r)}$ muss daher die dritte identisch erfüllen, d. h. zur geschlossenen Eigenschaft des particulären Integrales genügt es, wenn: $(U_0 W)^{(r)}=0$ ist. Ist jedoch von dem particulären Integrale mit dem grösseren h die Rede, dann tritt noch eine andere Gleichung hinzu, die man aus der (373) erhält, wenn man daselbst die ersten zwei Bestandglieder auslässt.

Gehen wir jetzt über zur Annahme dreier gleicher Wurzeln der $U_3=0$, während die $U_2=0$ deren zwei und die $U_1=0$ eine einzige besitzen. Die ersten drei Glieder des Substitutionsresultates (365) verschwinden dann identisch, und es kann dann h dreiwerthig erst aus der vierten der Bestimmungsgleichungen (366) gezogen werden. Sie ist:

$$U_0 + hU'_1 + \frac{h(h-1)}{1.2} U''_2 + \frac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3} U'''_3 = 0.$$

Man hat somit drei particuläre Integrale mit einem und demselben exponentiellen Factor, die sich nur durch die Werthe ihrer Gradzahlen h unterscheiden. Ihre Berechnung geht stets ungestört vor sich, den Fall ausgenommen, wo sich zwei der drei Exponenten h unterscheiden um eine ganze Zahl r. Um diess einzusehen, braucht nur hervorgehoben zu werden, dass die allgemeine Bestimmungsgleichung (373) nun weder $W^{(r+2)}$, noch $W^{(r+1)}$ geben kann, wohl aber im Allgemeinen zur Ermittlung von $W^{(r)}$ dient; diesen Dienst aber eben in dem angedeuteten Falle versagt, weil dann $W^{(r)}$ die Nulle zum Coefficienten bekommt, also ein unendliches $W^{(r)}$ liefert, es sei denn, dass die Summe der übrigen Glieder dieser Bestimmungsgleichung ebenfalls zufällig Null gäbe. Wären also alle drei Werthe von h zufällig ganze positive Zahlen, so wäre von den drei particulären Integralen mit demselben exponentiellen Factor nur das eine asymptotisch berechenbar, dem das kleinste h zukommt. Die Berechnung aber des anderen mit dem nächst grösseren h würde unterbrochen durch das einmalige Erscheinen eines unendlichen Coefficienten und jene des mit dem grössten h Versehenen durch ein zweimaliges Sol-

ches Hingegen hätte man völlig bedingungsfrei einen geschlossenen Ausdruck als erstes dieser drei particulären Integrale. Diess zu beweisen, dient abermals der Schluss der Substitutionsgleichung unter der Voraussetzung eines ganzen $h = r$, welches gegenwärtig das kleinste dieser h bedeuten soll. Diese drei Schlussglieder (370), gleich Null gesetzt, bieten drei Gleichungen, von welchen die erste $W^{(r-2)}$, die zweite $W^{(r-1)}$, die dritte $W^{(r)}$ bestimmt, so dass also keine doppelte Bestimmung eines und desselben Coefficienten stattfindet.

Hätten in einem gegebenen Falle alle vier Polynome U_0, U_1, U_2, U_3 eine gewisse Anzahl s von Wurzelfactoren gemeinschaftlich, so schreibt der Rechner dem entsprechend unmittelbar ein Integral mit s Constanten nieder:

$$y = e^{ax}\left[C + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + C_{s-1} x^{s-1}\right]$$

von welchem es rationell ist, die Differentialgleichung allsogleich zu befreien, weil sie dadurch um s Einheiten in der Ordnungszahl herabgesetzt und dabei ihrem Coefficientenbaue nach nicht complizirt wird. Die Befreiung geschieht dadurch, dass man zuvörderst den Factor e^{ax} absondert vermittelst der Substitution $y = e^{ax} \, . \, z$. Das Ergebniss ist eine Gleichung in z mit Coefficienten, deren Gradzahl jene der Gleichung in y nicht überschreitet und in welcher die Glieder mit z, z' ..... $z^{(s-1)}$ fehlen. Die Herabsetzung zur Gradzahl $n - s$ findet also Statt, indem man $z^{(s)}$ durch eine neue abhängige Variable v ersetzt.

§. 7.

Asymptotische Integration der Differentialgleichungen, deren Coefficienten den m^{ten} Grad erreichen.

Das bis auf sehr geringe Veränderungen sich immer gleichbleibende Integrationsverfahren welches wir in den vorhergehenden Paragraphen kennen gelernt haben, lässt sich nun schon ohne Mühe allgemein auf Differentialgleichungen der n^{ten} Ordnung mit Coefficienten von beliebiger Gradzahl n ausdehnen. Eine solche Gleichung wäre der Form nach:

$$(384) \quad \begin{aligned} &(a_n x^m + b_n x^{m-1} + \ldots\ldots + g_n)\, y^{(n)} + (a_{n-1} x^m + b_{n-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + g_{n-1})\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots \\ &+ (a_1 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + g_1)\, y' + (a_0 \; x^m + b_0 \; x^{m-1} + \ldots\ldots + g_0)\, y = 0. \end{aligned}$$

Ihr entsprechen gewöhnlich particuläre Integrale in bestimmter Anzahl, die die Gestalt:

$$(385) \quad y = \frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux} \; W\right]\Big\}_{\alpha}$$

tragen, und es ergibt sich aus der Substitution derselben das Resultat:

$$(386) \quad 0 = \frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux}\, W\,(U_m x^m + U_{m-1} x^{m-1} + U_{m-2} x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + U_1 x + U_0)\right]\Big\}_{\alpha},$$

allwo U_m, U_{m-1}, U_{m-2}. ... U_1, U_0 die folgenden ganzen und algebraischen Polynome sind:

$$
\begin{array}{l}
U_m \;\;\;= a_n\, u^n + a_{n-1}\, u^{n-1} + a_{n-2}\, u^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_1\, u + a_0 \\
U_{m-1} = b_n\, u^n + b_{n-1}\, u^{n-1} + b_{n-2}\, u^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + b_1\, u + b_0 \\
U_{m-2} = c_n\, u^n + c_{n-1}\, u^{n-1} + c_{n-2}\, u^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + c_1\, u + c_0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
U_0 \;\;\;= g_n\, u^n + g_{n-1}\, u^{n-1} + g_{n-2}\, u^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + g_1\, u + g_0
\end{array}
\tag{387}
$$

Wir entwickeln nun dieses Substitutionsresultat, und zwar vermittelst der bekannten Formel, die den h^{ten} Differentialquotienten eines Produktes PQ gibt, e^{ux} als den ersten Factor desselben auffassend, und erhalten:

$$
0 = e^{ux} \left\{
\begin{array}{l}
\quad x^{h+m} \,.\, U_m W + \\
+ x^{h+m-1} \left[U_{m-1} W + h\,(U_m W)'\right] + \\
+ x^{h+m-2} \left[U_{m-2} W + h\,(U_{m-1} W)' + \frac{h\,(h-1)}{1.2}\,(U_{m-2} W)''\right] + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ x^h \left[U_0 W + h(U_1 W)' + \frac{h(h-1)}{1.2}\,(U_2 W)'' + \ldots + \frac{h(h-1)\ldots(h-m+1)}{1.2\ldots m}(U_m W)^{(m)}\right] + \\
+ h x^{h-1} \left[(U_0 W)' + \frac{(h-1)}{2}\,(U_1 W)'' + \frac{(h-1)\,(h-2)}{2\,.\,3}\,(U_2 W)''' + \ldots\ldots \right. \\
\qquad\qquad \left. + \frac{(h-1)\,(h-2)\,\ldots\ldots\,(h-m)}{2\,.\,3\,\ldots\ldots\,(m+1)}\,(U_m W)^{(m+1)}\right] \\
+ \binom{h}{2} x^{h-2} \left[(U_0 W)'' + \frac{h-2}{3}\,(U_1 W)''' + \frac{(h-2)\,(h-3)}{3\,.\,4}\,(U_2 W)^{IV} + \ldots\ldots \right. \\
\qquad\qquad \left. + \frac{(h-2)\,(h-3)\,\ldots\ldots\,(h-m-1)}{3\,.\,4\,\ldots\ldots\,(m+2)}\,(U_m W)^{(m+2)}\right] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \binom{h}{r-m+1} x^{h-r+m-1} \left[(U_0 W)^{(r-m+1)} + \frac{h-r+m-1}{r-m+2}\,(U_1 W)^{(r-m+2)} + \ldots\ldots \right. \\
\qquad\qquad \left. + \frac{(h-r+m-1)\,(h-r+m-2)\,\ldots\,(h-r)}{(r-m+2)\,\ldots\ldots\,r\,(r+1)}\,(U_m W)^{(r+1)}\right] \\
+ \binom{h}{r-m+2} x^{h-r+m-2} \left[(U_0 W)^{(r-m+2)} + \frac{h-r+m-2}{r-m+3}\,(U_1 W)^{(r-m+3)} + \ldots\ldots \right. \\
\qquad\qquad \left. + \frac{(h-r+m-2)(h-r+m-3)\ldots\ldots(h-r-1)}{(r-m+3)\,\ldots\ldots\,(r+1)(r+2)}\,(U_m W)^{(r+2)}\right] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \binom{h}{r+1} x^{h-r-1} \left[(U_0 W)^{(r+1)} + \frac{h-r-1}{r+2}\,(U_1 W)^{(r+2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right. \\
\qquad\qquad \left. + \frac{(h-r-1)\,(h-r-2)\,\ldots\ldots\,(h-r-m)}{(r+2)\,(r+3)\,\ldots\ldots\,(r+m+1)}\,(U_m W)^{(r+m+1)}\right] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
\tag{388}
$$

Um auch hier der Werthe für α, h, W', W'', ... habhaft zu werden, lassen wir die Coefficie[n-] ten der einzelnen Potenzen von x je für sich verschwinden, und gelangen so zu den folgenden B[e-] stimmungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
0 &= U_m \quad W \\
0 &= U_{m-1}\,W + h\,(U_m \quad W)' \\
0 &= U_{m-2}\,W + h\,(U_{m-1}\,W)' + \frac{h\,(h-1)}{1.2}\,(U_m\,W)'' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= (U_0\,W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1}\,(U_1\,W)^{(r+1)} + \ldots\ldots + \frac{(h-r)(h-r-1)\ldots(h-r-m+1)}{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(r+m)}\,(U_m W)^{(r+[m)]}
\end{aligned}
\tag{389}
$$

Die Erste von ihnen verlangt $U_m = 0$, oder in entwickelter Schreibweise:

$$
a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + a_{n-2}\,\alpha^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1\,\alpha + a_0 = 0
\tag{390}
$$

und gibt nicht mehr, als n verschiedene Werthe von α, die man, wenn sie wirklich vorhanden sin[d,] durch α_1, α_2, ... α_n bezeichnen kann. Zu jedem derselben bietet dann die Zweite gewöhnli[ch] einen Werth von h, nämlich:

$$
h = -\frac{U_{m-1}}{U'_m}.
\tag{391}
$$

Die Darauffolgenden liefern dann die unter den vorausgesetzten Umständen endlichen Reihencoefficie[n-] ten W', W'', ... proportional dem W, welches als n-werthige Integrationsconstante in der I[n-] tegralformel übrig bleibt. Wir fassen also gleich die allgemeine dieser Bestimmungsgleichungen i[n's] Auge, weil sie alle übrigen in sich enthält, entwickeln die in ihr ersichtlichen Differentialquotient[en] der Produkte, wie UW, und ordnen nach Differentialquotienten des W absteigend, zugleich Gebrau[ch] machend von den folgenden symbolischen Bezeichnungen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(h-r)\,(h-r-1)\,\ldots\ldots\,(h-r-m+2)}{(r+1)\,(r+2)\,\ldots\ldots\,(r+m-2)}\,U'_m = h \underset{*}{-} r \\
&\frac{(h-r)(h-r-1)\ldots(h-r-m+3)}{(r+1)(r+2)\ldots(r+m-2)}\left[U_{m-2} + \frac{(h-r-m+2)}{1}\,U'_{m-1} + \frac{(h-r-m+2)(h-r-m+1)}{1\,.\,2}\,U''_m\right] = h^{*} - \\
&\frac{(h-r)(h-r-1)\ldots(h-r-m+4)}{(r+1)(r+2)\ldots(r+m-3)}\left[U_{m-3} + \frac{(h-r-m+3)}{1}\,U'_{m-2} + \frac{(h-r-m+3)(h-r-m+2)}{1.2}\,U''_{m-1}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{(h-r-m+3)\,(h-r-m+2)\,(h-r-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3}\,U'''_m\right] = h^{*} - \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{392}
$$

$$U_0 + (h-r)\,U'_1 + \frac{(h-r)(h-r-1)}{1\,.\,2}\,U''_2 + \ldots\ldots + \frac{(h-r)(h-r-1)\ldots(h-r-m+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,m}\,U_m^{(m)} = h \overset{*(m-2)}{-} r$$

$$\binom{r}{1}\left[U'_0 + \frac{h-r}{2}\,U''_1 + \frac{(h-r)(h-r-1)}{2\,.\,3}\,U'''_2 + \ldots\ldots + \frac{(h-r)(h-r-1)\ldots(h-r-m+1)}{2\,.\,3\,\ldots\,(m+1)}\,U_m^{(m+1)}\right] = h \overset{*(m-1)}{-} r$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{r}{s}\left[U_0^{(s)} + \frac{h-r}{s+1}\,U_1^{(s+1)} + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(s+1)(s+2)}\,U_2^{(s+2)} + \ldots + \frac{(h-r)(h-r-1)\ldots(h-r-m+1)}{(s+1)(s+2)\ldots(s+m)}\,U_m^{(m+s)}\right] = h \overset{*(m+s-2)}{-} r$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und gewinnen auf diesem Wege:

$$h \underset{*}{-} r\,.\,W^{(r+m-1)} = h \overset{*}{-} r\,.\,W^{(r+m-2)} + h \overset{*'}{-} r\,.\,W^{(r+m-3)} + h \overset{*''}{-} r\,.\,W^{(r+m-4)} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ h \overset{*r+(m-4)}{-} r\,.\,W'' + h \overset{*(r+m-3)}{-} r\,.\,W' + h \overset{*(r+m-2)}{-} r\,.\,W \qquad (393)$$

eine Formel, aus der alle Bestimmungsgleichungen hervorgehen, deren man zur Coefficientenberechnung benöthigt, wenn man dem r der Reihe nach die negativen und positiven Zahlenwerthe beilegt aus der Reihe: $-m+2,\ -m+3,\ \ldots\ldots\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$ Sie sind:

$$h + \underset{*}{m} - 2\,.\,W' = h + \overset{*}{m} - 2\,.\,W$$
$$h + \underset{*}{m} + 3\,.\,W'' = h + \overset{*}{m} - 3\,.\,W' + h + \overset{*'}{m} - 3\,.\,W \qquad (394)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und unterscheiden sich von den (338) in §. 5 nur darin, dass allenthalben in den Coefficienten $h+m-2$ anstatt h steht; sind somit auf genau dieselbe Weise aufzulösen. Man zeichnet sich nämlich die Factorenfolge:

$$h + m - 2\,.\,h + m - 3\,\ldots\ldots\ldots\,h + m - r - 1$$

auf, und zwar 2^{r-1}mal; besternt die Factoren der so erhaltenen Produkte, die einen oben, die anderen unten genau nach der allda beigebrachten Regel; aggregirt alle so erhaltenen Glieder und nennt ihre Summe:

$$[h + m - 2\,.\,h + m - 3\,\ldots\ldots\ldots\,h + m - r - 1]^*$$

so besteht die folgende Gleichung:

$$h + \underset{*}{m} - 2\,.\,h + \underset{*}{m} - 3\,\ldots\ldots\,h + \underset{*}{m} - r - 1\,.\,W^{(r)} = [h+m-2\ h+m-3\,\ldots\ldots\,h+m-r-1]^*\,.\,W, \qquad (395)$$

und es kömmt nur noch zu bemerken, dass zwar die Bedeutungen sämmtlicher Coefficienten dem Complexe der Formeln (394) entnommen werden können, dass man aber denjenigen unter ihnen, die zu den ersten Bestimmungsgleichungen gehören, eine Abkürzung angedeihen lassen kann, die daher rührt, dass ihnen gemeinschaftliche Factoren angehören, durch welche diese Gleichungen theilbar sind. So ist dem $h \underset{*}{-} r$ und $h \overset{*}{-} r$ der Factor:

52

$$\frac{(h-r)(h-r-1)\ldots\ldots\ldots(h-r-m+3)}{(r+1)(r+2)\ldots\ldots\ldots(r+m-2)}$$

gemeinschaftlich. Es wird daher eine jede Gleichung, die nur diese beiden Coefficienten hat, durc eben diesen gemeinschaftlichen Factor wegdividirt und so abgekürzt werden können. Ebenso haben di $h\underset{*}{-}r$, $h\overset{*}{-}r$ und $h\overset{*'}{-}r$ den gemeinschaftlichen Factor:

$$\frac{(h-r)(h-r-1)\ldots\ldots\ldots(h-r-m+4)}{(r+1)(r+2)\ldots\ldots\ldots(r+m-3)}$$

durch den somit jede Gleichung abgekürzt werden kann, die nur diese drei Coefficienten besitzt, u. s. w. Bringt man diess in Anwendung auf die in Rede stehenden Bestimmungsgleichungen, so ergibt sich dass man annehmen könne:

$$h+\underset{*}{m}-2 = h\,U'_m$$

$$h+\overset{*}{m}-2 = U_{m-1} + h\,U'_{m-1} + \frac{h(h-1)}{1\,.\,2}\,U''_m$$

$$h+\underset{*}{m}-3 = h(h-1)\,U'_m$$

$$h+\overset{*}{m}-3 = h\left[U_{m-2} + \frac{h-1}{1}\,U'_{m-1} + \frac{(h-1)(h-2)}{1\,.\,2}\,U''_m\right]$$

$$h+\overset{*'}{m}-3 = U_{m-2} + \frac{h}{1}\,U'_{m-2} + \frac{h(h-1)}{1\,.\,2}\,U''_{m-1} + \frac{h(h-1)(h-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,U'''_m$$

(396) ....

$$h\underset{*}{+}1 = \frac{h(h-1)\ldots\ldots(h-m+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(m-1)}\,U'_m$$

$$h\overset{*}{+}1 = \frac{h(h-1)\ldots(h-m+2)}{1\,.\,2\ldots\ldots(m-1)}\left[U_{m-1} + (h-m+1)\,U'_{m-1} + \frac{(h-m+1)(h-m)}{1\,.\,2}\,U''_m\right.$$

$$h\overset{*'}{+}1 = \frac{h(h-1)\ldots(h-m+3)}{1\,.\,2\ldots(m-2)}\left[U_{m-2} + (h-m+2)\,U'_{m-2} + \frac{(h-m+2)(h-m+1)}{1\,.\,2}\,U''_{m-1}\right.$$
$$\left. + \frac{(h-m+2)(h-m+1)(h-m)}{1\,.\,2\,.\,3}\,U'''_m\right]$$

....

$$h\overset{*(m-1)}{+}1 = U_1 + h\,U'_2 + \frac{h(h-1)}{1\,.\,2}\,U''_3 + \ldots\ldots + \frac{h(h-1)\,.\,(h-m+2)}{1\,.\,2\ldots(m-1)}\,U^{(m-1)}_m$$

Die übrigen derartigen Symbole $\underset{*}{h}$, $h\underset{*}{-}1$, ..., $\overset{*}{h}$, $h\overset{*}{-}1$, ... vertragen keine Ab- kürzungen weiter und sind sämmtlich den allgemeinen Formeln (392) der Reihe nach zu entnehm Es construirt sich mit ihnen ein ähnlicher Werth von y, der in der Regel n solche verschiedene re- präsentirt, wie im vorigen Paragraphe, nämlich:

$$(397)\quad y = e^{\gamma x}W\left[x^h + \binom{h}{1}\frac{h+\overset{*}{m}-2}{h+\underset{*}{m}-2}\,x^{h-1} + \binom{h}{2}\frac{[h+m-2\,.\,h+m-3]^{*}}{h+\underset{*}{m}-2\,.\,h+\underset{*}{m}-3}\,x^{h-2} + \ldots\ldots\ldots\right.$$

Auch diese Reihe vermag abzubrechen bei dem $h+1^{\text{sten}}$ Gliede, wenn h eine ganze positive Zahl ist. Es ist jedoch hiezu noch das Stattfinden von Bedingungsgleichungen $m-1$ an der Zahl nothwendig. Man erhält sie, wenn man die Schlussglieder der Substitutionsgleichung (388) unter der Voraussetzung $h=r$ ins Auge fasst und ihre Coefficienten gleich Null schreibt. Sie sind der Reihe nach:

$$(U_1W)^{(r)}=(U_0W)^{(r-1)}+\frac{1}{r}(U_1W)^{(r)}=(U_0W)^{(r-2)}+\frac{2}{r-1}(U_1W)^{(r-1)}+\frac{2.1}{(r-1)r}(U_2W)^{(r)}=\dots$$
$$=(U_0W)^{(r-m+2)}+\frac{m-2}{r-m+3}(U_1W)^{(r-m+2)}+\dots\dots+\frac{(m-2)(m-3)\dots 2.1}{(r-m+3)(r-m+4)\dots r}(U_mW)^{(r)}=0. \qquad (398)$$

Sind diese Letzteren nicht erfüllt, so gewinnt man demungeachtet einen Werth von y, wenn auch keinen geschlossenen, weil sich leicht zeigen lässt, dass $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$ ....., dann zwar unendliche Werthe bekommen, nur solche jedoch, die den verschwindenden Factor $h-r$ in der ersten Potenz im Nenner tragen, wodurch die absteigende Reihe in der Formel (397) in eine unendliche Reihe mit endlichen Coefficienten übergeht. Bricht man die gewonnene unendliche Reihe bei irgend einem Gliede ab, so kann das einem so verkürzten particulären Integrale entsprechende Substitutionsresultat aus der (388) dadurch abgeleitet werden, dass man in demselben die Glieder, die man beibehalten hat, etwa die mit den Coefficienten W, W', W'' ..... $W^{(r)}$ von Null verschieden annimmt, hingegen $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$, ... sämmtlich durch Null ersetzt. Macht man dabei noch Gebrauch von der Bezeichnungsweise (392), und nennt man das Substitutionsresultat $\mathbf{S}$, so ergibt sich dafür die folgende Formel:

$$\mathbf{S}=e^{zx}\left\{\begin{array}{l}
\binom{h}{r-m+2}x^{h-r+m-2}\left[h-r\overset{*}{+}m-2\,.\,W^{(r)}+h-r\overset{*\prime}{+}m-2\,.\,W^{(r-1)}+\dots+h-r\overset{*(r)}{+}m-2\,.\,W\right]\\
+\binom{h}{r-m+3}x^{h-r+m-3}\left[h-r\overset{*\prime}{+}m-3\,.\,W^{(r)}+h-r\overset{*\prime\prime}{+}m-3\,.\,W^{(r-1)}+\dots+h-r\overset{*(r+1)}{+}m-3\,.\,W\right]\\
+\binom{h}{r-m+4}x^{h-r+m-4}\left[h-r\overset{*\prime\prime}{+}m-4\,.\,W^{(r)}+h-r\overset{*\prime\prime}{+}m-4\,.\,W^{(r-1)}+\dots+h-r\overset{*(r+2)}{+}m-4\,.\,W\right]\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
+\binom{h}{n}x^{h-n}\left[\overset{*(m+n-r-2)}{h-n}\,.\,W^{(r)}+\overset{*(m+n-r-1)}{h-n}\,.\,W^{(r-1)}+\dots\dots+\overset{*(m+n-2)}{h-n}\,.\,W\right]\\
+\binom{h}{n+1}x^{h-n-1}\left[\overset{*(m+n-r-1)}{h-n\;1}\,.\,W^{(r)}+\overset{*(m+n-r)}{h-n-1}\,.\,W^{(r-1)}+\dots\dots+\overset{*(m+n-2)}{h-n-1}\,.\,W'\right]\\
+\binom{h}{n+2}x^{h-n-2}\left[\overset{*(m+n-r)}{h-n-2}\,.\,W^{(r)}+\overset{*(m+n-r+1)}{h-n-2}\,.\,W^{(r-1}+\dots\dots+\overset{*(m+n-2)}{h-n-2}\,.\,W''\right]\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
+\binom{h}{n+r}x^{h-n-r}\,.\,\overset{*(m+n-2)}{h-n-r}\,.\,W^{(r)}.
\end{array}\right. \qquad (399)$$

Sie hat über die Verwendbarkeit des betreffenden particulären Integrales und die Bedingungen derselben zu entscheiden. Wir werden daher darauf im folgenden Paragraphe zurückkommen, wo die Art einer solchen Untersuchung zur Sprache gebracht werden soll.

Wir lassen jetzt nur noch eine kurze Erwähnung der Ausnahmsfälle folgen, in welchen die asymptotische Integration ein unvollständiges Integral liefert, weil die algebraische Gleichung $U_m = 0$ weniger als m verschiedene Wurzeln liefert. Geschieht diess erstens darum, weil sie dem n^{ten} Grade nicht angehört, so gibt es Ansteigungen in den Anfangscoefficienten der Differentialgleichung, die entweder zu einer vorgängigen Transformation, oder zum Integriren in einer anderen Gestalt, etwa derjenigen eines bestimmten Integrales nöthigen. Geschieht es hingegen wegen vorhandener gleicher Wurzeln, so bestehen eben so viele particuläre Integrale mit einem und demselben Factor $e^{\alpha x}$, als gleiche Wurzeln. Man legt sie auch hier bloss durch die Substitution $y = e^{\alpha x} . z$, und erschliesst dann aus der Art des Abfalles des Gleichungspolynomes in z gegen die letzten Coefficienten die Beschaffenheit dieser particulären Werthe und auch die ferneren zum Integriren dienlichen Schritte. Die asymptotische Integration bleibt dann in vielen Fällen noch unmittelbar anwendbar, in anderen muss sie durch ein sonstiges analytisches Verfahren unterbrochen werden. Das Erste findet allgemein Statt, wenn die Polynome U_m, U_{m-1}, ... in einer gewissen Anzahl, etwa bis zu U_{m-s}, der Reihe nach nicht weniger als s, $s-1$, $s-2$, ... 2, 1, 0 gleiche Wurzelfactoren besitzen. Von den Bestimmungsgleichungen (389) gehen dann die ersten s an der Zahl für dieses wiederholte α in identische über, und erst die $(s+1)^{ste}$, d. h. die:

$$U_{m-s} W + h(U_{m-s+1} W)' + \frac{h(h-1)}{1.2}(U_{m-s+2} W)'' + \ldots\ldots + \binom{h}{s}(U_m W)^{(s)} = 0$$

kann zur Bestimmung von h dienen, und gibt, da sie dem s^{ten} Grade angehört, dafür s Werthe an. Diess gilt so lange s die ganze Zahl m nicht überschreitet, und es kann die vorliegende Gleichung in h auch so geschrieben werden:

$$U_{m-s} + h\, U'_{m-s+1} + \binom{h}{2} U''_{m-s+2} + \ldots\ldots\ldots + \binom{h}{s} U^{(s)}_m = 0.$$

Die s particulären Integrale mit dem gemeinschaftlichen Factor $e^{\alpha x}$ unterscheiden sich daher in den Gradzahlen h der ihnen multiplicativ anhängenden Polynome, und es steht ihrer ferneren Berechnung in der asymptotischen Gestalt so lange kein Hinderniss im Wege, als keine zwei Wurzeln h vorhanden sind, die sich um eine ganze positive Zahl unterscheiden. Findet diess jedoch Statt bei zwei oder mehreren, vielleicht auch allen Wurzeln h, denn sie können ja auch alle in ganze positive Zahlen übergehen; so ist nur das dem kleinsten h entsprechende particuläre Integral der ungestörten asymptotischen Entwicklung fähig; die übrigen sind es nicht, und zwar wegen darin vorhandener Transcendenten $\log x$, $\log^2 x$, ... $\log^{s-1} x$, die man aber auch durch Anwendung unbestimmter Integralzeichen in der allgemeinen Integralformel vermeiden kann, was bei der successiven Befreiung der Gleichung von den bereits berechneten particulären Integralen so zu sagen von selbst geschieht. Auch in geschlossener Form vermögen die so berechneten Werthe zu erscheinen, namentlich zunächst der dem kleinsten, ganzen und positiven h entsprechende, wenn noch dazu Bedingungsgleichungen erfüllt sind, aber nicht mehr wie gewöhnlich $m-1$, sondern nur mehr $m-s-1$ an der Zahl. Man er-

hält sie, indem man von der vielgliederigen Gleichung (398) nur die ersten $m - s - 1$ Glieder nimmt, und je der Nulle gleich setzt. Diese sind aber dieselben Ergebnisse, zu denen wir auch im vorigen Abschnitte gelangten, als vom Differenziren der particulären Integrale in der Differentialgleichung die Rede war.

Eines besonderen Umstandes muss jedoch noch Erwähnung geschehen, weil er bei der Discussion der Differentialgleichung von einigem Nutzen ist. Die mit k bezeichneten Exponenten nämlich, welche den Factoren des ersten Gleichungscoefficienten angehörig sind, stehen mit den beim asymptotischen Integriren vorkommenden, für die wir den Buchstaben h brauchten, in einem bestimmten Zusammenhange. Ist nämlich $(x - a)$ ein Factor des ersten Coefficienten, so existirt bekanntlich ein particuläres Integral mit dem Nenner $(x - a)^k$ und es ist:

$$k = \left.\frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{\mathfrak{X}'_n}\right\}_a - n + 1.$$

Hieraus folgt, dass wenn man den Bruch $\frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{\mathfrak{X}_n}$ in Partialbrüche zerlegt, $k + n - 1$ der Zähler sei desjenigen Partialbruches, der zum Nenner $x - a$ gehört.

Nehmen wir hier Bezug auf die in Rede stehende Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung, mit Coefficienten vom Grade m, statuiren also:

$$\mathfrak{X}_n = a_n \; x^m + b_n \; x^{m-1} + \dots\dots\dots\, g_n$$
$$\mathfrak{X}_{n-1} = a_{n-1} \; x^m + b_{n-1} \, x^{m-1} + \dots\dots\dots\, g_{n-1}$$

sind ferner die Factoren von $\mathfrak{X}_n$ entweder m, oder weniger als m an der Zahl: $x - a$, $x - a'$, $x - a''$, ... und entsprechen ihnen die Exponenten k, k', k'', ... und nehmen wir noch der Einfachheit wegen an, dass man den Coefficienten des Anfangsgliedes von $\mathfrak{X}_n$ durch das bekannte Verfahren des Dividirens in die Einheit verwandelt hat; so ergibt sich dem Gesagten gemäss der Werth von $\frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{\mathfrak{X}_n}$ in seine Bestandtheile zerlegt:

$$\frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{\mathfrak{X}_n} = L + \frac{k+n-1}{x-a} + \frac{k'+n-1}{x-a'} + \frac{k''+n-1}{x-a''} + \dots\dots\dots\dots$$

Multiplizirt man jetzt mit $\mathfrak{X}_n$, so wird daraus die identische Gleichung:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_{n-1} = L\mathfrak{X}_n &+ (k + n - 1)\,(x - a')\,(x - a'') \dots\dots\dots + \\ &+ (k' + n - 1)\,(x - a)\,(x - a'') \dots\dots\dots + \\ &+ (k'' + n - 1)\,(x - a)\,(x - a') \dots\dots\dots + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Hier ist L im Allgemeinen eine ganze Function von x und hat in dem Falle, wo $a_n = 1$ und a_{n-1} von Null verschieden ist, den Werth: a_{n-1}. Wir fassen der leichteren Behandlung wegen diesen Fall ins Auge, denken uns in der vorliegenden identischen Gleichung die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x beiderseits einander gleich gesetzt, so bekommen wir:

$$a_{n-1} = a_{n-1}$$
$$b_{n-1} = b_n \, . \, a_{n-1} + k + k' + k'' + \dots\dots\dots + (n-1)\, m.$$

und hieraus folgt:

$$k + k' + k'' + \dots\dots\dots = b_{n-1} - b_n \, a_{n-1} - m\,(n-1). \tag{400}$$

Ähnliches lässt sich nun auch sagen von den mit h bezeichneten Gradzahlen. Es gehen nämlich sämmtliche h hervor aus der Gleichung:

$$h = -\frac{U_{m-1}}{U'_m}. \tag{401}$$

Wenn man daher den Bruch $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ in Partialbrüche zerlegt, so sind die Zähler dieser Brüche eben die n an der Zahl vorhandenen Werthe von $-h$. Man hat also mit Rücksicht auf:

$$U_m = u^n + a_{n-1}\, u^{n-1} + a_{n-2}\, u^{n-2} + \dots\dots\dots + a_0$$
$$U_{m-1} = b_n\, u^n + b_{n-1}\, u^{n-1} + b_{n-2}\, u^{n-2} + \dots\dots\dots + b_0$$
$$\frac{U_{m-1}}{U_m} = b_n - \frac{h_1}{u-\alpha} + \frac{h_2}{u-\alpha_1} - \dots\dots\dots - \frac{h_n}{u-\alpha_n}.$$

Multipliziren wir auch hier mit U_m, und stellen dann die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von u einander gleich, so ergibt sich:

$$b_n = b_n$$
$$b_{n-1} = b_n \, a_{n-1} - h_1 - h_2 - \dots\dots\dots - h_n$$

und hieraus:

$$h_1 + h_2 + \dots\dots\dots + h_n = b_n\, a_{n-1} - b_{n-1}.$$

Vergleichen wir dieses Ergebniss mit dem kurz zuvor erhaltenen (400), so bekommen wir die gesuchte Relation zwischen den Summen der mit h und mit k bezeichneten Exponenten, nämlich:

$$h_1 + h_2 + \dots\dots\dots + h_n + k + k' + k'' \dots\dots\dots + m\,(n-1) = 0. \tag{402}$$

§. 8.

Ueber die Convergenz der absteigenden Reihen bei der asymptotischen Integration.

Die in den vorhergehenden Paragraphen umständlich durchgeführte wichtigste aller Integrationsmethoden, der wir den Namen der asymptotischen beigelegt haben, weil sie eigentlich nicht das Integral selbst, sondern in den meisten Fällen nur eine diesem geometrisch construirt gedachten Integrale für stets grösser werdende x immer näher kommende asymptotische Curve gibt, dient, wie man sich überzeugen konnte, zur Ermittlung des Factors erster Classe, der den algebraischen Functionen analoge Eigenschaften hat, und erscheint in Form einer absteigend geordneten Reihe.

die nur ausnahmsweise abbricht, wodurch dann wieder ausnahmsweise die Asymptote in das Integral selber übergeht. Da man also bei diesem Integriren meist eine unendliche Reihe vorliegen hat, die man bei irgend einem Gliede abbrechen muss, und diess thuend bei dem ersten, zweiten, dritten, r^{ten} lauter Asymptoten erhält, die von einander verschieden sind; so entsteht dem Rechner die wichtige Frage, welche von ihnen seinen jedesmaligen Bedürfnissen die angemessenste sei? Wiewohl nun diese Frage ganz allgemein nicht beantwortet werden kann, und in einem jeden speciellen Falle für sich ihre Erledigung finden muss, so scheint doch erspriesslich, zur Orientirung des Rechners wenigstens, die Grundzüge einer solchen Untersuchungsmethode hier anzudeuten, und diess um so mehr, als es auf diesem Felde sehr leicht ist, irre zu gehen, und etwa einen sehr brauchbaren Integralausdruck als unbrauchbar auszuschliessen darum, weil sein Factor erster Classe eine halbconvergirende Reihe ist. Es sind im zweiten Abschnitte dieses Werkes einige Beispiele dieser Art vorgekommen, welche die Verwendbarkeit der halbconvergirenden Reihengebilde bei der Integration der Differentialgleichungen nachweisen.

Nehmen wir an, der Rechner sei mit der Darstellung eines particulären Integrales beschäftigt, habe sich überzeugt, dass es in geschlossener Form nicht vorhanden sei; so drängt sich ihm natürlich die Frage auf: Bei welchem Gliede kann die absteigende Reihe abgebrochen werden? Die natürliche Antwort darauf ist: Wenn der bereits erhaltene Ausdruck genau genug den wahren Werth von y wiedergibt, und wenn diess der Fall ist, je früher desto besser, nicht nur weil die Berechnung eines jeden späteren Gliedes eine complizirtere ist, sondern auch, weil man in der Regel mit dem annäherungsweise ermittelten y noch fernere Rechnungen durchzuführen haben wird, die sich immer verwickelter gestalten, aus je mehr Gliedern diess zusammengesetzt ist. Man pflegt nun gewöhnlich, um zur Beurtheilung der Genauigkeit, mit der eine gewisse Grösse berechnet ist, ein bestimmtes Mass zu haben, Grenzen anzugeben, innerhalb welcher der wahre Werth der zu berechnenden Grösse enthalten sein wird, und es ist natürlich, dass man auch hier zu diesem Mittel greift, die Frage stellend: welcher ist der Zusatz η, der zu dem asymptotischen, irgend wo abgebrochenen Ausdrucke y hinzugefügt werden muss, so zwar, dass der wahre Werth des particulären Integrales zwischen y und $y+\eta$ fällt. Hätte man ein solches η gefunden, so schliesst sich daran eine zweite Frage: Convergirt wohl dieses η beim fortwährenden Wachsen von x gegen die Nulle oder nicht? Ist diese Frage bejahend entschieden, so wird wohl Niemand an der Brauchbarkeit des gewonnenen Integralausdruckes, mindestens für genügend gross gewählte x zweifeln. Ist sie es verneinend, dann muss über die etwaige Verwendbarkeit noch eine nähere Untersuchung angestellt werden. Hat sich endlich der asymptotische Ausdruck als brauchbar erwiesen, so schliesst sich daran noch eine dritte Frage, nämlich: Wie gross ist der Werth von x, von welchem die Brauchbarkeit anhebt?

Hat sich der Rechner diese kleine Reihe von Fragen beantwortet, so kann er noch veranlasst sein zu untersuchen, ob man dem wahren Werthe des Integrales näher komme, wenn man mehr Anfangsglieder seines asymptotischen Werthes zusammennimmt. Diese Frage hat am gegenwärtigen Orte selbst eine bedeutende theoretische Wichtigkeit, insoferne als man wünschen kann, zu wissen,

ob denn die asymptotische Integration jedesmal zureiche, um gegen den wahren Werth des Integrales unbegrenzt zu approximiren.

Schliesslich kann man noch Folgendes überlegen: Wenn ein asymptotischer Ausdruck, der aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern besteht, einen angenäherten Werth des Integrales gibt, so bekommt man offenbar, bei derselben bestimmten Gliederzahl der Ausdrücke, die diess leisten, eine unbegrenzte Menge, erhalten etwa durch sehr kleine, an den constanten Reihencoefficienten $W', W'', \ldots$ angebrachte Veränderungen. Nun entsteht die Frage: Welche der verschiedenen asymptotischen Curven entfernt sich am allerwenigsten von der wahren Integrallinie, diess jedoch natürlich nur in einem gewissen Bereiche der den Variablen x ertheilten Werthe. Es liegt uns nun, wie gesagt, ob, Grundzüge der Untersuchungsmethoden zu entwerfen, welche zur Beantwortung aller dieser Fragen dienlich sein können. Wir setzen, um diese Erörterungen in grösster Allgemeinheit durchzuführen, die Differentialgleichung (384) der n^{ten} Ordnung, und mit Coefficienten, welche den m^{ten} Grad erreichen, voraus. Hätte man von dieser ein genaues, d. h. geschlossenes Integral erhalten, so würde die Substitution desselben in das Gleichungspolynom das Ergebniss Null bieten. Ist dagegen der substituirte Werth von y nur ein angenäherter, etwa bei dem $r+1^{\text{sten}}$ Gliede abgebrochener; so ist das Substitutionsresultat von Null verschieden und enthalten in der Formel (399). Es versteht sich von selbst, dass es auf diesen Ausdruck wesentlich ankomme, und dass er es sei, der über das Mass der Genauigkeit Aufschluss geben muss, mit der das $(r+1)$-gliedrige y das betreffende particuläre Integral wiedergibt. Die substituirte Function ist also:

$$y = e^{\alpha x}\left[W x^h + \binom{h}{1} W' \quad x^{h-1} + \ldots\ldots\ldots + \binom{h}{r} W^{(r)} \,.\, x^{h-r}\right]. \tag{403}$$

Das unter (399) dargestellte Substitutionsresultat ist ein Produkt aus der Exponentialgrösse $e^{\alpha x}$ in ein absteigend geordnetes Polynom von $m+n-1$ Gliedern, also der Form nach:

$$\mathrm{S}_r = e^{\alpha x} \,.\, x^{h-r-n}\left[H_r x^{n+m-2} + H'_r x^{n+m-3} + H''_r x^{n+m-4} + \ldots\ldots\ldots + H_r^{(n+m-2)}\right]. \tag{404}$$

Die Bedeutungen aber der mit H bezeichneten Coefficienten sind in der angenommenen Bezeichnungsweise die folgenden:

$$\begin{aligned}
H_r &= \binom{h}{r-m+2}\left[h-r\overset{*}{+}m-2 \,.\, W^{(r)} + h-r\overset{*'}{+}m-2 \,.\, W^{(r-1)} + \ldots\ldots + h-r\overset{*(r)}{+}m-2 \,.\, W\right]\\
H'_r &= \binom{h}{r-m+3}\left[h-r\overset{*'}{+}m-3 \,.\, W^{(r)} + h-r\overset{*''}{+}m-3 \,.\, W^{(r-1)} + \ldots\ldots + h-r\overset{*(r+1)}{+}m-3 \,.\, W\right]\\
H''_r &= \binom{h}{r-m+4}\left[h-r\overset{*''}{+}m-4 \,.\, W^{(r)} + h-r\overset{*'''}{+}m-4 \,.\, W^{(r-1)} + \ldots\ldots + h-r\overset{*(r+2)}{+}m-4 \,.\, W\right]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H_r^{(n+m-2)} &= \binom{h}{n+r}\, h\overset{*(m+n-2)}{-n-r} \,.\, W^{(r)}.
\end{aligned} \tag{405}$$

Um nun aus diesem Ausdrucke für S_r das Mass der Genauigkeit zu erschliessen, mit welcher der asymptotische Werth (403) das betreffende particuläre Integral wiedergibt, untersuchen wir, ob sich

nicht durch eine Veränderung, an dem letzten der Reihencoefficienten $W^{(r)}$ angebracht, ein anderes Substitutionsresultat S'_r erzielen lasse, das dem S_r im Zeichen entgegengesetzt ist. Wir denken uns also $W^{(r)}$ verwandelt in $W^{(r)} + w^{(r)}$, und zu einer abermaligen Substitution geschritten des folgenden Ausdruckes für y:

$$y = e^{ax}\left[Wx^h + \binom{h}{1} W' . x^{h-1} + \ldots\ldots + \binom{h}{r-1} W^{(r-1)} . x^{h-r+1} + \binom{h}{r}\left[W^{(r)} + w^{(r)}\right] x^{h-r}\right]. \quad (406)$$

Da wir hier $W, W', \ldots\ldots W^{(r-1)}$ als ungeändert dieselben voraussetzen, so verschwinden in dem allgemeinen Ausdrucke des Substitutionsresultates (388) abermals die Anfangsglieder, aber nicht mehr $r+1$, sondern jetzt nur noch r an der Zahl.

Das $(r+1)^{ste}$ von ihnen, oder dasjenige, wo der Endcoefficient $W^{(r)}$ zum ersten Male auftritt, welches daher, der Nulle gleich gesetzt, eben $W^{(r)}$ bestimmt hat, geht nun über in:

$$\binom{h}{r-m+1} x^{h-r+m-1}\left[-. h-r\underset{*}{+}m-1\,(W^{(r)}+w^{(r)}) + h-r\overset{*}{+}m-1 . W^{(r-1)} + h-r\overset{*'}{+}m-1 . W^{(r-2)} + \right.$$
$$\left. + \ldots\ldots\ldots + h-r\overset{*(r-1)}{+}m-1 . W\right] e^{ax}. \quad (407)$$

Da indess auch $W^{(r)}$ dasselbe bleibt, wie in der Formel (403), dasjenige nämlich, welches die folgende Gleichung erfüllt:

$$h-r\underset{*}{+}m-1 . W^{(r)} = h-r\overset{*}{+}m-1 . W^{(r-1)} + h-r\overset{*'}{+}m-1 . W^{(r-2)} + \ldots\ldots + h-r\overset{*(r-1)}{+}m-1 . W \quad (408)$$

so reduzirt sich dieses Glied des Substitutionsresultates auf den monomischen Ausdruck:

$$-\binom{h}{r-m+1} . h-r\underset{*}{+}m-1 . w^{(r)} . x^{h-r+m-1} . e^{ax}. \quad (409)$$

Die darauffolgenden Glieder desselben aber sind offenbar aus der Formel (399) zu erhalten, wenn man in derselben ebenfalls $W^{(r)}$ in $W^{(r)} + w^{(r)}$ verwandelt. Es folgt hieraus, dass S'_r zusammengesetzt sei aus dem S_r und aus der nachstehenden Summe von Gliedern, die sämmtlich den Factor $w^{(r)}$ tragen, dass man also habe:

$$S'_r = S_r + w^{(r)} e^{ax}\begin{cases} -\binom{h}{r-m+1} . h-r\underset{*}{+}m-1 . x^{h-r+m-1} + \\ +\binom{h}{r-m+2} . h-r\overset{*}{+}m-2 . x^{h-r+m-2} + \\ +\binom{h}{r-m+3} . h-r\overset{*'}{+}m-3 . x^{h-r+m-3} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\binom{h}{n+r} . h-\overset{*(m+n-2)}{r}-n . x^{h-r-n}, \end{cases} \quad (410)$$

oder wenn wir auch hier der Kürze wegen die Coefficienten der aufeinanderfolgenden Potenzen von x durch einzelne Buchstaben ausdrücken, nämlich:

$$
(411)\qquad
\begin{aligned}
K_r &= -\binom{h}{r-m+1}\cdot h-r\underset{*}{+}m-1\\
K'_r &= \binom{h}{r-m+2}\cdot h-r\overset{*}{+}m-2\\
K''_r &= \binom{h}{r-m+3}\cdot h-r\overset{*'}{+}m-3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
K_r^{(m+n-1)} &= \binom{h}{r+n}\cdot h-\overset{*(m+n-2)}{r}-n
\end{aligned}
$$

$$(412)\quad \mathfrak{S}'_r = \mathfrak{S}_r + w^{(r)}\,.\,e^{\alpha x}\,.\,x^{h-r-n}\left[K_r x^{m+n-1} + K'_r x^{m+n-2} + K''_r x^{m+n-3} + \dots\dots\dots + K_r^{(m+n-1)}\right]$$

Soll es nun möglich sein, durch schickliche Wahl von $w^{(r)}$ ein $\mathfrak{S}'_r$ zu erzielen, welches dem $\mathfrak{S}_r$ seinem Zeichen nach entgegengesetzt ist, so hängt diess offenbar ab von der Beschaffenheit des Ausdruckes, den man erhält, die Gleichung $\mathfrak{S}'_r = 0$ nach $w^{(r)}$ auflösend. Dieser Ausdruck ist mit Rücksicht auf den Werth (404) des $\mathfrak{S}_r$:

$$(413)\qquad -\frac{H_r\,x^{m+n-2} + H'_r\,x^{m+n-3} + H''_r\,x^{m+n-4} + \dots\dots\dots + H_r^{(m+n-2)}}{K_r\,x^{m+n-1} + K'_r\,x^{m+n-2} + K''_r\,x^{m+n-3} + \dots\dots\dots + K_r^{(m+n-1)}}$$

nur ist hier zu bemerken, dass man nicht berechtigt sei, $w^{(r)}$ diesem Ausdrucke allgemein für jedes x gleichzusetzen, und so allgemein das Verschwinden von $\mathfrak{S}'_r$ zu veranstalten, eben weil $w^{(r)}$ in der Rechnung als Constante und nicht als Function von x behandelt worden ist. In dem vorliegenden Bruche nun besitzen Zähler und Nenner die bekannten Eigenschaften ganzer und algebraischer Functionen. Beide vermögen durchzugehen durch Null. Verschwindet für irgend ein x der Nenner, ohne dass zu gleicher Zeit der Zähler durch Null geht, so wird der Bruch unendlich, und es kann für solch' ein specielles x und für ein demselben naheliegendes die erhaltene asymptotische Form des Integrales nicht für brauchbar erachtet werden. Geht hingegen der Zähler für irgend ein x, etwa für ein zwischen den Grenzen x_1 und x_2 liegendes durch die Nulle hindurch, ohne dass diess zu gleicher Zeit auch mit dem Nenner der Fall wäre, dann vermag man dem $w^{(r)}$ den Werth Null zu ertheilen, und es ist der Ausdruck (403) selbst, der ungeändert einen beliebig angenäherten Werth des particulären Integrales liefert, wenn nur x_1 und x_2 nahe genug an einander gewählt werden. Hier hätte man also ein zwar nicht für jedes x brauchbares Integral, gleichwohl jedoch ein solches, welches zwischen angebbaren Grenzen x_1 und x_2 sich als verwendbar erweist. Geht aber in irgend einem Integrale und im Bereiche der dem x zugetheilten Werthe, nehmen wir wieder an, zwischen x_1 und x_2, weder der Zähler, noch der Nenner durch Null hindurch, d. h. behalten beide innerhalb dieser Grenzen einerlei Zeichen, so werden sich immer zwei zwischen eben diesen Grenzen gelegene Abscissenwerthe ξ_1 und ξ_2 angeben lassen, von denen der erste dem Bruche (413) den allerkleinsten Werth ertheilt, dessen derselbe zwischen diesen Grenzen fähig ist, und der zwar ein eigentliches Minimum sein kann, aber nicht zu sein braucht, und von welchem der andere, ξ_2 nämlich, eben denselben Bruch mit seinem grössten zwischen diesen Grenzen liegenden Werthe versieht, der auch wieder ein analytisches Maximum sein kann, aber nicht zu sein braucht. Dieses

grössten und diesen kleinsten möglichen Werth des Bruches (413) nennen wir beziehlich $w_1^{(r)}$ und $w_2^{(r)}$, so ergeben sich uns für $w^{(r)} = w_1^{(r)}$ und $w^{(r)} = w_2^{(r)}$ zwei verschiedene $\mathfrak{S}'_r$, die offenbar dem Zeichen nach entgegengesetzt sein werden, und durch schickliche Annäherung der Abscissen x_1 und x_2, aus welcher auch eine Annäherung von ξ_1 und ξ_2 und folglich auch von $w_1^{(r)}$ und $w_2^{(r)}$ unmittelbar folgt, einander für jedes zwischen diesen Grenzen enthaltene x so nahe gebracht werden können, als man nur wünscht. Das wirkliche particuläre Integral der Differentialgleichung, geometrisch construirt gedacht, findet sich sohin eingeschlossen zwischen zwei asymptotischen Curven, denen beziehlich die Gleichungen angehören:

$$\begin{aligned} y &= e^{ax}\left[\mathrm{W}x^h + \binom{h}{1}\mathrm{W}'x^{h-1} + \ldots\ldots + \binom{h}{r-1}\mathrm{W}^{(r-1)}x^{h-r+1} + \binom{h}{r}(\mathrm{W}^{(r)} + w_1^{(r)})\,x^{h-r}\right] \\ y &= e^{ax}\left[\mathrm{W}x^h + \binom{h}{1}\mathrm{W}'x^{h-1} + \ldots\ldots + \binom{h}{r-1}\mathrm{W}^{(r-1)}x^{h-r+1} + \binom{h}{r}(\mathrm{W}^{(r)} + w_2^{(r)})\,x^{h-r}\right] \end{aligned} \qquad (414)$$

Sie verlaufen zu verschiedenen Seiten der eigentlichen Integralcurve und es hat eine jede von ihnen mit der letzteren einen einzigen Punct gemeinschaftlich; die eine nämlich denjenigen, dem der Abscissenwerth $x = \xi_1$ entspricht, die zweite einen anderen, dem $x = \xi_2$ angehört. Wir finden also unser Integral nicht eingeschlossen zwischen den Werthen y und $y + \eta$, wie man es sonst zu beanstreben pflegt, unter y den Ausdruck (403) verstanden, sondern zwischen $y + \eta_1$ und $y + \eta_2$, wenn man sich unter η_1 und η_2 die nachstehenden zwei Functionen denkt:

$$\eta_1 = \binom{h}{r} w_1^{(r)}\, e^{ax}\, x^{h-r} \qquad \eta_2 = \binom{h}{r} w_2^{(r)}\, e^{ax}\, x^{h-r} \qquad (415)$$

Hieran knüpft sich nun eine sehr wichtige Bemerkung, nämlich die Brauchbarkeit des errungenen Integrales hängt nicht mehr so wesentlich ab von dem Abstande, in welchem sich der beim $(r+1)^{\text{sten}}$ Gliede abgebrochene asymptotische Werth von dem wirklichen Integrale befindet, d. h. nicht von der Differenz zwischen y und $y + \eta_1$, oder zwischen y und $y + \eta_2$, also nicht von der absoluten Grösse der Zusätze $w_1^{(r)}$ und $w_2^{(r)}$ zu $\mathrm{W}^{(r)}$, sondern nur von ihrer Differenz, welche, wie gesagt, durch schickliches Zusammenziehen des Grenzintervalles zwischen x_1 und x_2 der Nulle beliebig nahe gebracht werden kann. Also hängt auch die Brauchbarkeit des erhaltenen Integralausdruckes durchaus nicht ab von der Convergenz der absteigenden Reihe, mit der die Exponentielle e^{ax} in der Formel für y multiplizirt erscheint. Diese Reihe kann auch eine halbconvergirende sein, kann in den spätesten Gliedern in eine steigende übergehen, ohne dass diess der Verwendbarkeit des errungenen asymptotischen Integrales irgendwie Eintrag thäte. Es wird daher der im Integrationsgeschäfte befangene Rechner eine grössere Anzahl von Reihengliedern, eigentlich gesprochen, nicht darum erringen, um ein genaueres Resultat zu erzielen, denn diess erhält man auch durch Annäherung der Grenzwerthe x_1 und x_2, sondern darum, um eben diese Grenzwerthe in einen grösseren Abstand von einander bringen zu können.

Bekanntlich hat jedes ganze algebraische Polynom in x die Eigenschaft, von irgend einem genügend gross gewählten Werthe seiner Variablen an das Zeichen nicht mehr zu ändern, und na-

mentlich dasjenige beizubehalten, welches seinem mit der höchsten Potenz versehenen Gliede eigen ist. Diess ist nun auch der Fall beim Zähler und Nenner des Bruches (413). Man wird sich also hier ein genügend gross gewähltes $x = \xi$ denken können, so zwar, dass nicht blos der Zähler das Zeichen von $H_r x^{n+m-s}$ und der Nenner jenes von $K_r x^{n+m-1}$ beibehält von $x = \xi$ an, sondern auch, dass der Nenner, als der Gradzahl nach höher, den Zähler an Grösse fortwährend, und beim Wachsen des x mehr und mehr überbietet. Benöthigt man nun das Integral zwischen den Grenzen $x = \xi$ und $x = \infty$, so kann man dem $w^{(r)}$ offenbar denjenigen Werth ertheilen, den der Bruch (413) für $x = \xi$ bekömmt, nämlich:

$$w^{(r)} = -\frac{H_r}{K_r \xi}. \tag{416}$$

und es wird der wirkliche, genaue Werth des particulären Integrales enthalten sein zwischen dem y der (403) und $y + \eta$, unter η folgenden einfachen Ausdruck verstanden:

$$\eta = -\binom{h}{r} \frac{H_r}{K_r \xi} e^{ax} x^{h-r} \tag{417}$$

und man wird das so abgebrochene y offenbar jedesmal für tadellos ansehen, wenn beim unendlichen Wachsen des x das vorliegende η gegen die Nulle convergirt. Hiezu scheint nun zwar nothwendig zu sein, dass der Exponent der Exponentielle, ax nämlich, entweder reell und negativ; oder imaginär von der Form $(\lambda + \mu\sqrt{-1})x$ mit negativem λx sei, sonst wächst die als Factor dem η anhängende Exponentialgrösse bei zunehmendem x in einem solchen Masse, dass trotz des etwaigen Abnehmens von x^{h-r}, welches eintreten wird, wenn $r > h$ ist, demungeachtet η eine mit x ins Unendliche wachsende Function vorstellt. Gleichwohl wäre aber auch in einem solchen Falle der Schluss auf die Unbrauchbarkeit des erhaltenen Integrales ein voreiliger, weil nachgewiesen werden kann, dass die beiden asymptotischen Curven, welche die wirkliche Integralcurve von $x = \xi$ an zu verschiedenen Seiten einschliessen, in einem beliebig kleinen endlichen Abstand, aber gemessen in senkrechter Linie von einander, gebracht werden können durch schickliche Wahl des ξ, also auch in einem beliebig kleinen Abstande von der Curve selbst, die zwischen ihnen verläuft, und diess zwar ungeachtet dessen, dass der längs der Axe der y gemessene Abstand η eine mit x ins Unendliche wachsende Grösse vorstellt. Man überzeugt sich hievon auf folgende Weise: Angenommen, die einem bereits sehr gross gewählten x entsprechende Ordinate treffe die untere der asymptotischen Curven in einem Puncte A, die obere in einem Puncte B, so dass man $AB = \eta$ gleich einer beträchtlich langen Linie hat. Man vergesse nun nicht, dass unter so bewandten Umständen der sehr grosse Werth der Exponentialgrösse e^{ax} nicht nur ein sehr grosses y, sondern auch ein sehr grosses $\frac{dy}{dx}$ nach sich ziehe, und fälle jetzt von A aus auf die zweite asymptotische Curve, die obere nämlich, eine Senkrechte AC; so hat man ein Dreieck ABC mit einem sehr kleinen Winkel bei B, der für einen Augenblick φ heissen mag. Es ist sodann der in Rede stehende senkrechte Abstand der asymptotischen Curven: $AC = AB \operatorname{Sin} \varphi$. Weil aber φ in diesem Falle einen sehr kleinen Winkel bedeutet, kann man immer $\operatorname{Sin} \varphi$ durch

$tang\,\varphi$ ersetzen, und hat so: $AC = AB\,tang\,\varphi$. Nach einer Grundformel der analytischen Geometrie ist aber $tang\,\varphi = \frac{dx}{dy}$, zudem hat man $AB = \eta$, folglich wird:

$$AC = \eta\,\frac{dx}{dy}.$$

Nun ist aber der dem y zukommende Werth enthalten in der Form:

$$y = e^{\alpha x}\,.\,P.$$

Durch Differenziren gewinnt man in derselben Gestalt:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\alpha x}\,Q,$$

und führt man jetzt in den Ausdruck für AC diese Form, und zugleich das durch die (417) gegebene η ein, so ergibt sich:

$$AC = -\binom{h}{r}\frac{H_r}{K_r\,\xi}\,.\,\frac{x^{h-r}}{Q}.$$

Die Gleichung (414) zeigt, dass P eine Function erster Classe vom Grade h sei, die beim fortwährenden Wachsen von x gegen Wx^h convergirt, folglich convergirt Q gegen $\alpha W x^h$ und AC gegen:

$$AC = -\binom{h}{r}\frac{H_r}{\alpha W K_r\,\xi x^r},$$

also beim Wachsen von x so rasch, wie die reciproke r^{te} Potenz dieser Variablen gegen Null, und es ist der ins Unendliche wachsende exponentielle Factor ganz ausser Wirksamkeit getreten.

Es trifft sich sehr oft, dass der im Exponenten der Exponentielle vorhandene Coefficient α einen imaginären Werth enthält, etwa $\alpha = \lambda + \mu\sqrt{-1}$. Es existiren gewöhnlich in einem solchen Falle die particulären Integrale, so wie die Werthe von α paarweise. Während nämlich von ihnen das eine in der Form erscheint:

$$y = e^{\lambda x + \mu x\sqrt{-1}}\,[L + M\sqrt{-1}],$$

ist das andere:

$$y = e^{\lambda x - \mu x\sqrt{-1}}\,[L - M\sqrt{-1}],$$

und man kann sie, wenn man die imaginäre Exponentielle $e^{\mu x\sqrt{-1}}$ durch den ihr gleichgeltenden trigonometrischen Ausdruck ersetzt, jederzeit verwandeln in zwei reelle particuläre Integrale von der Form:

$$e^{\lambda x}\,Cos\,\mu x\,.\,P \qquad \text{oder} \qquad e^{\lambda x}\,Sin\,\mu x\,.\,P.$$

Ein solches particuläres Integral vermag man nun sich auf folgende Weise geometrisch construirt zu denken. Man zeichnet zuerst die Curve: $e^{\lambda x}P$, jedoch oberhalb sowohl, als auch unterhalb der Abscissenaxe, indem man die Ordinaten z positiv und negativ aufträgt. Man erhält so zwei Curven, zwi-

schen welchen die wirkliche asymptotische, der die Ordinaten y angehören, auf- und absteigt, di Abscissenaxe in all' denjenigen Puncten schneidend, für welche $Cos\,\mu x = 0$ oder $Sin\,\mu x =$ besteht. Diese krumme mit den Coordinaten x, z versehene Linie kann die Gerüstcurve der asympt tischen in x, y heissen; und man erkennt nach einiger Ueberlegung, dass es sich hier im Wesentl chen nur darum handle, die Gerüstcurve des wirklichen particulären Integrales zwischen zwei nahe als möglich aneinanderliegende asymptotische Gerüstcurven einzuschliessen, gerade so, als wen man ein particuläres Integral vorliegen gehabt hätte ohne dem trigonometrischen Factor $Sin\,\mu x$ od $Cos\,\mu x$.

Dem bisher Gesagten kann man auch genügende Materialien entnehmen zur Beantwortun der Frage, ob und unter welchen Umständen es räthlich sei, sich den Factor erster Classe des asymp totischen Integrales in absteigender Reihenform in einer grösseren Anzahl fernerer Glieder zu verscha fen, ob man nämlich damit gegen den wahren Werth von y approximirt oder nicht. Die geringst Schwierigkeit bietet diese Untersuchung, wenn man sie nur für bereits sehr gross gewordene durchzuführen gedenkt, weil dann der wahre Werth des Integrales enthalten ist zwischen dem m dem $r+1^{\text{sten}}$ Gliede abgebrochenen asymptotischen y und dem $y+\eta$, unter $y+\eta$ den äusserst ei fachen Ausdruck (406) verstanden. Hätte man nun zu dem y noch ein Glied, das mit $W^{(r+1)}$, daz genommen, und dann vielleicht noch eines mit dem Coefficienten $W^{(r+2)}$ oder mehrere fernere, s würden sich auch mehrere Ergänzungsfunctionen η', η'', ... ergeben haben, bestimmt durch di Formeln:

$$\begin{aligned} \eta' &= -\binom{h}{r+1}\frac{H_{r+1}}{K_{r+1}\,\xi}\,e^{ax}\,x^{h-r-1} \\ \eta'' &= -\binom{h}{r+2}\frac{H_{r+2}}{K_{r+2}\,\xi}\,e^{ax}\,x^{h-r-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{418}$$

Ihr Anblick lehrt, dass es nur so lange erspriesslich sein könne, den Werth von y durch Hinzu setzen fernerer Glieder zu vervollständigen, als die nachstehenden Grössen:

$$\binom{h}{r}\frac{H_r}{K_r},\qquad \binom{h}{r+1}\frac{H_{r+1}}{K_{r+1}\,x},\qquad \binom{h}{r+2}\frac{H_{r+2}}{K_{r+2}\,x^2},\qquad \cdots\cdots$$

eine fallende Reihe bilden für $x \overline{\gtrless} \xi$. Ginge irgendwo die Reihe in eine steigende über, so wär offenbar die Berechnung fernerer Glieder von gar keinem Nutzen, weil man sich der zu berechnende Function nicht nähern, sondern davon entfernen würde.

Fassen wir jetzt die Ergebnisse unserer Untersuchungen wiederholend zusammen, so ergi sich Folgendes: Die asymptotische Integrationsmethode liefert für die particulären Integrale Ausdrück die, wenn sie geschlossen sind, ganz genau, wenn sie aber in Form von unendlichen Reihen best hen, mindestens im beliebigen Grade der Annäherung die Function wiedergeben, die sie darzustell bestimmt sind. Ihre Brauchbarkeit jedoch ist entweder zwischen mehr oder weniger nahe an einande

liegende Grenzen eingeschlossen, oder an die Bedingung eines genügend gross gewählten x geknüpft, im übrigen aber nicht abhängig von der Convergenz ihrer in absteigender Reihenform erscheinenden multiplicativen Bestandtheile und auch nicht abhängig von dem Umstande, ob der Werth von y mit x ins Unendliche wächst oder nicht. Man könnte darauf allenfalls auch einen Existenzbeweis des allgemeinen Integrales einer beliebigen Differentialgleichung gründen. Er vermöchte jedoch nicht denjenigen zu ersetzen, der im ersten Bande dieses Werkes zum genannten Zwecke vorgetragen worden ist, weil die asymptotische Integration nicht immer das allgemeine, mit der genügenden Anzahl von Constanten versehene Integral liefert, sondern in der Regel nur mit so vielen, als die wohlbekannte algebraische Gleichung $U_m = 0$ von einander verschiedene Wurzeln hat, also gelegentlich auch gar keines.

Diese Resultate haben beinahe etwas Ueberraschendes und Misstrauen Erweckendes, da man auf einem anderen Felde wohl nicht wagen dürfte eine Reihe, von der man erweisen kann, dass sie nicht convergire, abgebrochen bei irgend einem Gliede für brauchbar zu erklären. Auch hier muss man mit solchen Gebilden vorsichtig umgehen, und es wird daher gut sein, zum genauen Verständnisse der Sache aufmerksam zu machen auf die besonderen Eigenthümlichkeiten der durch das hier auseinandergesetzte Verfahren erhaltenen asymptotischen Werthe. Man erinnere sich demnach zuerst, dass unsere Grundform die eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl gewesen ist, nämlich:

$$y = \frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux}\, W\right]\Big\}_{\alpha}.$$

Sie bezeichnet offenbar jedesmal ein bestimmtes y, so oft W eine bestimmte, angebbare Function von u ist. Diess ist aber der Fall, wenn sich W mit Hilfe der Mac-Laurin'schen Formel in Form einer convergirenden Reihe wiedergeben lässt, aufsteigend geordnet nach Potenzen der Differenz $u - \alpha$, wenn auch die Convergenz nur für solche u bewiesen werden kann, die ganz nahe an α liegen, weil ja nach vollbrachtem h-maligen Differenziren u selbst in α verwandelt werden muss.

Die Reihe also, die eine bestimmte Function von u darstellt, und desshalb convergiren muss, wäre:

$$W = \mathbf{W} + \mathbf{W}'(u-\alpha) + \frac{\mathbf{W}''}{2!}(u-\alpha)^2 + \dots\dots\dots + \frac{\mathbf{W}^{(r)}}{r!}(u-\alpha)^r + \dots\dots$$

Hier bedeuten $\mathbf{W}, \mathbf{W}', \mathbf{W}'', \dots\dots$ genau dieselben Coefficienten, die auch in unseren Integralformeln vorkommen, und es convergirt die vorliegende Reihe für W nicht nur dann, wenn diese Coefficienten ins Unendliche abnehmen, oder beim fortwährenden Wachsen des Differentiationsindex r einer bestimmten endlichen Grenze zuschreiten, sondern auch dann noch, wenn sie ins Unendliche wachsen, so zwar, dass man allgemein für sehr grosse r:

$$\mathbf{W}^{(r+1)} = \mathfrak{D}\, r\, \mathbf{W}^{(r)}$$

hat; nur ist die Convergenz in den ersten zwei Fällen eine absolute, für beliebige u und α giltige, im letzteren aber eine auf Grenzen beschränkte und an die Bedingung gebundene, dass der nume-

rische Werth von $u - \alpha$ nicht grösser als $\frac{1}{\mathfrak{D}}$ sei. Noch mehr: Diese Coefficienten können sogar unendlich werden für gewisse α, wenn diess dann einem gewissen Nenner $(u - \alpha)^k$ in W, oder einer oder auch mehreren logarithmischen Transcendenten $\log^s (u - \alpha)$ zuzuschreiben ist, was, wie wir wissen, oft genug vorkömmt, wenn W das Integral einer Differentialgleichung ist; so bekommt man auch noch durch Sonderung des Nenners oder logarithmischen Bestandtheiles ein brauchbares W, das eine bestimmte Function von u darstellt.

Vergleichen wir hiemit die andere Form von y, die aus dem h^{ten} Differentialquotienten hervorgeht, und in Form eines Produktes vorkömmt aus einer Exponentiellen in eine absteigende Reihe, so sehen wir, dass es namentlich mit dieser Letzteren eine ganz andere Bewandtniss habe. Sie vermag nämlich nur dann zu convergiren, wenn $W^{(r)}$ beim fortwährenden Wachsen von r entweder der Nulle oder mindestens einem endlichen Werthe zuschreitet. Dieser Unterschied wird bewirkt durch die Natur der Coefficienten, welche hier die der Exponentialreihe angehörigen, dort die der Binomialformel eigenthümlichen sind. Es ist daher klar, dass wenn auch gelegentlich die eine dieser beiden Formen, die absteigende nämlich als divergent und als desshalb unbrauchbar erkannt werden sollte, doch mindestens die andere, die eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl nämlich, tadellos bleibt.

Aus unseren hierortigen Untersuchungen hat es sich herausgestellt, dass selbst die absteigende divergirende Reihe nicht unbedingt verwerflich sei, nachdem sie uns eine endliche Ergänzung einer ähnlichen abgebrochenen Form geboten hat, deren Bedeutung jedoch hier etwas näher untersucht zu werden verdient.

Man muss nicht vergessen, dass es mit den particulären Integralen einer Differentialgleichung eine andere Bewandtniss habe, als mit den Wurzeln einer algebraischen oder transcendenten Gleichung. Der Unterschied nämlich ist: Eine Wurzel ist ein bestimmtes Individuum; ein particuläres Integral hingegen nicht, und man bekommt aus einer Gruppe dieser Letzteren, wenn man will, unendlich viele andere durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition. Diese gewisse Unbestimmtheit dehnt sich nun auch aus auf die Ergänzung der bei einem gewissen Gliede abgebrochenen Reihe, die die Rolle des Factors erster Classe des particulären Integrales spielt. Auch diese Ergänzung nämlich ist kein bestimmtes Individuum, sondern unendlich vieler verschiedener Werthe fähig, von denen einer allerdings der Rest ist der abgebrochenen Reihe; ob man aber gerade diesen hat, oder einen anderen, gänzlich davon verschiedenen, mit dieser Ergänzung vielleicht in gar keinem Zusammenhange stehenden, diess fordert erst eine eigene Untersuchung.

Bezeichnen wir in der That das abgebrochene Integral mit y_1, seine Ergänzung mit η, so dass y_1 in die Differentialgleichung substituirt, das bekannte Resultat $\mathfrak{S}$ liefert, während $y_1 + \eta$ einen Genüge leistenden Werth darstellt, so wird man, anstatt y wirklich $y + \eta$ in die (384) setzend, zu der folgenden Differentialgleichung in η gelangen:

$$\begin{aligned}(419)\quad & (a_n x^m + b_n x^{m-1} + \ldots\ldots + g_n)\,\eta^{(n)} + (a_{n-1} x^m + b_{n-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + g_{n-1})\,\eta^{(n-1)} + \ldots\ldots \\ & + (a_1 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + g_1)\,\eta' + (a_0\; x^m + b_0\; x^{m-1} + \ldots\ldots + g_0)\;\eta = - \mathfrak{S}.\end{aligned}$$

tischen Form begründen. An ihren Ausläufern nämlich müssen so zu sagen die Integralcurve und ihrer Gestalt nach abgewickelt werden.

Diess begründet die Nothwendigkeit der Untersuchung, wie gross x gewählt sein mit man sicher sei, nicht bloss bei Berechnung des particulären Integrales, sondern auch d hörigen Ergänzung, eingeleitet, wie im Vorhergehenden, es nur mit einem einzigen particu tegrale zu thun zu haben.

Wir haben zwar diese Frage bereits dahin erledigt, dass in dem Polynome:

$$K_r\, x^{m+n-1} + K'_r\, x^{m+n-2} + K''_r\, x^{m+n-3} + \dots\dots\dots + K_r^{(m+n-1)},$$

das mit der höchsten Potenz von x verbundene Glied die Summe aller übrigen an Grösse üb also x grösser gewählt sein muss, als die grösste Wurzel der Gleichung, die man erhält, w dieses Polynom gleich Null setzt. Es kommt jedoch hier noch zu bemerken, dass man die zeln anzugeben im Stande ist, wenigstens für sehr grosse r, d. h. wenigstens dann, wenn particuläre Integral in einer grossen Anzahl von Anfangsgliedern berechnet hat. In der That ren sich für sehr grosse, gleichsam unendlich gedachte r die mit $h \underset{*}{-} r$, $h \overset{*}{-} r$, $h \overset{*'}{-} r$, . zeichneten Polynome der Reihe nach auf:

$$h \underset{*}{-} r = (-1)^{m-1} \,.\, r \,.\, U'_m, \quad h \overset{*}{-} r = (-1)^m \frac{r^2}{1.2} U''_m, \quad h \overset{*'}{-} r = (-1)^m \frac{r^3}{1.2.3}$$

$$h \overset{*''}{-} r = (-1)^m \frac{r^4}{1.2.3.4} U^{IV}_m, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad h \overset{*(m-2)}{-} r = (-1)^m \frac{r^m}{m!}$$

$$(421) \quad h \overset{*(m-1)}{-} r = (-1)^m \frac{r^{m+1}}{(m+1)!} U_m^{(m+1)}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad h \overset{*(m+s-2)}{-} r = (-1)^m \frac{r^{m+s}}{(m+s)}$$

$$\dots\dots\dots\dots \quad h \overset{*(n-2)}{-} r = (-1)^m \frac{r^n}{n!} U_m^{(n)}, \quad h \overset{*(n-1)}{-} r = (-1)^{m-1} \frac{r^n}{n!} U$$

$$h \overset{*(n)}{-} r = (-1)^{m-2} \frac{r^n}{n!} U_{m-2}^{(n)}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad h \overset{*(m+n-2)}{-} r = \frac{r^n}{n!} U$$

Bezeichnen wir die Grenze, welcher sich der Binomialcoefficient $\binom{h}{r}$, oder auch, w $\binom{h}{n+r}$ beim fortwährenden Wachsen von r nähert, numerisch genommen und ohn das Zeichen, mit g; so gehen die Werthe der mit K bezeichneten Coefficienten (411) gezogen, und eben für sehr grosse r gedacht, über in:

$$K_r = -g \,.\, h - r \underset{*}{+} m - 1, \quad K'_r = -g \,.\, h - r \overset{*}{+} m - 2, \quad K''_r = +g \,.\, h$$

$$(422) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad K_r^{(m+n-1)} = (-1)^{m+n-1}\, g \,.\, h$$

Erwägt man zudem noch, dass in den ersten Theilen der Gleichungen (421) in einigen unter ihnen, der Beschaffenheit von r, als sehr gross vorausgesetzten

durch $r \pm t$ ersetzt werden könne, unter t eine beliebige endliche ganze Zahl verstanden, die mit den Ordnungszahlen m und n comparabel ist, ohne dass deshalb an den zweiten Theilen eben dieser Gleichungen eine ähnliche Veränderung nöthig wäre; so sieht man, dass die vorliegenden Werthe der K einfacher noch, wie folgt, wiedergegeben werden können, wenn man die Voraussetzung eines sehr grossen Stellenzeigers r festhält.

$$K_r = (-1)^m g r U'_m, \quad K'_r = (-1)^{m+1} g \frac{r^2}{1.2} U''_m, \quad K''_r = (-1)^{m+2} g \frac{r^3}{1.2.3}, \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$K_r^{(n-2)} = (-1)^{m+n-2} g \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} U_m^{(n-1)}, \quad K_r^{(n-1)} = (-1)^{m+n-1} g \frac{r^n}{n!} U_m^{(n)}, \quad K_r^{(n-2)} = (-1)^{m+n-1} g \frac{r^n}{n!} U_{m-1}^{(n)}, \tag{423}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad K_r^{(m+n-1)} = (-1)^{m+n-1} g \frac{r^n}{n!} U_0^{(n)}.$$

Bilden wir mit diesen Werthen das in der Formel (413) im Nenner erscheinende Polynom und setzen es der Nulle gleich, um die Werthe kennen zu lernen, für welche eben dieser Nenner verschwindet; so ergibt sich nach Weglassung derjenigen Factoren, die nicht Null sein können, zunächst die folgende Gleichung:

$$0 = K_r x^{m+n-1} + K'_r x^{m+n-2} + K''_r x^{m+n-3} + \ldots\ldots\ldots + K_r^{(m+n-1)} =$$

$$= -rU'_m x^{m+n-1} + \frac{r^2}{1.2} U''_m x^{m+n-2} - \frac{r^3}{1.2.3} U'''_m x^{m+n-3} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} U_m^{(n-1)} x^{m+1} + \tag{424}$$

$$+ (-1)^n \frac{r^n}{n!} U_m^{(n)} x^m + (-1)^n \frac{r^n}{n!} U_{m-1}^{(n)} x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{r^n}{n!} U_0^{(n)}.$$

Verlieren wir hier nicht aus den Augen, dass in U_m, dessen allgemeiner Werth:

$$U_m = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 \alpha + a_0$$

ist, und in allen seinen Differentialquotienten, die hier mit U'_m, U''_m, ... bezeichnet erscheinen, anstatt α irgend eine der Wurzeln der $U_m = 0$, die wir mit:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha_n$$

bezeichnet haben, und denen beziehlich die Differentiationsindices:

$$h_1, \quad h_2, \quad h_3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad h_n$$

angehören, gesetzt gedacht werden muss, je nachdem es das erste, zweite, dritte, ... n^{te} particuläre Integral ist, welches der Discussion unterliegt, so folgt hieraus erstens, dass wir zu dem eben aufgezeichneten Gleichungspolynome (424) das verschwindende Glied $U_m x^{m+n}$ hinzuzufügen berechtigt sind; sondern wir noch zweitens den Factor x^{m+n} ab, und bezeichnen für einen Augenblick den allgemeinen Werth von U_m mit $F(x)$, mithin den auf das erste particuläre Integral bezogenen beispielsweise mit $F(\alpha_1)$, also U'_m mit $F'(\alpha_1)$, U''_m mit $F''(\alpha_1)$, u. s. w.; zudem erwägen wir noch drittens, dass:

$F^{(n)}(\alpha_1) = U^{(n)}_m = n!\, a_n, \quad U^{(n)}_{m-1} = n!\, b_n, \quad U^{(n)}_{m-2} = n!\, c_n, \quad \ldots\ldots \quad U^{(n)}_0 = n!\, g_n$

sei, und ertheilen hiemit unserer Gleichung schliesslich die folgende, unseren Erwägungen günstigste Gestalt:

$$(425)\quad x^{m+n}\left\{\begin{array}{l} F(\alpha_1) - F'(\alpha_1)\dfrac{r}{x} + F''(\alpha_1)\dfrac{r^2}{2x^2} - F'''(\alpha_1)\dfrac{r^3}{2.3x^3} + \ldots + (-1)^{n-1}F^{(n-1)}(\alpha_1)\dfrac{r^{n-1}}{(n-1)!x^{n-1}} + \\ + (-1)^n a_n\dfrac{r^n}{x^n} + (-1)^n b_n\dfrac{r^n}{x^{n+1}} + (-1)^n c_n\dfrac{r^n}{x^{n+2}} + \ldots\ldots + (-1)^n g_n\dfrac{r^n}{x^{n+m}} \end{array}\right\}$$

Als Bestimmungsgleichung für x angesehen, bietet sie in den ersten Coefficientenpaaren $n-1$ an der Zahl (denn das verschwindende $F(\alpha_1)$ darf hierbei nicht gerechnet werden) lauter Ansteigungen um die Einheit in der Gradzahl nach r dar, was bekanntlich auf $n-1$ Wurzeln in der Form Ar hindeutet. Hierauf folgen m Coefficientenpaare von der gleichen Gradzahl n nach r, was auf Wurzeln m an der Zahl hindeutet, die nach r von der Ordnung Null sind. Denkt man sich dem x die erste Form, nämlich: $x = Ar$ ertheilt, und die Glieder niederer Ordnungen nach dem sehr grossen r weggelassen; so verwandelt sich unsere Gleichung in:

$$(426)\quad F(\alpha_1) - F'(\alpha_1)\frac{1}{A} + \frac{1}{2}F''(\alpha_1)\frac{1}{A^2} - \frac{1}{2.3}F'''(\alpha_1)\frac{1}{A^3} + \ldots\ldots + (-1)^n a_m\frac{1}{A^n} = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$(427)\quad F\left[\alpha_1 - \frac{1}{A}\right] = 0.$$

Da nun aber die Function $F(\alpha)$ die Eigenschaft hat, für α gleich $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$ zu verschwinden, so ergibt sich, dass Wurzeln unserer Gleichung, und zwar $n-1$ an der Zahl convergiren gegen:

$$(428)\quad \alpha_1 - \frac{1}{A} = \alpha_2, \qquad \alpha_1 - \frac{1}{A} = \alpha_3, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \alpha_1 - \frac{1}{A} = \alpha_n.$$

Der Werth $\alpha_1 - \frac{1}{A} = \alpha_1$ ist desshalb auszuschliessen, weil er mit der Voraussetzung eines sehr grossen r im Widerspruche steht.

Es ergeben sich hieraus die folgenden $n-1$ Werthe von x:

$$(429)\quad x = \frac{r}{\alpha_1 - \alpha_2}, \qquad \frac{r}{\alpha_1 - \alpha_3}, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{r}{\alpha_1 - \alpha_n}.$$

Die übrigen m Wurzeln erhält man ebenso, x gleich einer Constante B von mässigem Werthe voraussetzend, und nur die höchsten Glieder von B beibehaltend. Die sich dadurch ergebende Gleichung ist:

$$(430)\quad a_n B^m + b_n B^{m-1} + c_n B^{m-2} + \ldots\ldots + g_n = 0.$$

Diess ist aber der erste Coefficient der vorgelegten Differentialgleichung für $x = B$. Es ergeben sich

Erwägt man nun, dass eine jede Differentiation, an W_1 angebracht, den Exponenten eines jeden Factors im Nenner um die Einheit erhöhe, dass mithin der Form nach:

$$W_1^{(r)} = \frac{L}{(u-\alpha_2)^{h_2+r+1}(u-\alpha_3)^{h_3+r+1}\ldots\ldots(u-\alpha_n)^{h_n+r+1}} \tag{434}$$

sei, woraus durch Differentiation:

$$\frac{W_1^{(r+1)}}{W_1^{(r)}} = \frac{L'}{L} - \frac{h_2+r+1}{u-\alpha_2} - \frac{h_3+r+1}{u-\alpha_3} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{h_n+r+1}{u-\alpha_n} \tag{435}$$

abgeleitet wird; bemerkt man zudem, dass derjenige Factor eines Productes, der am raschesten wächst, das Mass seines Wachsthums auf das Produkt selber übertrage, und zieht in Erwägung, dass im zweiten Theile der Gleichung (435) das Glied $-\frac{h_2+r+1}{u-\alpha_2}$ das vorherrschende sei, wenn $u=\alpha_1$ gedacht wird; so hat man:

$$\frac{W_1^{(r+1)}}{W_1^{(r)}} = -\frac{r}{\alpha_1-\alpha_2}, \tag{436}$$

und hieraus erklärt sich ganz ungezwungen, wie $x < \frac{r}{\alpha_1-\alpha_2}$ sein muss, um in die absteigend geordnete Reihe Convergenz zu bringen. Es trifft diess aber nur die entwickelte Form und nicht die Reihe für W, nämlich:

$$W = W + W'(u-\alpha) + W''\frac{(u-\alpha)^2}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{437}$$

die keine Binomialcoefficienten, sondern nur die der Exponentialreihe angehörigen besitzt, trifft daher auch nicht das in Form eines h^{ten} Differentialquotienten gedachte particuläre Integral und führt nur zu der Folgerung, dass in einem jeden Falle die Anzahl der Glieder, bis zu welcher die entwickelte Form sich noch immer brauchbar gestaltet, nach den jedesmaligen Umständen zu bestimmen sei, und gelingt es, diejenigen Factoren erster Classe, die beim successiven Differenziren in den Zustand des unendlichen Wachsens gerathen, sämmtlich auszusondern, so wird man nur noch nöthig haben, z grösser zu wählen, als die grösste der mit α bezeichneten, unter (431) vorfindigen Wurzeln, und ist die halb convergirende in eine für solche x völlig convergente übergegangen.

Wie diese Aussonderung zu bewerkstelligen sei, kann erst später, wenn vom Integriren der Form eines bestimmten Integrales die Rede sein wird, auseinandergesetzt werden. Hier mag vorderhand nur bemerken, dass die verschiedenen Integrationsmethoden einander ergänzen, und gegenseitigen Ergebnisse ihrer Bedeutung nach erhellen.

Nicht immer hat der Werth von W_1 die ihm unter (433) zugetheilte Form. Einige F ren des Nenners und mitunter alle können fehlen. Diess wird der Bruch (413) dadurch verr dass für sehr grosse r Zähler und Nenner gemeinschaftliche Wurzelfactoren besitzen, der Bruc einer Abkürzung fähig ist, und zwar z. B. durch $x - \frac{r}{\alpha_1-\alpha_2}$, wenn in dem Nenner v

der Factor $(u-\alpha_2)^{k_2+1}$ nicht vorhanden ist. Es zeigt sich jedoch diese Abwesenheit in der Regel nicht erst bei der Discussion des in Rede stehenden Bruches, sondern gleich beim Beginne der Rechnung, d. h. bei der Bestimmung von W', W'', W''', ..., und erhellet bei dem Umstande, dass von irgend einem derselben angefangen $\alpha_1-\alpha_2$ im Nenner nicht mehr vorkömmt.

Gründlicher einzugehen in den Gegenstand der gegenwärtigen Untersuchungen dürfte so lange weniger frommen, als die hier der Function W ertheilte Form (433) nicht gerechtfertigt ist, was erst später geschehen kann. Nützlich aber wird es sein, die hier gewonnenen Ergebnisse in wenigen Worten zusammenzufassen und einige practische Bemerkungen daran zu knüpfen.

Die allgemein beim asymptotischen Integriren dem Integral zugetheilte Form eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, d. h. die:

$$y=\frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux}\,W\right]\Big\}_{\alpha},$$

stellt jedesmal eine bestimmte Function von x, die der Differentialgleichung Genüge leistet, mithin ein Integral dar, weil W immer eine bestimmte angebbare Function von u ist, indem es als aufsteigende Reihe, nämlich:

$$W=\mathrm{W}+\mathrm{W}'(u-\alpha)+\mathrm{W}''\frac{(u-\alpha)^2}{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wiedergegeben werden kann, die mindestens für solche u, die nahe an α liegen, immer convergirt, den Fall ausgenommen, wo der Differentiationsindex h eine ganze positive Zahl ist, und wo in die Function W ein Logarithmus $u-\alpha$ fällt, durch dessen Abscheidung indess die Convergenz wieder herbeigeführt ist, so dass man annehmen kann, W bedeute stets eine bestimmte Function von u mit oder ohne darin enthaltener logarithmischer Transcendente.

7. Verwandelt man den h^{ten} Differentialquotienten in die der weiteren Rechnung sich besser anschmiegende Form eines Produktes einer Exponentielle in eine Function erster Classe, die die Eigenschaften mit den algebraischen theilt, so erscheint wohl diese letztere nur ausnahmsweise geschlossen, in der Regel aber als absteigende unendliche Reihe, die sehr oft zu den halbconvergirenden zählt, d. h. denjenigen, bei welchen die Summirung einer gewissen Anzahl von Anfangsgliedern ein Resultat gibt, welches dem wirklichen Functionswerthe nur bis zu einer gewissen Grenze näher kömmt, sodann aber sich davon wieder entfernt, so dass es also nicht erspriesslich ist, diese Reihen in einer unbegrenzten Anzahl von Anfangsgliedern aufzuzeichnen, vielmehr jedesmal die Untersuchung einzuleiten ist, bis zu welchem Gliede eine solche Summirung nur Vortheil bringe.

Wiewohl man der halben Convergenz der absteigenden Reihen durch geeignete Transformation der das Integral darstellenden Reihe jedesmal entgehen kann, so thut man diess doch nur in sehr seltenen Fällen, weil durch ein solches Transformiren stets mehr oder weniger die Handsamkeit und Durchsichtigkeit des Ausdruckes verloren geht, und weil andererseits die Natur der Aufgabe, die zu einer linearen Differentialgleichung geführt hat, einen Ausdruck von grösserer analytischer Genauig-

keit nur höchst selten erheischt. Meistens ist es nämlich ein mechanisches Schwingungsproblem, welches vorliegt, und die unabhängige Veränderliche x bedeutet eine Entfernung vom Orte der ursprünglichen Erregung, und oft auch von einem sehr weit abgelegenen Puncte, bis zu welchem das in Schwingung begriffene System sich nicht einmal erstreckt. Man braucht daher das Integral für andere, als sehr grosse x entweder gar nicht, oder man ist nicht einmal zur Annahme der linearen Form der Differentialgleichung für kleinere x berechtigt. Da also dieses x jedesmal sehr gross angenommen werden muss, so forscht man naturgemäss vor allem anderen nach dem Verlaufe der Erscheinung, wie sie stattfindet in so grossen Entfernungen x, dass für dieselben die absteigende reduzirt werden kann auf ihr erstes Glied. Dann erst übergeht man zur Erörterung der complizirteren Phänomene, die Platz greifen für solche Entfernungen x, für welche dieselbe sich ohne merklichen Fehler auf die Summe von zwei, drei, vier Anfangsgliedern zusammenzieht. Bei einer solchen Behandlung des Gegenstandes ist nun der Einfluss der in den letzten Gliedern bemerkbaren halben Convergenz der Reihe um so geringer, als sich immer zwei nahe aneinander liegende Grenzen angeben lassen, innerhalb deren der wahre Functionswerth gelegen sein muss. Dass hiebei die wirkliche Angabe dieser Grenzen von hervorragender Wichtigkeit sei, versteht sich von selbst.

So wie die Theorie der algebraischen Gleichungen nicht nur den Nutzen hat, dass sie die Wurzeln derselben demjenigen verschafft, der ihrer benöthigt, sondern auch den noch weit grössern, dass sie Mittel an die Hand gibt, die wirkliche Berechnung der Wurzeln entbehrlich zu machen und doch alles zu erfahren, was man zu wissen wünscht, so verhält es sich auch mit der Theorie der Differentialgleichungen, nämlich man begnügt sich auch hier sehr oft gerne mit der monomischen Asymptote des particulären Integrales, die man in sehr vielen Fällen beinahe ohne Rechnung beim unmittelbaren Anblicke der Differentialgleichung kennen lernt, und mit den Aufschlüssen, die diesem eingliedrigen Ausdrucke entnommen werden können und die in der Regel den Verlauf verschiedener Erscheinungen zu erkennen geben in sehr grossen Entfernungen vom Anfangspuncte. Es kann demnach wünschenswerth sein, zu wissen, mit welcher Genauigkeit das erste Glied im Werthe von y für sehr grosse x die Function y wiedergebe, oder mit anderen Worten, in welchem Abstande:

$$y_1 = We^{\alpha x}x^h \tag{438}$$

von dem y der (384) stehe. Hier gelingt es nicht mehr, y in zwei Grenzen einzuschliessen von der Form der Function y_1 durch Veränderung des Coefficienten W, weil dieser eine Integrationsconstante ist, wohl aber lässt sich diese im gegenwärtigen Falle durch Variation des Exponenten h bezwecken, indem man sich denselben in $h+\gamma$ verwandelt denkt, unter γ einen möglichst klein gewählten Zusatz verstanden, der aber doch so gewählt ist, dass y entweder zwischen

$$y_1 = We^{\alpha x}x^h \text{ und } y_2 = We^{\alpha x}x^{h+\gamma}$$

fällt, oder auch, dass y zwischen:

$$y_1 = We^{\alpha x}x^{h+\gamma_1} \text{ und } y_2 = We^{\alpha x}x^{h+\gamma_2}$$

enthalten bleibt, diess alles nur im Bereiche jener Werthe von x, für welche die Differentialgleichung

in dieselbe Differentialgleichung ein. Das Resultat ist wieder in der Formel (439) enthalten, und w durch Umwandlung von h in $h + \gamma$ gewonnen in folgender Gestalt:

$$S' = We^{\alpha x} x^{h+\gamma-n} T. \tag{442}$$

Hier ist:

$$T = T + \left[\frac{dT}{dh} + U'_m x^{m+n-1}\right]\gamma + \frac{d^2T}{dh^2}\frac{\gamma^2}{2} + \ldots\ldots + \frac{d^nT}{dh^n}\frac{\gamma^n}{1.2\ldots n} \tag{443}$$

ein $n + 1$ gliedriger Ausdruck, der mit dem n^{ten} Differentialquotienten von T nach h abschlies muss, weil T nach h nur vom n^{ten} Grade ist und mithin alle höheren Differentialquotienten verschw den. Ordnet man nun T zuvörderst absteigend nach Potenzen von γ, indem man die $T = 0$ als ε Bestimmungsgleichung für γ ansieht, die Coefficienten aber der verschiedenen Potenzen von γ wie absteigend nach x, so ergibt sich, dass die Gradzahlen derselben insoferne, als sie beziehlich γ^n, γ^{n-1}, ... γ^2, γ, 1 gehörig sind, folgende seien:

$$m,\ m + 1,\ m + 2,\ \ldots\ldots\ m + n - 2,\ m + n - 1,\ m + n - 2.$$

Die n verschiedenen Werthe von γ, die als Wurzeln der $T = 0$ Genüge leisten, ı mithin von zweierlei Art. Die erste $n - 1$ an der Zahl unter ihnen, welche den Ansteigungen in Gradzahlen der Coefficienten, je um die Einheit auf das Paar, angehören, sind sämmtlich von Form: $ax + \ldots\ldots$, d. h. sie fangen in absteigender Reihenform mit einem Gliede wie ax an. letzte entspricht dem Abfalle vom letzten auf den vorletzten Coefficienten um die Einheit in der Gı zahl, ist mithin der Gestalt nach: $\gamma = \frac{b}{x} + \ldots\ldots$, d. h. ihre absteigende Entwicklung beginnt der reciproken ersten Potenz von x. Für genügend gross gedachte x ist somit diese letztere allen n Wurzeln ganz gewiss die kleinste, stellt mithin den allergeringsten Werth des Zusatze dar, der zu h hinzugefügt werden muss, um das Resultat der Substitution (441) durch Null hindur zuführen. Sie ist die einzige, die uns unter den Wurzeln γ interessirt und der Coefficient b il Anfangsgliedes lässt sich ohne Mühe auffinden, weil er aus den höchsten Gliedern der beiden letz Coefficienten auf eine leichte Weise abgeleitet wird. Sie sind beziehlich:

$$U'_m\ x^{m+n-1} \text{ und } \left(U_{m-1} + \frac{h}{1}U'_{m-1} + \frac{h(h-1)}{1.2}U''_m\right)x^{m+n-2}$$

mithin ist:

$$b = -\frac{U_{m-1} + \frac{h}{1}U'_{m-1} + \frac{h(h-1)}{1.2}U''_m}{U'_m}$$

und man kann annäherungsweise für sehr grosse x, die Wurzel γ auf ihr erstes Glied reduzirend

$$\gamma = -\frac{U_{m-1} + \frac{h}{1}U'_{m-1} + \frac{h(h-1)}{1.2}U''_m}{U'_m x} \tag{444}$$

annehmen. Nennt man jetzt ξ_1, ξ_2 zwei grosse Werthe von x und bezeichnet man die ihnen entsprechenden Werthe γ durch γ_1 und γ_2, so kann man asymptotische Curven verzeichnen, denen die Gleichungen:

$$y_1 = We^{ax}x^{h+\gamma_1}, \quad y_2 = We^{ax}x^{h+\gamma_2} \tag{445}$$

angehören. Die erste schneidet die Integralcurve in der Nähe des Punktes $x = \xi_1$, die zweite in der Nähe von $x = \xi_2$. Da sie nun sonst ähnlich, und ähnlich gelegen sind, so werden sie in dem ganzen Raume zwischen $x = \xi_1$ und $\alpha = \xi_2$ auf verschiedene Seiten der Integralcurve fallen, wenn sich nur nachweisen lässt, dass sie beide in diesem Zwischenraume keinen weiteren Durchschnitt mit der Integralcurve besitzen, was sich in der Regel durch die gebräuchlichen analytischen Hilfsmittel immer leisten lässt, wenn man nur ξ_2 nahe genug an ξ_1 wählt. Es kommt nämlich hier darauf an, nachzuweisen, dass die Gleichung $T = 0$, als Bestimmungsgleichung für x gedacht, weder für $\gamma = \gamma_1$ noch für $\gamma = \gamma_2$ in dem Intervalle zwischen $x = \xi_1$ und $x = \xi_2$ Wurzeln habe. Fourier's und Sturm's Lehrsätze sind bekannt, durch die man die An- oder Abwesenheit von Wurzeln zwischen gegebenen Grenzen festzustellen vermag. Diese haben mithin bei ähnlichen Untersuchungen in Anwendung zu kommen und es wird immer gelingen, die Integralcurve mindestens intervallmässig einzuschliessen zwischen zwei asymptotische Curven (445), die desto näher aneinander liegen werden, je geringer γ_1 und γ_2 sind, oder mindestens je geringer die Differenz $\gamma_2 - \gamma_1$ ausfällt. Diese Verringerung aber von γ_1 und γ_2 erzielt man durch Vergrösserung von ξ_1 und ξ_2, denn man hat kraft der Formel (444):

$$\gamma_1 = -\frac{U_{m-2} + \frac{h}{1}U'_{m-1} + \frac{h(h-1)}{1.2}U''_m}{U'_m\xi_1}$$

$$\gamma_2 = -\frac{U_{m-2} + \frac{h}{1}U'_{m-1} + \frac{h(h-1)}{1.2}U''_m}{U'_m\xi_2}.$$

Es lag nicht in der Absicht, den Gegenstand zu erschöpfen, oder auch nur viel einzugehen in das Detail der Untersuchung über das Mass der Convergenz eines gewonnenen Ausdruckes in der asymptotischen Form, denn diese spart man weit zweckmässiger auf für practische Fälle, wo die Integration einer vorliegenden Differentialgleichung zu einer Reihe von Naturgesetzen führt. Es lässt sich hier, wenn es irgendwo frommen sollte, noch gar Vieles leisten und man ist allgemein im Stande, die wirkliche Integralcurve in jedem beliebigen ihrer Theile in einer ganzen Reihe beliebig vieler Punkte schneiden zu lassen und so die Entfernung der einen von der anderen in allen Punkten beliebig klein zu machen. Diess erzielt man namentlich durch Berechnung des particulären Integrales mit einer passenden Anzahl von Anfangsgliedern und durch Variren der ihnen angehörigen Coefficienten W′ W″... in entsprechender Anzahl und der Constante h. Eine allgemeine Auseinandersetzung jedoch einer solchen Ausgleichungsmethode in voller Allgemeinheit lässt sich so schwer mit Klarheit durchführen, dass es räthlicher schien, davon abzulassen, und sich mit den beigebrachten Andeutungen zu begnügen.

§. 9.

Asymptotische Integration der allgemeinen Differentialgleichung mit quadratischen Coefficienten.

Wiewohl es hauptsächlich im Zwecke dieses Werkes liegt, zureichende Integrationsmethoden aufzustellen für alle Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, nicht aber diese Methoden durch eine reiche Auswahl von Beispielen einzuüben, welches letztere sich, wie schon oft erwähnt, am allererspriesslichsten an solchen Differentialgleichungen bewerkstelligen lässt, welche die Auflösung eines mechanischen oder physikalischen Problemes in sich enthalten und in ihrer practischen Tendenz auch zur leichten Bezeichnung derjenigen Formen leiten, die unter den vielen Möglichen vorzugsweise auszuwählen sind, das Integral darzustellen, weil sie den lichtvollsten Ausdruck der Erscheinungen in sich enthalten, über deren Gesetz man Belehrung wünscht. Gleichwohl ist es von Nutzen, mindestens in einem einzigen Beispiele den Gebrauch einer solchen Integrationsmethode im Detail durchzuführen, weil diess zu einem gründlicheren Verständnisse derselben dienlich ist, und die Wahl mag hier dieselbe allgemeine Differentialgleichung der zweiten Ordnung treffen mit quadratischen Coefficienten, die wir auch im §. 3 dieses Abschnittes dem Integriren in absteigender Reihenform unterworfen haben, nämlich die:

$$(446) \qquad (a_2x^2 + b_2x + c_2)\, y'' + (a_1x^2 + b_1x + c_1)\, y' + (a_0x^2 + b_0x + c_0)\, y = 0.$$

Von ihr ist am bezeichneten Orte bereits bemerkt worden, erstens, dass durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen dem ersten Coefficienten mit Vortheil die einfachere Form $x(x-b)$ ertheilt werden könne, und zwar auf zwei verschiedene Arten; und zweitens, dass durch Sonderung eines exponentiellen Faktors $e^{\theta x}$ aus dem Integrale der Differentialgleichung der letzte Coefficient um die Einheit in der Gradzahl herabgesetzt werden könne und diess zwar wieder auf zwei verschiedene Arten, je nachdem es das eine oder das andere der beiden particulären Integrale ist, welches durch diese Sonderung des exponentiellen Faktors zur ersten Classe hergebracht wird. Die eingeleitete doppelte Transformation ertheilt nun der vorliegenden Gleichung im Allgemeinen die Form:

$$(447) \qquad x(x-b)\, y'' - [\beta x(x-b) + p(x-b) + qx]\, y' + [\beta g x + c]\, y = 0$$

und diess zwar für vier verschiedene Systeme von Werthen der constanten Parameter: b, β, g, c, während p und q dieselben bleiben, Werthe, die unter (247) verzeichnet sind. Mithin genügt es, die vorliegende (447) allgemein der asymptotischen Integration zu unterwerfen, weil hiemit alle der Form nach übereinstimmenden vier Differentialgleichungen, die sich aus der (446) ableiten lassen, zur Integration gebracht sind. Es genügt überdiess, das particuläre Integral erster Classe der Berechnung zu unterwerfen, weil man nach Belieben jedes der beiden in der (446) enthaltenen auf die erste Classe zu reduziren vermag.

Man denke sich also das Integral in der Form:

$$y = \frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux}W\right]\Big\}_\alpha \tag{448}$$

so hat man in Gemässheit der Formeln (328) von §. 5, die gegenwärtig zu gelten haben:

$$\begin{aligned} U_2 &= u^2 - \beta u \\ U_1 &= -bu^2 + (b\beta - p - q)\,u + \beta g \\ U_0 &= bpu + c \end{aligned} \tag{449}$$

Die unter (131) erscheinende $U_2 = 0$ liefert jetzt die beiden Substitutionszahlen als Wurzeln, nämlich:

$$\alpha = 0 \qquad \text{und} \qquad \alpha = \beta$$

Nur der ersten von ihnen entspricht das particuläre Integral erster Classe. Wir haben also auch nur zu schaffen mit der ersten der beiden Substitutionszahlen und berechnen ihr entsprechend die Werthe der unter (336) erscheinenden symbolischen Zeichen: $h \underset{*}{-} r,\ h \overset{*}{-} r,\ h \overset{*'}{-} r,\ h \overset{*''}{-} r, \ldots\ldots\ldots\ldots$ Sie sind:

$$h \underset{*}{-} r = -\beta(g-r),\ h' \overset{*}{-} r = c + (g-r)(f-r),\ h \overset{*}{-} r = br(l+r),\ h \overset{*''}{-} r = h \overset{*'''}{-} r = \ldots\ldots\ldots 0 \tag{450}$$

allwo der Kürze wegen:

$$f = b\beta - p - q + g - 1\ ,\quad l = p - g \tag{451}$$

gesetzt worden ist. Mit ihrer Hilfe construiren sich alsogleich die zur Bestimmung von W', W'', W''', W^{IV} ..... dienenden unter (338) (339) (340) (341) ..... ersichtlichen Gleichungen, denen wir das bekannte combinatorisch-graphische Rechnungsverfahren entnommen haben. Sie geben:

$$g\beta W' = -\left[c + gf\right]W \tag{452}$$

$$g(g-1)\beta^2 W'' = \Big\{\left[c + gf\right]\left[c + (g-1)(f-1)\right] - bg\beta(l+1)\Big\}\,W$$

$$g(g-1)(g-2)\beta^3 W''' = -\left\{\begin{array}{l} (c+gf)\left[c + (g-1)(f-1)\right]\left[c + (g-2)(f-2)\right] \\ \quad - bg\beta(l+1)\left[c + (g-2)(f-2)\right] \\ \quad - 2b(g-1)\,\beta(l+2)\,(c+gf) \end{array}\right\} W$$

$$g(g-1)(g-2)(g-3)\beta^4 W^{IV} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} (c+gf)\left[c+(g-1)(f-1)\right]\left[c+(g-2)(f-2)\right]\left[c+(g-3)(f-3)\right] \\ \quad - bg\beta(l+1)\left[c+(g-2)(f-2)\right]\left[c+(g-3)(f-3)\right] \\ \quad - 2b(g-1)\,\beta(l+2)\left[c+gf\right]\left[c+(g-3)(f-3)\right] \\ \quad - 3b(g-2)\,\beta(l+3)\left[c+gf\right]\left[c+(g-1)(f-1)\right] \\ \quad + 3b^2 g(g-2)\,\beta^2(l+1)(l+3) \end{array}\right\} W$$

$$g(g-1)(g-2)(g-3)(g-4)\beta^5 W^{v} =$$

$$= -\left\{\begin{array}{l} [c+gf][c+(g-1)(f-1)][c+(g-2)(f-2)][c+(g-3)(f-3)][c+(g-4)(f-4)] \\ -b\beta g(l+1)[c+(g-2)(f-2][c+(g-3)(f-3)][c+(g-4)(f-4)] \\ -2b\beta(g-1)(l+2)[c+gf][c+(g-3)(f-3][c+(g-4)(f-4)] \\ -3b\beta(g-2)(l+3)[c+gf][c+(g-1)(f-1][c+(g-4)(f-4)] \\ -4b\beta(g-3)(l+4)[c+gf][c+(g-1)(f-1][c+(g-2)(f-2)] \\ +1.3b^2\beta^2 g(g-2)(l+1)(l+3)[c+(g-4)(f-4)] \\ +1.4b^2\beta^2 g(g-3)(l+1)(l+4)[c+(g-2)(f-2)] \\ +2.4.b^2\beta^2(g-1)(g-3)(l+2)(l+4)(c+gf) \end{array}\right\} W$$

und die aus diesen Gleichungen gewonnenen Werthe, deren sich beliebig viele nach dem im §. 5 aufgestellten Verfahren ableiten lassen, gebraucht man entweder, um die Function W in aufsteigender Reihenform nach Potenzen von u zu construiren, mithin y, wie folgt, darzustellen:

(453)
$$y = \frac{d^g}{du^g}\left[e^{ux}\left(W + W'u + W''\frac{u^2}{2} + \ldots\ldots\right)\right],$$

oder auch, ihm die Gestalt der absteigenden Reihe zu ertheilen:

(454)
$$y = Wx^g + \binom{g}{1} W'x^{g-1} + \binom{g}{2} W''x^{g-2} + \ldots\ldots$$

Die hier vorkommenden Binomialcoefficienten bringen es mit sich, dass für ganze und positive Werthe von g diese absteigende Reihe mitunter eine abbrechende wird. Nach den Bedingungen, unter welchen diess stattfindet forscht man gerne, wenn sich in der Differentialgleichung unbestimmt gelassene Parameter vorfinden, die dieselbe zu erfüllen vermögen, wenn diess auch nur wäre, um für die Discussion ein passendes Gliederungsprincip zu haben. Dieses Abbrechen kann stattfinden gleich nach dem ersten Gliede, wenn $g = 0$ ist und hiebei W' nicht unendlich wird. Diess erfordert, wie die erste der Bestimmungsgleichungen (452) lehrt: $c = 0$. In der That sieht man, dass für:

(455)
$$c = 0 \quad , \quad g = 0$$

alle diese Gleichungen identisch erfüllt sind, was auch W', W'', W''', ... bedeuten mögen, also auch dann, wenn man sie alle verschwinden lässt. Hiebei geht y in eine Constante W über und die vermöge solcher Annahmen vereinfachte Differentialgleichung:

$$x(x-b)\,y'' - [\beta(x(x-b)) + p(x-b) + qx]y' = 0$$

liefert, als eine der ersten Ordnung nach y' behandelt:

(456)
$$y = \int e^{\beta x} x^p (x-b)^q dx + W$$

als allgemeines Integral. Nach dem zweiten Gliede bricht die Reihe ab, wenn $g = 1$ wird und gleicher Zeit:

(457)
$$(c+f)\,c - b\beta(l+1) = 0$$

usfällt. Diese kann als Bestimmungsgleichung für den Parameter c angesehen werden und gibt als olche für denselben zwei verschiedene Werthe, so dass man in zwei verschiedenen Fällen:

$$y = \mathrm{W}\left[x - \frac{c+f}{\beta}\right] \tag{458}$$

at. Auf dieselbe Weise findet das Abbrechen Statt nach dem dritten Gliede, wenn $g = 2$ und noch überdiess:

$$(c+2f)\,(c+f-1)\,c - 2b\beta(l+1)\,c - 2b\beta(l+2)\,(c+2f) = 0 \tag{459}$$

t, eine Gleichung, aus welcher drei Werthe von c hervorgehen, so dass man in drei verschiedeen Fällen:

$$y = \mathrm{W}\left[x^2 - \frac{c+2f}{2\beta}\,x + \frac{(c+2f)\,(c+f-1) - 2b\beta(l+1)}{2\beta^2}\right] \tag{460}$$

rhält. Nach dem vierten Gliede bricht die Gleichung ab und gibt ein dem dritten Grade angehöriges y, venn $g = 3$ und zugleich:

$$\begin{aligned}(c+3f)\,[c+2(f-1)]\,[c+f-2]\,c - 3b\beta(l+1)\,[c+f-2]\,c - 4b\beta(l+2)\,[c+3f]\,c - \\ - 3b\beta(l+3)\,[c+3f]\,[c+2(f-1)] + 9b^2\beta^2(l+1)\,(l+3) = 0\end{aligned} \tag{461}$$

st, diess ist nach c eine Gleichung des vierten Grades, mithin gibt es vier verschiedene Fälle, in velchen y viergliedrig und geschlossen ist, nämlich:

$$\begin{aligned}y = \mathrm{W}\Big[x^3 - \frac{c+3f}{3\beta}\,x^2 + \frac{(c+3f)\,[c+2(f-1)] - 3b\beta(l+1)}{6.\beta^2}\,x - \\ - \frac{(c+3f)[c+2(f-1)][c+f-2] - 3b\beta(l+1)[c+f-2] - 4b\beta(l+2)\,[c+3f]}{6.\beta^3}\Big]\end{aligned} \tag{462}$$

ind auf diese Weise lässt sich die Untersuchung nach geschlossenen Formeln beliebig fortsetzen und s ist klar, dass sie in unzähligen Fällen vorhanden sein können, wenn es der Differentialgleichung an assenden Parametern nicht gebricht. Desswegen geht aber auch unter so bewandten Umständen die symptotische Integration in eine mehr oder minder langwierige Discussion zahlreicher einzelner Fälle useinander, die vorzunehmen nur dann der Mühe lohnt, wenn in der Differentialgleichung die Aufösung enthalten ist einer Reihe von wichtigen Problemen der Physik oder Mechanik. Die grosse Manigfaltigkeit der geschlossenen Formen wird noch vermehrt erstens durch den Umstand, dass in allen angeführten Bedingungsgleichungen eines solchen Bestehens (457) (459) (461) Parameter vorhanen sind, die mehrere verschiedene Werthe anzunehmen vermögen. Zweitens kann irgend eines der articulären Integrale oder auch beide nur darum nicht geschlossen erscheinen, weil ihm ein Faktor x^p oder $(x - b)^q$ anhängt, und die Befreiung von diesem einen Faktor oder von beiden vermag die eschlossene Form wieder hervorzubringen. Drittens können selbst die angeführten geschlossenen Ausrücke (458) (460) und (462) noch dadurch eine Kürzung erfahren, dass die Coefficienten eines oder nehrerer ihrer letzten Glieder in Null übergehen. Auf alle diese Umstände hat der Rechner zu achten, ler nach geschlossenen Formen strebt.

Sehr oft aber sind solche geschlossene Integralausdrücke gar nicht vorhanden und geben sich schon dadurch als unmöglich zu erkennen, dass sämmtliche Differentiationsindices h weder ganze positive Zahlen, noch Functionen constanter Parameter sind, die gelegentlich in ganze Zahlen übergehen können, sondern entweder gebrochene oder negative Zahlenwerthe. Man hat also mit unendlichen Reihen zu thun, und bricht man diese willkührlich bei irgend einem Gliede ab, so begnügt man sich im Grunde mit einer asymptotischen Curve des wirklichen Integrales und es ist dann gut, wenn man über den Grad der Annäherung derselben zur wirklichen Integralcurve gehörig unterrichtet ist. Es ist zu diesem Zwecke im vorhergehenden Paragraphe gezeigt worden, wie man vorzugehen habe, um diese Integralcurve zwischen zwei beliebig nahe an einander zu bringende asymptotische Curven einzuschliessen und zwar beginnt man diess am allerliebsten mit den äussersten Ausläufern dieser krummen Linien, denen bereits sehr grosse Werthe von x angehören, weil selbst die Differentialgleichungen grösstentheils nur für solche grösste Werthe von x gelten, und man bei einem rationellen Vorgange genöthigt ist, beiläufig auf folgende Weise zu fragen: Erstens was geschieht in einer so grossen Entfernung x, dass man das Integral auf sein erstes Glied reduzirt ansehen kann; zweitens was geschieht in geringeren Entfernungen, für die man das Integral auf die Summe von zwei, drei u. s. w. Gliedern reduzirt anzunehmen vermag.

Untersuchen wir also vor allem Andern, mit welcher Genauigkeit der auf sein erstes Glied reduzirte Werth von y, nämlich:

$$y = \mathrm{W}x^{g} \tag{463}$$

den wahren Werth des Integrales wiedergebe für sehr gross gedachte x. Zu diesem Zwecke ist es nothwendig, $\mathrm{W}x^g$ anstatt y in die Differentialgleichung einzuführen und als Substitutionsresultat ins Auge zu fassen. Es ist:

$$S = x^{g}(c + gf) + x^{g-1}\, bg(l + 1). \tag{464}$$

Sein Zeichen ist für sehr grosse Werthe von x von jenem des Coefficienten $c + gf$ abhängig, ändert sich daher von irgend einem genügend gross gewählten x angefangen nicht mehr, mithin befindet sich von einem solchen x an die asymptotische Curve (463) ganz auf der einen Seite der Integralcurve. Einen solchen Werth des x wollen wir bezeichnen mit ξ. Sein numerischer Werth ist grösser als jener des Bruches:

$$\frac{bg(l + 1)}{c + gf}. \tag{465}$$

Um jetzt zu einer zweiten asymptotischen Curve zu gelangen, die sich von $x = \xi$ angefangen auf der entgegengesetzten Seite der wirklichen Integralcurve befindet, denke man sich den Exponenten g um einen gewissen, möglichst kleinen Zusatz γ vermehrt. Diess gibt eine neue asymptotische Gleichung:

$$y_1 = \mathrm{W}x^{g+\gamma} \tag{466}$$

und es ist das ihr entsprechende Substitutionsresultat:

$$S' = x^{g+\gamma-1}\left\{\gamma^2[x-b]+\gamma[-\beta x^2+(g+f)x+b(l+1)]+x(c+gf)+bg(l+1)\right\} \qquad (467)$$

Für $\gamma = 0$ fällt S' mit S zusammen; für sehr kleine γ haben S' und S annoch dasselbe Zeichen; lässt man aber γ ferner zunehmen, so wird sehr bald das Glied mit der ersten Potenz wegen des Bestandtheiles $-\beta x^2$ seines Coefficienten, welcher wegen des gross gedachten x einen bedeutenden Werth hat, sich geltend machen und man wird das Zeichen von γ so wählen können, dass bei fortwachsendem γ zuvörderst $S' < S$, dann $S' = 0$ und endlich S' dem S dem Zeichen nach entgegengesetzt wird. Wie gross zu diesem Zwecke γ gewählt werden müsse, zeigt die Gleichung $S' = 0$, d. h. die:

$$\gamma^2(x-b)+\gamma[-\beta x^2+(g+f)x+b(l+1)]+x(c+gf)+bg(l+1)=0 \qquad (468)$$

der man aber nur für grosse x, nämlich für $x \gtrless \xi$ Genüge zu leisten hat und zwar mit dem kleinsten der beiden Werthe, die diese Gleichung erfüllen. Man gewahrt in ihr, x als denjenigen constanten Parameter ansehend, als dessen Functionen die Wurzeln betrachtet werden, vom ersten auf den zweiten Coefficienten ein Ansteigen um die Einheit in der Gradzahl nach eben diesem x, mithin eine Wurzel, die, in absteigender Reihenform gedacht, anfängt mit dem Gliede βx. Dann folgt vom zweiten Coefficienten auf den dritten ein Abfall um die Einheit in der Gradzahl, welchem eine Wurzel entspricht, die, in der absteigenden Reihenform wiedergegeben, ein Anfangsglied $\frac{c+gf}{\beta x}$ besitzt. Diese Letztere ist offenbar für genügend grosse x von beiden die kleinere, stellt mithin das kleinste γ dar, welches für diesen Werth von x das Substitutionsresultat S' durch Null hindurchführt. Gerechnet in absteigender Reihenform nach den hiefür bestehenden Methoden, die man in Heger's Abhandlung über algebraische Buchstabengleichungen (Denkschriften der math. naturw. Classe Band XXII.) auseinandergesetzt findet, sieht es aus, wie folgt:

$$\gamma = \frac{c+gf}{\beta x} + \frac{(g+f)(c+gf)+\beta bg(l+1)}{\beta^2 x^2} + \qquad (469)$$

$$+\frac{1}{\beta^3 x^3}\left[(g+f)^2(c+gf)+(c+gf)^2+\beta bg(l+1)[g^2+2gf+c]\right]+\ldots\ldots$$

Es kömmt sehr oft vor, dass die Differentialgleichung die Bewegungsgesetze in sich enthält eines begrenzten Systemes von materiellen Punkten, das von $x = \xi_1$ bis $x = \xi_2$ reicht, unter ξ_1 und ξ_2 bereits ziemlich grosse Coordinatenwerthe verstanden, für welche S das Zeichen nicht mehr ändert. Substituirt man nun anstatt x zuvörderst die Coordinate ξ_1 des Anfangspunktes des Systemes, dann die Coordinate ξ_2, die dem Endpunkte desselben angehört, so erhält man, ihnen entsprechend, aus der vorliegenden Formel auch zwei Werthe γ, die wir mit γ_1 und γ_2 bezeichnen wollen, und ihnen angehörig zwei asymptotische Curven, nämlich:

$$y_1 = Wx^{g+\gamma_1}, \quad y_2 = Wx^{g+\gamma_2} \qquad (470)$$

Die erste von ihnen schneidet die Integralcurve im Punkte $x = \xi_1$, die andere im Punkte $x = \xi_2$ und sie werden sich ganz zu verschiedenen Seiten der Integralcurve befinden, wenn die beiden Gleichungen, aus denen ξ_1 und ξ_2 berechnet werden, wenn y_1 und y_2 gegeben sind, d. h. die:

$$
(471) \quad \begin{aligned}
-\beta y_1 \xi^2 + [y_1^2 + (g + f) y_1 + c + gf] \xi - b y_1^2 + b (l + 1) y_1 + bg (l + 1) = 0 \\
-\beta y_2 \xi^2 + [y_2^2 + (g + f) y_2 + c + gf] \xi - b y_2^2 + b (l + 1) y_2 + bg (l + 1) = 0
\end{aligned}
$$

zwischen $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$ weiter keine Wurzel besitzen, oder, was in geometrischer Sprache dasselbe ist, wenn zwischen diesen Grenzen weder die eine, noch die andere der beiden asymptotischen Curven die Integralcurve durchschneidet, eine Bedingung, die durch entsprechende Verringerung der Differenz $\xi_2 - \xi_1$ immer erfüllt werden kann.

Es geschieht aber auch oft, dass die Differentialgleichung von einem unbegrenzten Systeme spricht, und dass man sich die Veränderliche x aller möglichen Werthe fähig denken muss von $x = \xi$ bis $x = \infty$, unter ξ abermals einen genügend grossen Abscissenwerth verstanden. Will man hier die Integralcurve einschliessen zwischen zwei asymptotischen krummen Linien, so kann man die (463) und (466) als solche erkiesen. Von ihnen befindet sich die erste, wie bereits gesagt, von $x = \xi$ an ganz auf der einen Seite dieser Integralcurve, weil für $x \gtreqless \xi$ das Substitutionsresultat S im Zeichen keine Aenderung mehr erfährt. Die zweite, die (466), aber wird sich dann ganz auf der andern Seite derselben befinden, wenn man y genügend gross wählt. Um nun das kleinste y aufzufinden, welches diess leistet, kann man die folgenden Betrachtungen anstellen: Für $y = 0$ hat man $S' = S$, und man bekommt noch dazu $S = 0$, wenn man

$$
(472) \qquad x = -\frac{bg (l + 1)}{c + gf}
$$

setzt, mithin wird die Integralcurve von der ersten asymptotischen in einem einzigen Punkte geschnitten. Nimmt man jetzt y mit dem entsprechenden Zeichen von der Nulle verschieden und zuvörderst unendlich klein an, so gewinnt die $S' = 0$, oder was dasselbe ist, die (468), als Gleichung in x gedacht, alsogleich zwei Wurzeln, von welchen die eine unendlich, die andere von der (472) wenig verschieden ist. Mithin schneidet die zweite Asymptote (466) für sehr kleine y die Integralcurve bereits in zwei Punkten, von denen der zweite sich in unendlicher Entfernung befindet. Beim fortwährenden Wachsen von y nähern sich diese beiden Durchschnittspunkte und fallen endlich in einen einzigen zusammen. Die Asymptote ist dann ganz durch die Integralcurve durchgegangen und befindet sich an der entgegengesetzten Seite derselben und zwar in Berührung mit einem einzigen Punkte, dessen x eine doppelte Wurzel der (468) ist. Frägt man also nach den Bedingungen, unter welchen die (468) gleiche Wurzelwerthe für x zulässt, d. h. nach dem Werthe von y, bei dem diess geschieht; so hat man auch die gesuchte zweite Asymptote. Zu diesem Zwecke muss aber die (468) differenzirt werden nach x und der Differentialquotient der Nulle gleich gesetzt, wodurch man erhält:

$$
(473) \qquad 2\beta y x = y^2 + (g + f) y + c + gf.
$$

Aus dieser und der (468), jede Spur von x eliminirend, gewinnt man weiter:

$$4b\beta\left[-\gamma^2+(l+1)\gamma+g(l+1)\right]+\left[\gamma^2+(g+f)\gamma+c+gf\right]^2=0 \qquad (474)$$

und hieraus ergeben sich vier Werthe von γ, von denen aber offenbar hier nur diejenigen beachtet werden müssen, denen ein aus der (473) zu ziehendes x entspricht, welches zwischen ξ und ∞ fällt. Man wird also in diese Formel (473) alle vier Werthe von γ zu substituiren und dieser Bedingung gemäss dann den brauchbarsten auszuwählen haben und diess ergibt dann, in die (466) eingeführt, die gesuchte Asymptote.

Diese Betrachtungen, die sich nicht wesentlich ändern, wenn man anstatt eines Paares reeler Integrale ein Paar imaginärer vorliegen hat, zeigen wieder deutlich, dass es bei der Integration linearer Differentialgleichungen gar nicht ankomme auf die Darstellung convergirender Reihen, weil man oft schon der monomischen Asymptote alles dasjenige zu entnehmen im Stande ist, was man zu wissen wünscht, ohne sich auf eine Erörterung der Reihen einzulassen. Die Differentialgleichung selbst, behandelt mit der gehörigen Umsicht, übernimmt die Rolle des Ergänzungsgliedes, d. h. sie verhilft zu Grenzwerthen, zwischen denen der wahre Functionswerth enthalten ist.

Kann man sich mit dem ersten asymptotischen Bestandtheile der particulären Integrale nicht begnügen und benöthigt man einen genaueren Ausdruck für dasselbe, so verschafft man sich ihn dadurch, dass man die y darstellende unendliche Reihe in einer entsprechenden Anzahl von Anfangsgliedern rechnet. Diess ist im Vorhergehenden bereits geschehen bis zum Coefficienten $\mathbf{W}^{\text{v}}$, also bis zum Belaufe von sechs Gliedern. Die Genauigkeit, mit welcher ein so gebildeter Ausdruck das particuläre Integral der Differentialgleichung wiedergibt, ist aus dem Substitutionsresultate ersichtlich, welches man in einem jeden speciellen Falle zu studieren hat in seinem ursprünglichen Werthe sowohl, wie er durch die Formel (356) gegeben ist, als auch in dem varirten, den man erhält, wenn man den letzten Coefficienten $\mathbf{W}$ mit einem Zusatze w versieht, der eine Zeichenänderung eben dieses Substitutionsresultates herbeiführt. Man wird auf diese Weise Grenzen gewinnen, zwischen denen der wahre Werth des Integrales enthalten ist und so wird denn die Differentialgleichung selbst die Function des Ergänzungsgliedes der Reihe übernehmen. Das in Rede stehende Substitutionsresultat ist allgemein in der Formel (410) enthalten und sieht für den gegenwärtigen speciellen Fall einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit quadratischen Coefficienten einfach genug aus, nämlich:

$$\begin{aligned} S'_r = \binom{h}{r-1} e^{ax} x^{h-r-1} \Bigg[& \frac{h-r+1}{r} \Big\{ \big[[c+(g-r)(f-r)]x + (h-r)b(l-r-1) \big] \mathbf{W}^{(r)} \\ & \quad + br(l-r)x \,.\, \mathbf{W}^{(r-1)} \Big\} \\ & + \mathrm{w}^{(r)} \Big\{ \beta(g-r+1)x^2 + \frac{h-r+1}{r}(c+(g-r)(f-r))x + \\ & \quad + \frac{(h-r+1)(h-r)}{r} b(l-r-1) \Big\} \Bigg] \end{aligned} \qquad (475)$$

Es ist giltig für jeden Werth des ganzen und positiven Stellenzeigers r, d. h. es stellt das Ergebniss dar der Substitution des folgenden Ausdruckes für y in die Differentialgleichung:

$$y = e^{\alpha x}\left[\mathrm{W}x^h + \binom{h}{1}\mathrm{W}'x^{h-1} + \binom{h}{2}\mathrm{W}''x^{h-2} + \ldots\ldots + \binom{h}{r}(\mathrm{W}^{(r)} + \mathrm{w}^{(r)})\, x^{h-r}\right] \tag{476}$$

unter W', W'', ... die durch die Gleichungen (452) bestimmten Werthe verstanden, und es handelt sich nur noch darum, für $\mathrm{w}^{(r)}$ nahe genug an einander liegende Werthe zu finden, die diesem Resultate entgegengesetzte Zeichen verleihen und das zwar nur für solche x, die im Bereiche liegen derjenigen Aufgabe, die zu der vorgelegten Differentialgleichung geführt hat. Die Aufstellung solcher Grenzen für $\mathrm{w}^{(r)}$ unterliegt offenbar in keinem Falle irgend erheblichen Schwierigkeiten und lässt sich stets auf Grundlage der bekannten Eigenschaften algebraischer Polynome mit Leichtigkeit und Präcision bewerkstelligen. Der Mechanik entnommene Probleme bieten hier die allereinfachsten Beispiele und es soll später, wo von der Integration partieller Differentialgleichungen die Rede sein wird, dieser Grenzenbestimmung in ein paar einfachen speciellen Beispielen noch Erwähnung geschehen.

§. 10.

Bestimmte Integrale.

Wer in Formen schwelgen und sich gelegentlich darin ganz verlieren will, dem bieten die bestimmten Integrale zu solchem Beginnen ein unabsehbares Feld und er wird ohne Mühe die mannigfaltigsten Formen von Differentialgleichungen auffinden, denen irgend wie gestaltete bestimmte Integrale als Genüge leistende Werthe zukommen. Da man aber in einer Wissenschaft, die ohnediess eine beinahe zu beträchtliche Ausdehnung hat, erspriesslicher Weise nicht nach kleinen Verfahrungsarten streben kann, die nur auf specielle Formen von Differentialgleichungen Bezug haben und vielmehr bestrebt sein muss, die bereits bekannten kleinen Kunstgriffe dieser Art, die nur in einem winzigen Beispiele Anwendung finden, das noch überdiess keine practische Bedeutung hat, als unnützen Ballast über Bord zu werfen; so kann hier nur von einer einzigen Form bestimmter Integrale die Rede sein, derjenigen nämlich, durch die im zweiten Abschnitte Differentialgleichungen mit Coefficienten, wie $ax + b$, allgemein integrirt worden sind und der auch in der Formenlehre ein Paar Paragraphe gewidmet wurden nämlich:

$$y = \int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V du \tag{477}$$

und es soll am gegenwärtigen Orte dasjenige, was bereits im §. 19 und 20 der Formenlehre von dieser Form gesagt worden ist und sich alldort nur in speciellen Fällen dargethan findet, hier allgemein bewiesen, was dort nur einer mangelhaften Darstellung fähig war, weil es auf Lehren beruhte, die erst später vorgetragen werden konnten, hier vervollständigt werden. Endlich soll der innige Zusammenhang, der zwischen der asymptotischen Form des Integrales und der hier in Rede stehenden obwaltet, klar und

erschöpfend dargethan werden, und diess zwar auf Grundlage derjenigen analytischen Erfahrungen, die uns beim Integriren in der absteigenden und aufsteigenden Reihenform entgegen getreten sind:

Das Substitutionsresultat, welches man gewinnt, den vorliegenden Werth von y in Form eines bestimmten Integrales in die allgemeine Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung mit Coefficienten der Gradzahl m d. h. in die:

$$\begin{aligned}&[a_n x^m + b_n x^{m-1} + \ldots\ldots + g_n]\,y^{(n)} + [a_{n-1} x^m + b_{n-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + g_{n-1}]\,y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ [a_1 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + g_1]\,y' + [a_0 x^m + b_0 x^{m-1} + \ldots\ldots + g_0]\,y = 0\end{aligned} \tag{478}$$

sieht aus, wie folgt:

$$\int_{u'}^{u''} e^{ux}\,[U_m x^m + U_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + U_1 x + U_0]\,V du = 0 \tag{479}$$

Hier sind U_m, U_{m-1} ..... U_1, U_0 genau dieselben algebraischen Polynome in u, die wir in §. 7 bei der asymptotischen Integration derselben Gleichung kennen gelernt haben, nämlich:

$$\begin{aligned}U_m &= a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + a_{n-2} u^{n-2} + \ldots\ldots + a_1 u + a_0 \\ U_{m-1} &= b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + b_{n-2} u^{n-2} + \ldots\ldots + b_1 u + b_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_0 &= g_n u^n + g_{n-1} u^{n-1} + g_{n-2} u^{n-2} + \ldots\ldots + g_1 u + g_0.\end{aligned} \tag{480}$$

Dadurch, dass man den ersten Theil der durch schickliche Wahl des V in Function von u und des u' und u'' identisch zu machenden Gleichung in seine Bestandtheile zerlegt, und diese dem Verfahren des theilweisen Integrirens beziehungsweise $m, \ldots . m-1, 1, 0$-Mal unterwirft, sodann aber die bereits integrirt erscheinenden Glieder für sich, die anderen noch unter dem Integralzeichen befindlichen ebenfalls für sich der Nulle gleich setzt, gelangt man zu den folgenden zwei Gleichungen:

$$\frac{d^m}{du^m}[U_m V] - \frac{d^{m-1}}{du^{m-1}}[U_{m-1} V] + \frac{d^{m-2}}{du^{m-2}}[U_{m-2} V] - \ldots\ldots + (-1)^m [U_0 V] = 0 \tag{481}$$

$$0 = e^{ux}\left\{\begin{aligned}&x^{m-1} U_m V \\ &+x^{m-2}\Big[U_{m-1} V - \frac{d}{du}[U_m V]\Big] \\ &+x^{m-3}\Big[U_{m-2} V - \frac{d}{du}[U_{m-1} V] + \frac{d^2}{du^2}[U_m V]\Big] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+x\ \ \Big[U_2 V - \frac{d}{du}[U_3 V] + \frac{d^2}{du^2}[U_4 V] - \ldots\ldots + (-1)^{m-2}\frac{d^{m-2}}{du^{m-2}}[U_m V]\Big] \\ &+\ \ \ U_1 V - \frac{d}{du}[U_2 V] + \frac{d^2}{du^2}[U_3 V] - \ldots\ldots + (-1)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{du^{m-1}}[U_m V]\Big]\end{aligned}\right\}_{u'}^{u''} \tag{482}$$

Wir deuten in bequemerer Schreibweise die Differentialquotienten nach u, so wie beim asymptotischen Integriren durch beigesetzte Striche an; so lässt sich die erste dieser Gleichungen aufzeichnen in einer der folgenden Formen:

$$[U_m V]^{(m)} - [U_{m-1} V]^{(m-1)} + [U_{m-2} V]^{(m-2)} - \ldots\ldots + (-1)^m [U_0 V] = 0 \tag{483}$$

$$\begin{aligned}
& V^{(m)} . U_m \\
& + V^{(m-1)} \left[\tbinom{m}{1} U'_m - U_{m-1}\right] \\
& + V^{(m-2)} \left[\tbinom{m}{2} U''_m - \tbinom{m-1}{1} U'_{m-1} + U_{m-2}\right] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + V'' \left[\tbinom{m}{2} U_m^{(m-2)} - \tbinom{m-1}{2} U_{m-1}^{(m-3)} + \tbinom{m-2}{2} U_{m-2}^{(m-4)} - \ldots + (-1)^{m-2} U_2\right] \\
& + V' \left[\tbinom{m}{1} U_m^{(m-1)} - \tbinom{m-1}{1} U_{m-1}^{(m-2)} + \tbinom{m-2}{1} U_{m-2}^{(m-3)} - \ldots + (-1)^{m-2} 2 . U'_2 + (-1)^{m-1} U_1\right] \\
& + V \left[U_m^{(m)} - U_{m-1}^{(m-1)} + U_{m-2}^{(m-2)} - \ldots + (-1)^{m-2} U''_2 + (-1)^{m-1} U'_1 + (-1)^m U_0\right] = 0.
\end{aligned} \tag{484}$$

Sie ist augenscheinlich von der m^{ten} Ordnung, besitzt mithin ein allgemeines Integral von der folgenden Gestalt:

$$V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 + \ldots\ldots + C_m V_m \tag{485}$$

allwo V_1, V_2, V_3, ... V_m verschiedene particuläre Integrale m an der Zahl bedeuten und C_1, C_2, C_3, ... C_m die dazu gehörigen willkürlichen Constanten, über deren Werthe man annoch verfügen kann. Man kann sich nun im Allgemeinen das V in der vorliegenden Gestalt bereits gefunden und in die Gleichung (482) substituirt denken und diese letztere in mehrere Bestandgleichungen zerfällt dadurch, dass man die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x je für sich der Nulle gleich annimmt, d. h.:

$$\begin{aligned}
0 &= U_m V \\
0 &= U_{m-1} V - (U_m V)' \\
0 &= U_{m-2} V - (U_{m-1} V)' + (U_m V)'' \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= U_2 V - (U_3 V)' + (U_4 V)'' - \ldots\ldots + (-1)^{m-2} (U_m V)^{(m-2)} \\
0 &= U_1 V - (U_2 V)' + (U_3 V)'' - \ldots\ldots + (-1)^{m-2} (U_{m-1} V)^{(m-2)} + (-1)^{m-1} (U_m V)^{(m-1)}
\end{aligned} \tag{486}$$

Sie sind m an der Zahl und vermögen nach vollbrachter Substitution des Werthes (485) nach den Constanten C geordnet zu werden, wodurch sie nach eben denselben ein System von Gleichungen des ersten Grades darbieten von der wohlbekannten Gestalt:

$$\begin{aligned}
[1, 1]\, C_1 + [1, 2]\, C_2 + [1, 3]\, C_3 + \ldots\ldots + [1, n]\, C_n &= 0 \\
[2, 1]\, C_1 + [2, 2]\, C_2 + [2, 3]\, C_3 + \ldots\ldots + [2, n]\, C_n &= 0 \\
[3, 1]\, C_1 + [3, 2]\, C_2 + [3, 3]\, C_3 + \ldots\ldots + [3, n]\, C_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[n, 1]\, C_1 + [n, 2]\, C_2 + [n, 3]\, C_3 + \ldots\ldots + [n, n]\, C_n &= 0
\end{aligned} \tag{487}$$

Die Elimination der C genannten Constanten führt hier zu einer Eliminationsgleichung in u, deren Wurzeln sämmtlich die Rolle irgend einer der Integrationsgrenzen übernehmen können. Sind daher diese Wurzeln $n+1$ an der Zahl vorhanden, mit dem Bemerken, dass auch unendliche von einander verschiedene Wurzelwerthe hier brauchbar sind; so geben sie, zu zweien combinirt, n von einander verschiedene bestimmte Integrale wie (477), die alle die Eigenschaft haben, anstatt y gesetzt, die vorgelegte Differentialgleichung zu erfüllen. Erwägt man zudem, dass die Differentialgleichung in V der m^{ten} Ordnung angehörig und mit Coefficienten versehen sei, von denen mindestens einer sich bis zum n^{ten} Grade erhebt, so sieht man, dass sich die Integration einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung mit Coefficienten vom Grade m zurückführen lasse auf die Integration einer anderen Differentialgleichung von der m^{ten} Ordnung und mit Coefficienten vom Grade n.

Um die Verwandtschaft der beim asymptotischen Integriren auftretenden Rechenformen mit den hier vorkommenden hervorzuheben, kann allsogleich bemerkt werden, dass nicht nur die Polynome U_m, U_{m-1}, ... U_1, U_0 hier und dort dieselben seien, sondern es kommen auch die Wurzeln der Gleichung $U_m = 0$, die mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ bezeichnet worden sind, vor in den beiden Rechnungen: beim asymptotischen Integriren als Substitutionszahlen, hier aber in den einfachen Factoren des ersten Coefficienten der (484), welcher:

$$a_n (u - \alpha_1)(u - \alpha_2) \ldots\ldots (u - \alpha_n)$$

ist. Noch mehr, auch die Differentiationsindices: $h_1, h_2, \ldots\ldots h_n$, die den Substitutionszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ angehören, sind beim Integriren durch bestimmte Integrale zugegen. Es sind nämlich:

$$h_1 + 1,\ h_2 + 1,\ h_3 + 1 \ldots\ldots h_n + 1$$

eben die Exponenten, die zu den einfachen Factoren:

$$u - \alpha_1,\ u - \alpha_2,\ u - \alpha_3,\ \ldots\ldots u - \alpha_n$$

gehörig sind, und die wir wiederholt mit k bezeichnet und in der Differentialgleichung (478) durch Zerlegung des Bruches in Partialbrüche gewonnen haben, den man erhält, den zweiten Coefficienten durch den ersten dividirend. Die allgemeine Formel für diesen Exponenten war nämlich:

$$k = \frac{\mathfrak{X}_{n-1}}{\mathfrak{X}'_n}\Big\}_\alpha - n + 1. \tag{488}$$

In Bezug auf die (484) aber geht n in m, X_n in U_m, und X_{n-1} in $\binom{m}{1} U'_m - U_{m-1}$ über, daher:

$$k = -\frac{U_{m-1}}{U'_m}\Big\}_\alpha + 1 \tag{489}$$

wird, was mit Rücksicht auf den allgemeinen Werth des Differentiationsindex h, der sich unter (391) vorfindet:

$$k = h + 1 \tag{490}$$

gibt. Es kommen daher in den Nennern der verschiedenen particulären Integrale, aus welchen l sammengesetzt ist, als Factoren beziehlich die Potenzen:

$$(u - \alpha_1)^{h_1+1}, \ (u - \alpha_2)^{h_2+1}, \ \ldots\ldots \ (u - \alpha_n)^{h_n+1}$$

vor und das V selbst kann in folgender Gestalt vorausgesetzt werden:

$$V = \frac{P}{(u-\alpha_1)^{h_1+1} \ (u-\alpha_2)^{h_2+1} \ \ldots\ldots \ (u-\alpha_n)^{h_n+1}}. \tag{491}$$

Es kann noch hinzugesetzt werden, dass auch mit denjenigen Functionen von u, die W benannt den sind und die wir den einzelnen particulären Integralen entsprechend mit W_1, W_2, ... bezeichnet haben, unser V in sehr einfacher Verbindung stehe. Es ist nämlich:

$$W_1 = (u - \alpha_1)^{h_1+1} \ V, \ W_2 = (u - \alpha_2)^{h_2+1} \ V, \ \ldots\ldots \ W_n = (u - \alpha_n)^{h_n+1} \ V. \tag{492}$$

Um diess zu zeigen, nennen wir α, h, W die zusammengehörigen, irgend einem particulären grale in asymptotischer Form zugehörigen Grössen, und suchen jetzt nachzuweisen, dass man allge

$$W = (u - \alpha)^{h+1} \ V \tag{493}$$

oder:

$$V = W \ (u - \alpha)^{-h-1} \tag{494}$$

habe. Zur klaren und gründlichen Durchführung des Beweises wird es frommen, bei einer Differe gleichung der n^{ten} Ordnung mit quadratischen Coefficienten anzuheben, der eine Hilfsgleichung zweiten Ordnung und mit Coefficienten vom Grade n entspricht. Sie sind:

$$(a_n x^2 + b_n x + c_n) \, y^{(n)} + (a_{n-1} x^2 + b_{n-1} x + c_{n-1}) \, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + (a_0 x^2 + b_0 x + c_0) \, y = \tag{495}$$

$$(U_2 V)'' - (U_1 V)' + U_0 V = 0. \tag{496}$$

Anstatt der abhängigen Veränderlichen V führen wir in die Hilfsgleichung eine neue Veränderlic ein durch die Substitution (494) und erhalten zunächst:

$$\left(U_2 W \ (u-\alpha)^{-h-1}\right)'' - \left(U_1 W \ (u-\alpha)^{-h-1}\right)' + \left(U_0 W \ (u-\alpha)^{-h-1}\right) = 0 \tag{497}$$

dann aber, die eingeklammerten Ausdrücke als Produkte aus zwei Factoren wirklich differenz von denen immer einer $(u - \alpha)^{-h-1}$ ist, wie es die angehängten Striche andeuten:

$$\begin{aligned} &(h+1)\,(h+2)\ U_2 W + [(h+1)\ U_1 W - 2\,(h+1)\,(U_2 W)']\ (u-\alpha) + \\ &+ [U_0 W - (U_1 W)' + (U_2 W)'']\ (u-\alpha)^2 = 0. \end{aligned} \tag{498}$$

Um nun das dieser Gleichung Genüge leistende W zu erhalten in aufsteigender Reihenform, gec nach Potenzen von $u - \alpha$, gerade so, wie die gleichnamige Grösse beim asymptotischen Integ gewonnen wird, denken wir uns das Gleichungspolynom nach Potenzen dieser Differenz in eine steigende Reihe verwandelt, was dadurch zu geschehen hat, dass man anstatt $U_0 W$, $U_1 W$, die folgenden Substitutionen macht:

$$
\begin{aligned}
U_0 W &= \mathrm{U_0 W} + (\mathrm{U_0 W})'(u-\alpha) + (\mathrm{U_0 W})'' \frac{(u-\alpha)^2}{2} + \ldots\ldots \\
U_1 W &= \mathrm{U_1 W} + (\mathrm{U_1 W})'(u-\alpha) + (\mathrm{U_1 W})'' \frac{(u-\alpha)^2}{2} + \ldots\ldots \\
U_2 W &= \mathrm{U_2 W} + (\mathrm{U_2 W})'(u-\alpha) + (\mathrm{U_2 W})'' \frac{(u-\alpha)^2}{2} + \ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{499}
$$

Dann setzen wir die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $u-\alpha$ je für sich der Nulle gleich und erhalten nach einer leichten Reduction folgendes System von Bestimmungsgleichungen für W', W'', W''', ...

$$
\begin{aligned}
& & & & & \mathrm{U_2 W} &= 0 \\
& & & \mathrm{U_1 W} + & h & (\mathrm{U_2 W})' &= 0 \\
\mathrm{U_0 W} & + & h & (\mathrm{U_1 W})' + & \frac{h(h-1)}{1.2} & (\mathrm{U_2 W})'' &= 0 \\
(\mathrm{U_0 W})' & + & \frac{h-1}{2} & (\mathrm{U_1 W})'' + & \frac{(h-1)(h-2)}{2.3} & (\mathrm{U_2 W})''' &= 0 \\
(\mathrm{U_0 W})'' & + & \frac{h-2}{3} & (\mathrm{U_1 W})''' + & \frac{(h-2)(h-3)}{3.4} & (\mathrm{U_2 W})^{IV} &= 0 \\
& \ldots\ldots & & & & & \\
(\mathrm{U_0 W})^{(r-1)} & + & \frac{h-r+1}{r} & (\mathrm{U_1 W})^{(r)} + & \frac{(h-r+1)(h-r)}{r(r+1)} & (\mathrm{U_2 W})^{(r+1)} &= 0 \\
& \ldots\ldots & & & & &
\end{aligned}
\tag{500}
$$

Sie fallen mit dem (330) in §. 5 Gewonnenen zusammen. Das alldort berechnete W ist also mit dem hier aus der (498) gezogenen völlig identisch und hiemit ist auch der Zusammenhang zwischen den beiden Functionen W und V, der allgemein durch die Gleichung (494) und speciell durch die den einzelnen particulären Integralen angehörigen (492) ausgedrückt ist, vollständig erwiesen.

Man gewinnt sohin aus der Function V, wenn man sie durch Integration der Hilfsgleichung (484) ermittelt hätte, alsogleich die W_1, W_2, ... W_n auf eine überaus leichte Weise, nämlich indem man beziehlich die Factoren: $(u-\alpha_1)^{h_1+1}$, $(u-\alpha_2)^{h_2+1}$, ... $(u-\alpha_n)^{h_n+1}$ im Nenner des V streicht. Da indess der allgemeine Werth von V versehen ist mit zwei willkürlichen Constanten, während jedes W nur eine einzige zum Factor hat, so versteht es sich von selbst, dass zu der Multiplication mit $(u-\alpha)^{h+1}$, welche allgemein V in W verwandelt, noch speciell die Bestimmung einer Constanten der Integration, gewöhnlich Null, hinzuzutreten habe. Weil nämlich die Differentialgleichung (498) bei der Behandlungsweise, die wir hier angedeihen lassen, nur denjenigen der zwei Bestandtheile von W liefert, der den Factor $(u-\alpha)^{h+1}$ nicht mehr besitzt, folglich nur denjenigen von V, der eben den Divisor $(u-\alpha)^{h+1}$ trägt, so ist es auch nur dieser, den man braucht, um aus V die Function W zu bilden.

Der Fall, wo h in eine ganze positive Zahl r übergeht, führt sowohl bei der asymptotischen Integration der (495), wie auch bei der aufsteigenden der (498) zu gewissen abnormen Erscheinungen. Die Coefficienten der Reihenentwicklung von W werden von $W^{(r+1)}$ an alle unendlich und zwar darum, weil $h - r$ in der ersten Potenz in die Nenner der ihnen gleichgeltenden Ausdrücke fällt. Ueberdiess haben wir beim Integriren in aufsteigenden Reihen gesehen, dass der Werth von W wie er hier aus der Differentialgleichung (498) der zweiten Ordnung gezogen wird, auch unendliche Coefficienten beherberge, denen man aber dadurch entgehen kann, dass man einen mit der Transcendente $log\,(u - \alpha)$ als Factor verbundenen Bestandtheil des W absondert, mithin V nicht mehr in der Form (494), sondern in der folgenden anderen voraussetzt:

$$V = W\,(u - \alpha)^{-h-1} + Q\,log\,(u - \alpha). \tag{501}$$

Es ist von Interesse, den Zusammenhang zwischen $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$, ... und den Coefficienten der aufsteigenden Entwicklung von Q, nämlich:

$$Q = Q + Q'\,(u - \alpha) + Q''\,\frac{(u - \alpha)^2}{2} + \ldots\ldots \tag{502}$$

kennen zu lernen. Wir substituiren zu diesem Zwecke den neuen Ausdruck für V in die Hilfsgleichung und zerlegen sie sodann in zwei, die Glieder mit dem Factor $log\,(u - \alpha)$ für sich und die anderen ebenfalls für sich der Nulle gleich setzend, so ergeben sich die folgenden zwei neuen, zur Bestimmung von Q und W dienenden Gleichungen:

$$(U_2Q)'' - (U_1Q)' + (U_0Q) = 0 \tag{503}$$

$$\begin{aligned}&(h+1)(h+2)\,(U_2W)\,(u-\alpha)^{-h-3} + (h+1)\Big\{-2\,(U_2W)' + (U_1W)\Big\}(u-\alpha)^{-h-2} +\\ &+ \Big\{(U_2W)'' - (U_1W)' + (U_0W)\Big\}(u-\alpha)^{-h} - (U_2Q)\,(u-\alpha)^{-2} +\\ &+ \Big\{2(U_2Q)' - (U_1Q)\Big\} = 0.\end{aligned} \tag{504}$$

Die erste von ihnen besagt, dass Q selbst ein Integral der Hilfsgleichung (496) sei und zwar, nach einer stillschweigend in die (501) aufgenommenen Voraussetzung, dasjenige, welches für $u = \alpha$ weder Null wird noch unendlich. Um es zu erhalten in aufsteigender Reihenform führen wir:

$$\begin{aligned}(U_0Q) &= U_0Q + (U_0Q)'\,(u-\alpha) + (U_0Q)''\,\frac{(u-\alpha)^2}{2} + \ldots\ldots\\ (U_1Q)' &= (U_1Q)' + (U_1Q)''\,(u-\alpha) + (U_1Q)'''\,\frac{(u-\alpha)^2}{2} + \ldots\ldots\\ (U_2Q)'' &= (U_2Q)'' + (U_2Q)'''\,(u-\alpha) + (U_2Q)^{IV}\,\frac{(u-\alpha)^2}{2} + \ldots\ldots\end{aligned} \tag{505}$$

ein, ordnen aufsteigend, und setzen die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $u - \alpha$ einzeln der Nulle gleich, so gelangen wir zu einem Systeme von Bestimmungsgleichungen für Q', Q'', Q''', ...

in welchen U_1 darum nicht mehr erscheint, weil es durch seinen Werth, nämlich durch $-hU'_2 = -rU'_2$ ersetzt worden ist.

$$0 = (r+2)\,U'_2\,Q' + [U''_2 - U'_1 + U_0]\,Q$$
$$0 = (r+3)\,U'_2\,Q'' + [3U''_2 - 2U'_1 + U_0]\,Q' + [U'''_2 - U''_1 + U'_0]\,Q$$

. . . .

$$0 = (r+\mu+1)\,U'_2\,Q^{(\mu)} + \left[\tbinom{\mu+1}{2}U''_2 - \tbinom{\mu}{1}U'_1 + U_0\right]Q^{(\mu-1)} + \left[\tbinom{\mu+1}{3}U'''_2 - \tbinom{\mu}{2}U''_1 + \tbinom{\mu-1}{1}U'_0\right]Q^{(\mu-2)} + \qquad (506)$$

. . . .

$$+ \left[\tbinom{\mu+1}{1}U_2^{(\mu)} - \tbinom{\mu}{1}U_1^{(\mu-1)} + \tbinom{\mu-1}{1}U_0^{(\mu-2)}\right]Q' + \left[U_2^{(\mu+1)} - U_1^{(\mu)} + U_0^{(\mu-1)}\right]Q.$$

. . . .

Sie bestimmen, wie man sieht, Q nicht und lassen ihm noch einstweilen die Bedeutung einer willkürlichen Constante. Wir verfahren nun mit der zweiten der gewonnenen Differentialgleichungen genau auf dieselbe Weise und erhalten nach einigen leichten Reductionen:

$$0 = (r+1)(r+2)\,U_2 W$$
$$0 = (r+1)\left\{r(U_2W)' + (U_1W)\right\}$$
$$0 = \frac{r(r-1)}{2}(U_2W)'' + r(U_1W)' + U_0W$$

. . . .

$$0 = \frac{(r-\mu)(r-\mu-1)}{(\mu+1)(\mu+2)}(U_2W)^{(\mu+2)} + \frac{r-\mu}{\mu+1}(U_1W)^{(\mu+1)} + (U_0W)^{(\mu)} \qquad (507)$$

. . . .

$$0 = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{1}{r}(U_1W)^{(r)} + (U_0W)^{(r-1)}\right] - U_2Q$$
$$0 = \frac{1}{r!}\,(U_0W)^{(r)} + (U_2Q)' - U_1Q$$
$$0 = \frac{1}{(r+1)!}\left[\frac{1.2}{(r+2)(r+3)}(U_2W)^{(r+3)} - \frac{1}{r+2}(U_1W)^{(r+2)} + (U_0W)^{(r+1)}\right] + \frac{3}{2}(U_2Q)'' - (U_1Q)'$$
$$0 = \frac{1}{(r+2)!}\left[\frac{2.3}{(r+3)(r+4)}(U_2W)^{(r+4)} - \frac{2}{r+3}(U_1W)^{(r+3)} + (U_0W)^{(r+2)}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{5}{3}(U_2Q)''' - (U_1Q)''\right]$$

. . . .

Diese Formeln reichen zu, um die Verwandtschaft, welche zwischen der asymptotischen Form des Integrales der vorgelegten Gleichung in y, nämlich (495) und der aufsteigenden ihrer Hilfsgleichung in V, nämlich (496) besteht, in allen Fällen erschöpfend darzulegen. Integrirt man nämlich die Erstere asymptotisch, so setzt man die particulären Integrale voraus in der folgenden Gestalt:

$$y = \frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux}W\right]\Big\}_a = e^{ax}\left\{Wx^h + \binom{h}{1}W'x^{h-1} + \binom{h}{2}W''x^{h-2} + \ldots\ldots\ldots\right\} \qquad (508)$$

und erhält jedesmal die Werthe von W', W'', ... dem W proportional, bestimmt durch die Glei-

chungen (500) und zwar sind das durchgehends endliche Werthe, so lange h nicht in eine positive ganze Zahl übergeht. Allein dieselben Bestimmungsgleichungen gelten auch für diejenige Differentialgleichung, die man aus der (496) in V durch die Substitution:

$$V = \frac{W}{(u - \alpha)^{h+1}}$$

gewinnt. Die beiden Functionen von u, die W der asymptotischen Gleichung nämlich und die der Hilfsgleichung angehörige V, stehen mithin in der sehr einfachen Beziehung:

$$W = (u - \alpha)^{h+1}\, V. \tag{509}$$

Geht h gelegentlich in eine ganze positive Zahl r über, so bleibt noch immer die Form des asymptotischen Integrales unverändert dieselbe. Auch die Bestimmungsgleichungen (500) ändern sich nicht, nur geben die spätern unter ihnen, von der $(r + 3)^{\text{ten}}$ angefangen, welche $\mathbf{W}^{(r+1)}$ bestimmt, unendliche Coefficientenwerthe. Diess thut jedoch der Brauchbarkeit der asymptotischen Form (508) an und für sich keinen Eintrag, weil in ihr nicht die unendlichen $\mathbf{W}^{(r+1)}$, $\mathbf{W}^{(r+2)}$, ... vorkommen, sondern nur die mit dem verschwindenden Factor $h - r$ multiplizirten solchen, und weil für die Produkte: $(h - r)\,\mathbf{W}^{(r+1)}$, $(h - r)\,\mathbf{W}^{(r+2)}$, ... aus eben den Bestimmungsgleichungen (500) immer endliche Werthe gezogen werden. Sie gehen sämmtlich aus der einzigen:

$$(\mathrm{U}_0\mathbf{W})^{(r-1)} + \frac{h - r + 1}{r}\,(\mathrm{U}_1\mathbf{W})^{(r)} + \frac{(h - r + 1)\,(h - r)}{r\,(r + 1)}\,(\mathrm{U}_2\mathbf{W})^{(r+1)} = 0 \tag{510}$$

dadurch hervor, dass man r der Reihe nach in $r + 1$, $r + 2$, ... verwandelt und zugleich auf $h = r$ Rücksicht nimmt; und sind, in der beim asymptotischen Integriren angenommenen symbolischen Weise aufgezeichnet, der Reihe nach die folgenden:

$$\begin{aligned}
&h \underset{*}{-} r.\mathbf{W}^{(r+1)} = h \overset{*}{-} r.\mathbf{W}^{(r)} + h \overset{*'}{-} r.\mathbf{W}^{(r-1)} + h \overset{*''}{-} r\;\mathbf{W}^{(r-2)} + \ldots\ldots + h \overset{*(r)}{-} r.\mathbf{W}\\
&h - \underset{*}{r} - 1.\mathbf{W}^{(r+2)} = h - \overset{*}{r} - 1.\mathbf{W}^{(r+1)}\\
&h - \underset{*}{r} - 2.\mathbf{W}^{(r+3)} = h - \overset{*}{r} - 2.\mathbf{W}^{(r+2)} + h - \overset{*'}{r} - 2\;\mathbf{W}^{(r+1)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&h - \underset{*}{r} - \mu.\mathbf{W}^{(r+\mu+1)} = h - \overset{*}{r} - \mu.\mathbf{W}^{(r+\mu)} + h - \overset{*'}{r} - \mu.\mathbf{W}^{(r+\mu-1)} + \ldots\ldots + h - \overset{*(\mu-1)}{r} - \mu.\mathbf{W}^{(r+1)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{511}$$

Wenden wir uns jetzt unter steter Voraussetzung eines ganzen positiven $h = r$ an die Hilfsgleichung, so tritt uns die logarithmisch transcendente Form des Integrales entgegen und es müssen die Coefficienten seiner aufsteigenden Entwicklung aus den zwei Systemen von Bestimmungsgleichungen (506) und (507) gezogen werden. Von dem zweiten Systeme fallen die ersten $r + 2$ an der Zahl mit den ersten in derselben Anzahl des Systemes (500) in aller Strenge zusammen, geben mithin dieselben Werthe von: $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$, $\mathbf{W}'''$, ... $\mathbf{W}^{(r)}$, daher auch in den $r + 1$ ersten Gliedern der Ent-

wicklung die Function W des asymptotischen Integrales (508) mit dem in V kraft der (501) enthaltenen W übereinstimmt. Weiter geht aber diese Uebereinstimmung nicht, schon aus dem Grunde, weil die $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$, ... der asymptotischen Form unendlich werden, während das in V enthaltene W lauter endliche Glieder der Entwicklung hat. Es entsteht daher hier die Frage: in welcher Beziehung die zur asymptotischen Form gehörigen, aus den Gleichungen (500) gezogenen endlichen Werthe von $(h - r)\, W^{(r+1)}$, $(h - r)\, W^{(r+2)}$ ..... zu den Gliedern der Entwicklung von W und Q in (501) stehen, damit man in einem jeden Falle und selbst für ein ganzes positives h im Stande sei, den asymptotischen Werth von y gleich aufzuzeichnen, wenn man sich im Besitze befindet der aufsteigenden Entwicklung von V.

Vergleichen wir zu diesem Behufe die $(r + 3)^{\text{te}}$ im Systeme der Gleichungen (500), oder was dasselbe ist, die erste der (511) mit der $r + 3^{\text{ten}}$ von (507), d. h. mit:

$$0 = \frac{1}{r!}\,(U_0 W)^{(r)} + (U_2 Q)' - U_1 Q \tag{512}$$

und erwägen wir, dass durch Substitution der Werthe für die Symbole, die sich aus (336) für $h = r$ ergeben, die erste der (511) verwandelt werde in:

$$(h - r)\, U'_2 W^{(r+1)} = (U_0 W)^{(r)}. \tag{513}$$

Hingegen verwandelt sich mit Rücksicht auf

$$U_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad - U_1 = r\, U'_2$$

die (512) in:

$$0 = \frac{1}{r!}\,(U_0 W)^{(r)} + (r + 1)\, U'_2 Q. \tag{514}$$

Mithin ergibt sich:

$$(h - r)\, W^{(r+1)} = - (r + 1)!\, Q. \tag{515}$$

Wir wissen, dass

$$(U_0 W)^{(r)} = 0$$

beim asymptotischen Integrale die Bedingung des Abbrechens sei. Unter dieser Voraussetzung aber verschwindet augenscheinlich Q, mithin kraft der Gleichungen (506) auch Q', Q'', ... also auch Q; folglich ist dann in V kein logarithmischer Bestandtheil vorhanden. Die Bedingung des Abbrechens des asymptotischen Integrales ist demnach zugleich die Bedingungsgleichung der nicht vorhandenen logarithmischen Transcendente im Integrale der Hilfsgleichung.

Nehmen wir jetzt die zweite der Gleichungen (511) vor und vergleichen wir sie mit der ersten des Systemes (506), welche Q' gibt. Die zwei so verglichenen Gleichungen sind:

$$h - r - 1 . W^{(r+2)} = h - r - 1 . W^{(r+1)} \tag{516}$$

$$0 = (r + 2)\, U'_2\, Q' + [U''_2 - U'_1 + U_0]\, Q. \tag{517}$$

Wir multipliziren die erste derselben mit dem verschwindenden Factor $h - r$ und setzen die symbolischen Coefficienten in ihre Werthe um, auf $h = r$ Rücksicht nehmend, so geht sie über in:

$$-(h-r)\, U'_2 . W^{(r+2)} = (h-r)\, W^{(r+1)} \left[U''_2 - U'_1 + U_0\right] \tag{518}$$

oder mit Rücksicht auf (515)

$$(h-r)\, W^{(r+2)} . U'_2 = (r+1)!\, Q \left[U''_2 - U'_1 + U_0\right].$$

Der Vergleich mit der (517) zeigt jetzt, dass

$$(h-r)\, W^{(r+2)} = -(r+2)!\, Q' \tag{519}$$

sei.

In ähnlicher Weise halten wir die dritte der Gleichungen (511), welche $W^{(r+3)}$ gibt, u[illegible] die zweite der (506) zusammen. Sie sind:

$$\overline{h - \underset{*}{r} - 2} . W^{(r+3)} = \overline{h - \overset{*}{r} - 2} . W^{(r+2)} + \overline{h - \overset{*\prime}{r} - 2} . W^{(r+1)} \tag{520}$$

$$0 = (r+3)\, U'_2\, Q'' + \left[3U''_2 - 2U'_1 + U_0\right] Q' + \left[U'''_2 - U''_1 + U'_0\right] Q. \tag{521}$$

Die erste wird durch Multiplication mit dem verschwindenden Factor $h - r$ und Umsetzung ihr[illegible] symbolischen Coefficienten in ihre Werthe mit Rücksicht auf $h = r$ und auf die (515) und (51[illegible] verwandelt in:

$$2U'_2 . (h-r)\, W^{(r+3)} = \left[3U''_2 - 2U'_1 + U_0\right] (r+2)!\, Q' + \left[U'''_2 - U''_1 + U'_0\right] (r+2)!\, [illegible] \tag{522}$$

woraus sich mit Rücksicht auf (521) ergibt:

$$(h-r)\, W^{(r+3)} = -\frac{(r+3)!}{2}\, Q''. \tag{523}$$

Auf dieselbe Weise liefern nun die beiden folgenden Gleichungen gegen einander gehalten:

$$(h-r)\, W^{(r+4)} = -\frac{(r+4)!}{3!}\, Q''' \tag{524}$$

und erwecken hiemit die Vermuthung, dass allgemein:

$$(h-r)\, W^{(r+\mu)} = -\frac{(r+\mu)!}{(\mu-1)!}\, Q^{(\mu-1)} \tag{525}$$

sei. Um sie zur Gewissheit zu erheben, genügt es, zu zeigen, dass wenn die vorliegende Beziehungsgleichung richtig ist, auch die darauffolgende, welche man erhält, $\mu + 1$ anstatt μ setzend, d. h. die:

$$(h-r)\, W^{(r+\mu+1)} = -\frac{(r+\mu+1)!}{\mu!}\, Q^{(\mu)} \tag{526}$$

nothwendig richtig sei. Um diess zu zeigen, vergleichen wir die allgemeine letztaufgezeichnete der Gleichungen im Systeme (511) mit der allgemeinen (506), multipliziren die erstere mit dem verschwindenden Factor $h - r$, setzen anstatt der symbolischen Coefficienten ihre Werthe, gehörig auf $h = r$ Rücksicht nehmend, und setzen verabredeter Massen voraus, dass die Beziehungsgleichung (525) für $\mu = 1, 2, 3, \ldots\ldots \mu$ richtig sei. Sie geht dadurch über in:

$$
\begin{aligned}
\mu U'_2\,(h-r)\,W^{(r+\mu+1)} = {} & \frac{(r+\mu)!}{(\mu-1)!}\left[\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}U''_2 - \frac{\mu}{1}U'_1 + U_0\right]Q^{(\mu-1)} + \\
& + \frac{(r+\mu)!}{1.(\mu-2)!}\left[\frac{\mu(\mu+1)}{2.3}U'''_2 - \frac{\mu}{2}U''_1 + U'_0\right]Q^{(\mu-2)} + \\
& + \frac{(r+\mu)!}{2!(\mu-3)!}\left[\frac{\mu(\mu+1)}{3.4}U^{IV}_2 - \frac{\mu}{3}U'''_1 + U''_0\right]Q^{(\mu-3)} + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{(r+\mu)!}{(\mu-1)!}\left[\qquad U_2^{(\mu+1)} - U_1^{(\mu)} + U_0^{(\mu-1)}\right]Q.
\end{aligned}
\tag{527}
$$

Durch den blossen Anblick dieser Gleichung und der allgemeinen in (506) überzeugt man sich nun, dass:

$$
(h-r)\,W^{(r+\mu+1)} = -\frac{(r+\mu+1)!}{\mu!}\,Q^{(\mu)} \tag{528}
$$

bestehe und somit wäre durch den gewöhnlichen Inductionsbeweis die Giltigkeit der Gleichung (525) festgestellt.

Von den letzten der Bestimmungsgleichungen (500), denjenigen nämlich, welche auf die $(r+3)^{te}$ folgen, haben wir bisher keinen Gebrauch gemacht. Sie geben der Reihe nach für $W^{(r+2)}$, $W^{(r+3)}$, $W^{(r+4)}$, ..., wie man sich leicht überzeugen kann, endliche Werthe, in Function von W und von $W^{(r+1)}$, welche als neue Integrationsconstante in der Rechnung auftritt, multiplizirt mit Q, dienen also zur Entwicklung desjenigen W, welches im Werthe von V erscheint. Im asymptotischen Integrale jedoch erscheinen diese späteren Coefficienten nicht, und dieses letztere erleidet auch gar keine Veränderung, wenn man sie alle in Null, oder auch in beliebige andere endliche Grössen verwandelt. Das asymptotische Integral erscheint mithin für h gleich einer ganzen und positiven Zahl r zusammengesetzt aus zwei verschiedenen Bestandtheilen. Von ihnen besteht der erste aus $r+1$ Gliedern, welche alle der Reihenentwicklung desjenigen W entnommen sind, das im Werthe von V erscheint, der zweite Theil ist eine unendliche Reihe und ihre Coefficienten sind lediglich aus den Entwicklungsgliedern der Function Q zusammengesetzt. Ist $Q = 0$, d. h. fehlt in V der logarithmische Bestandtheil, dann bricht das asymptotische Integral ab, sonst aber erscheint es in folgender Gestalt:

$$
\begin{aligned}
y = e^{\alpha x}&\left\{W x^r + \binom{r}{1}W' x^{r-1} + \binom{r}{2}W'' x^{r-2} + \cdots\cdots + \binom{r}{r}W^{(r)}\right\} \\
- r!\,e^{\alpha x}&\left\{Q\frac{1}{x} - Q'\frac{1}{x^2} + Q''\frac{1}{x^3} + \cdots\cdots + (-1)^{\mu-1}Q^{(\mu)}\frac{1}{x^{\mu+1}} + \cdots\cdots\right\}
\end{aligned}
\tag{529}
$$

allwo, wie gesagt, W', W'', ... $W^{(r)}$ aus der aufsteigenden Integration der Gleichung (498) und Q, Q', Q'' ..... durch Integriren der (503) in derselben aufsteigenden Form gewonnen werden mit dem Zusatze, dass vermöge der (514)

$$
Q = -\frac{(U_0 W)^{(r)}}{(r+1)!\,U'_2}
$$

besteht, wodurch sich der vorliegende Werth von y in einen Ausdruck mit einer einzigen willkürlichen Constante W verwandelt.

Die hier dargelegte Verwandtschaft zwischen dem asymptotischen Integrale einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung mit quadratischen Coefficienten und dem aufsteigenden ihrer Hilfsgleichung der zweiten Ordnung mit Coefficienten des n^{ten} Grades ist auch ganz allgemein vorhanden zwischen dem asymptotischen Integrale einer Gleichung der n^{ten} Ordnung mit Coefficienten, die den m^{ten} Grad erreichen und den nach Potenzen von $u - \alpha$ aufsteigend geordneten Integralen ihrer Hilfsgleichung, die, der m^{ten} Ordnung angehörig, Coefficienten besitzt, die den n^{ten} Grad erreichen. Unter $u - \alpha$ ist hier immer ein Factor des ersten Coefficienten der Letzteren verstanden. Die Sache verhält sich nämlich so: Wenn das einem bestimmten α zugehörige h keine ganze positive Zahl ist, so besteht zwischen der dem asymptotischen Integrale zugehörigen W und dem V der Hilfsgleichung die Relation (493) und zwar ist in derselben nicht der allgemeine mit m willkürlichen Integrationsconstanten versehene Werth von V verstanden, sondern nur das eine particuläre Integral der Hilfsgleichung, welches für $u = \alpha$ unendlich wird, und welches man erhält durch Transformation vermittelst der Substitutionsgleichung (509), deren aufsteigend nach $u - \alpha$ geordnetes Ergebniss ist:

$$
\begin{aligned}
&(h+1)(h+2)(h+3)\ldots\ldots(h+m)(u-\alpha)^{-h-m-1}\,U_m W - \\
&-(h+1)(h+2)(h+3)\ldots\ldots(h+m-1)(u-\alpha)^{-h-m}\Big\{m(U_m W)' - U_{m-1} W\Big\} + \\
&+(h+1)(h+2)(h+3)\ldots\ldots(h+m-2)(u-\alpha)^{-h-m+1}\Big\{\tbinom{m}{2}(U_m W)'' - \tbinom{m-1}{1}(U_{m-1} W)' + (U_{m-2} W)\Big\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+(-1)^p (h+1)(h+2)\ldots\ldots(h+m-p)(u-\alpha)^{-h-m+p-1}\Big\{\tbinom{m}{p}(U_m W)^{(p)} - \tbinom{m-1}{p-1}(U_{m-1} W)^{(p-1)} + \\
&\qquad + \tbinom{m-2}{p-2}(U_{m-2} W)^{(p-2)} + \ldots\ldots + (-1)^p U_{m-p} W\Big\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+(-1)^m (u-\alpha)^{-h-1}\Big\{(U_m W)^{(m)} - (U_{m-1} W)^{(m-1)} + (U_{m-2} W)^{(m-2)} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^m U_0 W\Big\}
\end{aligned}
\tag{531}
$$

Der vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel entwickelte Werth von W stellt im Allgemeinen, wie im §. 3 dieses Abschnittes dargethan wurde, ein einziges particuläres Integral dar, welches zugleich jener specielle Werth von W ist, der der asymptotischen Form des y angehört. Diess leidet theilweise eine Ausnahme, wenn h in eine ganze positive Zahl r übergeht, weil in einem solchen Falle die aufsteigende Berechnung des W aus der vorliegenden Differentialgleichung (531) zu besonderen analytischen Erscheinungen führt, denen dann auch besondere Erscheinungen in dem asymptotischen y entsprechen. Es gehen nämlich nur für die Coefficienten W', W'', ... $W^{(r)}$ endliche Werthe aus der Rechnung hervor, dann aber kömmt eine Gruppe folgender Coefficienten, nämlich

$$W^{(r+1)},\ W^{(r+2)},\ W^{(r+3)}\ \ldots\ldots\ldots\ W^{(r+m-1)}$$

die alle $h - r = 0$ im Nenner bekommen und desshalb unendlich werden, wenn nicht zu gleicher Zeit auch die Zähler verschwinden, was aber Bedingungsgleichungen gleichfalls $m - 1$ an der Zahl zwischen den constanten Parametern der Differentialgleichung erfüllt, voraussetzt. So viel deren wirklich erfüllt sind, so viele der Grössen $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$, ... $W^{(r+m-1)}$ erscheinen dann in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ und treten dann in der Rechnung als neue Integrationsconstanten auf, so zwar, dass man mit der Berechnung eines einzigen particulären Integrales angefangen hat, und am Ende mit der Ermittlung mehrerer solcher beschäftigt ist. Jedoch sind diese zuletzt hinzugetretenen ganz ohne Einfluss auf das asymptotische y und können ganz ohne Einfluss auf die Gestalt dieses Letzteren auch sämmtlich ersetzt werden durch Null.

Wir haben eben im §. 3 gesehen, dass diese analytischen Phänomene daher rühren, weil V für ein ganzes positives $h = r$ nicht mehr in der Form (494), sondern in der anderen (501) besteht, mit einem logarithmischen Bestandtheile: $Q \log (u - \alpha)$, allwo Q selbst ein Werth von V ist, der aus denjenigen particulären Integralen der Hilfsgleichung in V zusammengesetzt ist, die für $u = \alpha$ nicht unendlich werden, durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition. Diese Constanten sind aber eben die oberwähnten Zähler der Werthe $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$ ..... und die Bedingungsgleichungen ihres Verschwindens sind zu gleicher Zeit die Bedingungen der im V nicht vorhandenen logarithmischen Transcendente und noch überdiess die Bedingungen des Abbrechens des asymptotischen y. Sind sie nicht sämmtlich erfüllt, so geht der Factor erster Classe dieses y über in eine absteigende unendliche Reihe, deren spätere Glieder, vom $r + 1^{\text{sten}}$ angefangen, lediglich der mit $\log (u - \alpha)$ verbundenen Function Q entnommen sind.

Man überzeugt sich von der Richtigkeit aller dieser Angaben auf demselben Wege, wie in dem früher betrachteten einfachen Falle einer Gleichung mit quadratischen Coefficienten. Man fängt nämlich damit an, das Polynom der (531) durch eingeführte ähnliche Werthe in Reihenform für $U_0 W$, $U_1 W$, ... $U_m W$, wie die (499) sind, in eine aufsteigende Reihe zu verwandeln, und bekömmt, ihre Coefficienten einzeln der Nulle gleich setzend, nach einigen leichten Reductionen das folgende System von Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= U_m W \\
0 &= U_{m-1} W + h\,(U_m W)' \\
0 &= U_{m-2} W + h\,(U_{m-1} W)' + \frac{h(h-1)}{1.2}\,(U_m W)'' \\
0 &= U_{m-3} W + h\,(U_{m-2} W)' + \frac{h(h-1)}{1.2}\,(U_{m-1} W)'' + \frac{h(h-1)(h-2)}{1.2.3}\,(U_m W)''' \qquad (532) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= (U_0 W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1}\,(U_1 W)^{(r+1)} + \ldots + \frac{(h-r)(h-r-1)\ldots(h-r-m+1)}{(r+1)(r+2)\ldots(r+m)}\,(U_m W)^{(r+m)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Sie fallen genau mit denjenigen zusammen, die wir im §. 7 beim asymptotischen Integriren zur Bestimmung der Function W aufgestellt haben, und hiemit wäre die Relation (494) zwischen dem V der Hilfsgleichung und dem W des asymptotischen Integrales mindestens so lange erwiesen, als die Mac-Laurin'sche Entwicklung, nicht unterbrochen durch das Erscheinen eines unendlichen Coefficienten, ungestört von Statten geht, mithin so lange h nicht übergeht in eine ganze positive Zahl. Um aber auch in diesem letzteren Falle die obigen Angaben zu erhärten und den Zusammenhang zwischen den späteren Gliedern der asymptotischen Entwicklung und jenen der Function Q blosszulegen, führen wir ebenso, wie früher in dem einfacheren Falle, anstatt V in die Hilfsgleichung zwei neue Variable W und Q ein vermittelst der Substitution (501) und erhalten zunächst die folgenden zwei Differentialgleichungen:

(533) $$0 = [U_m Q]^{(m)} - [U_{m-1}Q]^{(m-1)} + [U_{m-2}Q]^{(m-2)} - \dots\dots\dots + (-1)^m [U_0 Q]$$

(534)
$$\begin{aligned}
0 = {} & (r+1)(r+2)(r+3)\dots(r+m)(u-\alpha)^{-r-m}.U_m W - \\
& -(r+1)(r+2)(r+3)\dots(r+m-1)(u-\alpha)^{-r-m+1}\left\{\tbinom{m}{1}(U_m W)' - U_{m-1}W\right\} + \\
& +(r+1)(r+2)(r+3)\dots(r+m-2)(u-\alpha)^{-r-m+2}\left\{\tbinom{m}{2}(U_m W)'' - \tbinom{m-1}{1}(U_{m-1}W)' + U_{m-2}W\right\} + \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots - \\
& +(-1)^m (u-\alpha)^{-r}\left\{(U_m W)^{(m)} - (U_{m-1}W)^{(m-1)} + (U_{m-2}W)^{(m-2)} - \dots + (-1)^m U_0 W\right\} + \\
& +(-1)^{m-1}(m-1)!\,(u-\alpha)^{-m+1}U_m Q + \\
& +(-1)^{m-2}(m-2)!\,(u-\alpha)^{-m+2}\left\{\tbinom{m}{1}(U_m Q)' - U_{m-1}Q\right\} + \\
& +(-1)^{m-3}(m-3)!\,(u-\alpha)^{-m+3}\left\{\tbinom{m}{2}(U_m Q)'' - \tbinom{m-1}{1}(U_{m-1}Q)' + U_{m-2}Q\right\} + \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& - \quad (u-\alpha)^{-1}\left\{\tbinom{m}{m-2}(U_m Q)^{(m-2)} - \tbinom{m-1}{m-3}(U_{m-1}Q)^{(m-3)} + \dots\dots\dots + (-1)^{m-2}(U_2 Q)\right\} \\
& + \quad \left\{\tbinom{m}{m-1}(U_m Q)^{(m-1)} - \tbinom{m-1}{m-2}(U_{m-1}Q)^{(m-2)} + \dots\dots\dots + (-1)^{m-1}(U_1 Q)\right\}
\end{aligned}$$

Wir verwandeln die Polynome beider durch Substitutionen von der Gestalt (499) in aufsteigende Reih[en] und erhalten abermals durch Nullsetzen der einzelnen Coefficienten die folgenden zwei Systeme [von] Bestimmungsgleichungen:

(535)
$$\begin{aligned}
0 = {} & (r+m)U_m' Q^{(m-1)} + \left\{\tbinom{m}{2}U_m'' - \tbinom{m-1}{1}U_{m-1}' + U_{m-2}\right\}Q^{(m-2)} + \left\{\tbinom{m}{3}U_m''' - \tbinom{m-1}{2}U_{m-1}'' + \tbinom{m-2}{1}U_{m-2}' - U_{m-3}\right\}Q^{(m-3)} \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \left\{U_m^{(m)} - U_{m-1}^{(m-1)} + U_{m-2}^{(m-2)} - \dots\dots\dots + (-1)^{m-1}U_1' + (-1)^m U_0\right\}Q \\
0 = {} & (r+m+1)U_m' Q^{(m)} + \left\{\tbinom{m+1}{2}U_m'' - \tbinom{m}{1}U_{m-1}' + U_{m-2}\right\}Q^{(m-1)} + \left\{\tbinom{m+1}{3}U_m''' - \tbinom{m}{2}U_{m-1}'' + \tbinom{m-1}{1}U_{m-2}' - U_{m-3}\right\}Q^{(m-2)} \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \left\{U_m^{(m+1)} - U_{m-1}^{(m)} + U_{m-2}^{(m-1)} - \dots\dots\dots + (-1)^{m-1}U_1'' + (-1)^m U_0'\right\}Q \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

$$0=(r+m+\mu)U'_mQ^{(m+\mu-1)}+\left\{\binom{m+\mu}{2}U''_m-\binom{m+\mu-1}{1}U'_{m-1}+U_{m-2}\right\}Q^{(m+\mu-2)}+$$

$$+\left\{\binom{m+\mu}{3}U'''_m-\binom{m+\mu-1}{2}U''_{m-1}+\binom{m+\mu-2}{1}U'_{m-2}-U_{m-3}\right\}Q^{(m+\mu-3)}+$$

....

$$+\left\{U_m^{(m+\mu)}-U_{m-1}^{(m+\mu-1)}+U_{m-2}^{(m+\mu-2)}-\ldots\ldots\ldots+(-1)^mU_0^{(\mu)}\right\}Q \quad .$$

....

....

Diess ist das erste System und kann augenscheinlich nur dazu dienen, die Reihencoefficienten $Q^{(m-1)}$, $Q^{(m)}$, $Q^{(m+1)}$, ... zu bestimmen in Function der vorangehenden: Q, Q', ... $Q^{(m-2)}$, welche letztere $m-1$ an der Zahl sind. Zu ihrer Bestimmung muss mithin das zweite System von Bestimmungsgleichungen verwendet werden, welches durch Entwicklung des Polynomes der (534) in aufsteigende Reihen und Nullsetzen ihrer Coëfficienten erhalten wird. Einige leichte Reductionen und namentlich die Rücksicht auf die folgende wohlbekannte identische Gleichung:

$$\frac{(r+m-p+1)\ldots(r+m)}{1.2.3\ldots p}-\frac{(r+m-p+1)\ldots(r+m-1)}{1.2.3\ldots(p-1)}\binom{m}{1}+\frac{(r+m-p+1)\ldots(r+m-2)}{1.2.3\ldots(p-2)}\binom{m}{2}-\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^p\binom{m}{p}=\binom{r}{p}=\frac{(-1)^p}{p!x^{r+1}}\frac{d^p}{dx^p}\left[x^{-r-m+p-1}tx^m\right]$$

führen zur Aufstellung dieses zweiten Systemes in folgender Gestalt:

$$0=U_mW$$

$$0=r(U_mW)'+U_{m-1}W$$

$$0=\binom{r}{2}(U_mW)''+\binom{r}{1}(U_{m-1}W)'+U_{m-2}W$$

....

$$0=\binom{r}{p}(U_mW)^{(p)}+\binom{r}{p-1}(U_{m-1}W)^{(p-1)}+\binom{r}{p-2}(U_{m-2}W)^{(p-2)}+\ldots+U_{m-p}W \qquad (536)$$

....

$$0=\binom{r}{r}(U_mW)^{(r)}+\binom{r}{r-1}(U_{m-1}W)^{(r-1)}+\binom{r}{r-2}(U_{m-2}W)^{(r-2)}+\ldots+U_{m-r}W$$

$$0=(r+1)(r+2)\ldots(m-1)\left\{\binom{r}{r}(U_{m-1}W)^{(r)}+\binom{r}{r-1}(U_{m-2}W)^{(r-1)}+\binom{r}{r-2}(U_{m-3}W)^{(r-2)}+\ldots\right\}$$
$$+(-1)^{m-1}(m-1)!\,U_mQ$$

$$0=(r+1)(r+2)\ldots(m-2)\left\{\binom{r}{r}\left((U_{m-2}W)^{(r)}+\binom{r}{r-1}(U_{m-3}W)^{(r-1)}+\binom{r}{r-2}(U_{m-4}W)^{(r-2)}+\ldots\right\}\right.$$
$$+(-1)^{m-2}(m-2)!\left\{(U_mQ)'-(U_{m-1}Q)\right\}$$

$$0=(r+1)(r+2)\ldots(m-3)\left\{\binom{r}{r}(U_{m-3}W)^{(r)}+\binom{r}{r-1}(U_{m-4}W)^{(r-1)}+\binom{r}{r-2}(U_{m-5}W)^{(r-2)}+\ldots\right\}$$
$$+(-1)^{m-3}(m-3)!\left\{(U_mQ)''-(U_{m-1}Q)'+U_{m-2}Q\right\}$$

. . . .

$$0=\frac{1}{r!}(U_0W)^{(r)}+(U_mQ)^{(m-1)}-(U_{m-1}Q)^{(m-2)}+(U_{m-2}Q)^{(m-3)}-\ldots\ldots+(-1)^{m-1}(U_1Q)$$

Diese Gleichungen gelten für den Fall, dass r nicht grösser ist, als $m - 1$. Sollte im Gegentheile r grösser sein als $m - 1$, dann stellt man sie lieber hin in der folgenden passenden Form:

(537)

$$0=U_mW$$
$$0=U_{m-1}W+\frac{r}{1}(U_mW)'$$
$$0=U_{m-2}W+\frac{r}{1}(U_{m-1}W)'+\frac{r(r-1)}{1.2}(U_mW)''$$

. . . .

$$0=U_0W+\frac{r}{1}(U_1W)'+\frac{r(r-1)}{1.2}(U_2W)''+\ldots\ldots+\frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{1.2\ldots m}(U_mW)^{(m)}$$
$$0=(U_0W)'+\frac{r-1}{2}(U_1W)''+\frac{(r-1)(r-2)}{2.3}(U_2W)'''+\ldots+\frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-m)}{2.3\ldots\ldots(m+1)}(U_mW)^{(m+1)}$$
$$0=(U_0W)''+\frac{r-2}{3}(U_1W)'''+\frac{(r-2)(r-3)}{3.4}(U_2W)^{IV}+\ldots+\frac{(r-2)(r-3)\ldots(r-m-1)}{3.4\ldots\ldots(m+2)}(U_mW)^{(m+2)}$$

. . . .

$$0=(U_0W)^{(r-m)}+\frac{m}{r-m+1}(U_1W)^{(r-m+1)}+\frac{m(m-1)}{(r-m+1)(r-m+2)}(U_2W)^{(r-m+2)}+\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots\ldots1}{(r-m+1)(r-m+2)\ldots r}(U_mW)^{(r)}.$$
$$0=\binom{r}{m-1}\left\{(U_0W)^{(r-m+1)}+\frac{m-1}{r-m+2}(U_1W)^{(r-m+2)}+\ldots\ldots+\frac{(m-1)(m-2)\ldots1}{(r-m+2)(r-m+3)\ldots r}(U_{m-1}W)^{(r)}\right\}$$
$$+(-1)^{m-1}r!U_mQ$$
$$0=\binom{r}{m-2}\left\{(U_0W)^{(r-m+2)}+\frac{m-2}{r-m+3}(U_1W)^{(r-m+3)}+\ldots\ldots+\frac{(m-2)(m-3)\ldots1}{(r-m+3)(r-m+4)\ldots r}(U_{m-2}W)^{(r)}\right\}$$
$$+(-1)^{m-2}r!\left\{(U_mQ)'-(U_{m-1}Q)\right\}$$
$$0=\binom{r}{m-3}\left\{(U_0W)^{(r-m+3)}+\frac{m-3}{r-m+4}(U_1W)^{(r-m+4)}+\ldots\ldots+\frac{(m-3)(m-4)\ldots1}{(r-m+4)(r-m+5)\ldots r}(U_{m-3}W)^{(r)}\right\}$$
$$+(-1)^{m-3}r!\left\{(U_mQ)''-(U_{m-1}Q)'+U_{m-2}Q\right\}$$

. . . .

$$0=(U_0W)^{(r)}+r!\left\{(U_mQ)^{(m-1)}-(U_{m-1}Q)^{(m-2)}+(U_{m-2}Q)^{(m-3)}-\ldots\ldots+(-1)^{m-1}(U_1Q)\right\}$$

Wir wollen zuvörderst die Letzteren zum Gegenstande unserer Betrachtungen erwählen, nehmen mithin $r > m - 1$ an. Von ihnen liefern die vorangehenden $r + 2$ an der Zahl die Werthe der Coefficienten W', W'', ... $W^{(r)}$, die alle unabhängig sind von Q, welche Grösse in ihnen gar nicht erscheint mit Ausnahme der letzten, allwo zwar $U_m Q$ ersichtlich ist, wegen $U_m = 0$ jedoch durch die Nulle ersetzt werden muss. Die darauffolgenden dieser Bestimmungsgleichungen $m - 2$ an der Zahl können nur durch schickliche Wahl von Q, Q', Q'', ... $Q^{(m-2)}$ erfüllt werden, und man kann sie mit Rücksicht auf die Relation: $U_{m-1} + r\,U'_m = 0$ auch hinzeichnen, wie folgt:

$$(-1)^{m-1}(m-2)!\,(r-m+2)!\,(r+1)\,U'_m Q = (U_0 W)^{(r-m+2)} + \frac{m-2}{r-m+3}(U_1 W)^{(r-m+3)} + \dots + \\ + \frac{(m-2)(m-3)\dots 1}{(r-m+3)(r-m+4)\dots r}(U_{m-2}W)^{(r)} \tag{538}$$

$$(-1)^{m-2}(m-3)!\,(r-m+3)!\left\{(U''_m - U'_{m-1} + U_{m-2})Q + (r+2)\,U'_m Q'\right\} = \\ = (U_0 W)^{(r-m+3)} + \frac{m-3}{r-m+4}(U_1 W)^{(r-m+4)} + \dots + \frac{(m-3)(m-4)\dots 2.1}{(r-m+4)(r-m+5)\dots r}(U_{m-3}W)^{(r)}$$

....

....

$$r!\Big\{-(U_m^{(m-1)} - U_{m-1}^{(m-2)} + U_{m-2}^{(m-3)} - \dots + (-1)^{m-1}U_1)Q - \Big(\tbinom{m-1}{1}U_m^{(m-2)} - \tbinom{m-2}{1}U_{m-1}^{(m-3)} + \tbinom{m-3}{1}U_{m-2}^{(m-4)} - \dots\Big)Q' \\ - \Big(\tbinom{m-1}{2}U_m^{(m-3)} - \tbinom{m-2}{2}U_{m-1}^{(m-4)} + \tbinom{m-3}{2}U_{m-2}^{(m-5)} - \dots\Big)Q'' - \dots - (r+m-1)\,U'_m Q^{(m-2)}\Big\} = (U_0 W)^{(r)}.$$

Nachdem wir so die zwei Systeme von Bestimmungsgleichungen, welche die aufsteigende Integration der Hilfsgleichung erheischt, aufgestellt haben, können wir zur Vergleichung der aus diesen Hilfsgleichungen gezogenen Werthe mit denjenigen schreiten, die sich bei der asymptotischen Integration der vorgelegten Differentialgleichung von der Ordnung n ergeben. Es ist bereits bemerkt worden, dass die ersten $r + 2$ an der Zahl der Gleichungen (389) mit eben so vielen aus dem Systeme der vorliegenden (537) vollkommen übereinstimmen, mithin zu genau denselben Werthen von α, h, W', W'', W''', ... $W^{(r)}$ führen. Sodann folgt bei der asymptotischen Integration eine Gruppe von Bestimmungsgleichungen $m - 1$ der Anzahl nach, welche zur Bestimmung von $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$... $W^{(r+m-1)}$ dienen sollten, jedoch für diese Reihencoefficienten entweder unendliche Werthe liefern, wenn die Bedingungsgleichungen (398) nicht erfüllt sind, oder dieselben als neue Integrationsconstanten unbestimmt lassen, wenn den (398) identisch Genüge geleistet ist. Diese unendlichen Werthe sind aber von einer solchen Ordnung, dass die Produkte:

$$(r - r)\,W^{(r+1)},\ (r - r)\,W^{(r+2)},\ (r - r)\,W^{(r+3)},\ \dots\dots\ (r - r)\,W^{(r+m-1)}, \tag{539}$$

die in der asymptotischen Integrationsformel vorkommen und die man daher nur braucht, jedesmal endlich ausfallen, auch wenn die (398) nicht erfüllt sind. Hiemit parallel weist die aufsteigende Integration der Hilfsgleichung eine Gruppe von Bestimmungsgleichungen aus, die anstatt der eben ange-

führten Produkte (539) die Anfangscoefficienten der Function Q, nämlich $Q, Q', Q'', \ldots\ldots Q^{(m-2)}$ geben und namentlich fällt Q dem $(r-r)\,W^{(r+1)}$, Q' dem $(r-r)\,W^{(r+2)}, \ldots\ldots Q^{(m-2)}$ dem $(r-r)\,W^{(r+m-1)}$ proportional aus.

Um diess zu zeigen, statuiren wir der Kürze wegen:

$$
(540)\quad
\begin{aligned}
&\frac{(-1)^{m-1}}{(m-2)!\,(r-m+2)!}\Big\{(U_0W)^{(r-m+2)}+\frac{m-2}{r-m+3}(U_1W)^{(r-m+3)}+.\,+\frac{(m-2)(m-3)\ldots 2.1}{(r-m+3)(r-m+4)\ldots r}(U_{m-2}W)^{(r)}=L_1\\
&\frac{(-1)^{m-2}}{(m-3)!\,(r-m+3)!}\Big\{(U_0W)^{(r-m+3)}+\frac{m-3}{r-m+4}(U_1W)^{(r-m+4)}+\ldots+\frac{(m-3)(m-4)\ldots 2.1}{(r-m+4)(r-m+5)\ldots r}(U_{m-3}W)^{(r)}=L_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\frac{1}{r!}(U_0W)^{(r)}=L_{m-1}
\end{aligned}
$$

so wird sich die in Rede stehende Gruppe von Bestimmungsgleichungen (538) auch so schreiben lassen:

$$
(541)\quad
\begin{aligned}
L_1 &= (r+1)\,U'_mQ\\
L_2 &= (U''_m - U'_{m-1} + U_{m-2})\,Q + (r+2)\,U'_mQ'\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
L_{m-1} &= +\,(U_m^{(m-1)} - U_{m-1}^{(m-2)} + U_{m-2}^{(m-3)} - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{m-1}\,U_1)\,Q\ +\\
&+\left(\tbinom{m-1}{1}U_m^{(m-2)} - \tbinom{m-2}{1}U_{m-1}^{(m-3)} + \tbinom{m-3}{1}U_{m-2}^{(m-4)} - \ldots\ldots\ldots\ldots\right)Q' +\\
&+\left(\tbinom{m-1}{2}U_m^{(m-3)} - \tbinom{m-2}{2}U_{m-1}^{(m-4)} + \tbinom{m-3}{2}U_{m-2}^{(m-5)} - \ldots\ldots\ldots\ldots\right)Q'' +\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(r+m-1)\,U'_m.Q^{(m-2)}.
\end{aligned}
$$

Sind die Bedingungsgleichungen (398) erfüllt, so ist das asymptotische Integral ein geschlossenes. Dann hat man aber auch:

$$L_1 = L_2 = \ldots\ldots\ldots = L_{m-1} = 0$$

mithin:

$$Q = Q' = \ldots\ldots\ldots = Q^{(m-2)} = 0.$$

Da aber unter solchen Umständen das System (535) auch:

$$Q^{(m-1)} = Q^{(m)} = Q^{(m+1)} = \ldots\ldots\ldots = 0$$

liefert, so verschwindet die ganze mit Q bezeichnete Function, welche den Logarithmus zum Factor trägt, in der Substitutionsgleichung (501); folglich sind die Bedingungsgleichungen (398) des geschlossenen asymptotischen Integrales auch zugleich die Bedingungsgleichungen einer nicht vorhandenen logarithmischen Transcendente im aufsteigenden Integrale der Hilfsgleichung. Um nun die Proportionalität zwischen Q und $(r-r)\,W^{(r+1)}$ darzuthun, legen wir uns die beiden Bestimmungsgleichungen vor, denen diese Grössen entnommen werden müssen, nämlich die erste der Gruppe (541) und diejenige, die aus der allgemeinen (393) hervorgeht, wenn man r in $r-m+2$ verwandelt. Sie sind:

$$\mathrm{L}_1 = (r+1)\,\mathrm{U}'_m . \mathrm{Q}$$

$$\overline{h-r\underset{*}{+}m-2}\,.\,\mathrm{W}^{(r+1)} = \overline{h-r\overset{*}{+}m-2}\,.\,\mathrm{W}^{(r)} + \overline{h-r\overset{*'}{+}m-2}\,.\,\mathrm{W}^{(r-1)} + \ldots\ldots + \overline{h-r\overset{*(r)}{+}m-2}\,.\,\mathrm{W} \qquad (542)$$

oder mit Rücksicht auf die unter (392) dargelegten Bedeutungen der besternten symbolischen Coefficienten und unter der Voraussetzung $h = r$

$$\frac{(m-2)(m-3)\ldots\ldots3.2.1}{(r-m+3)(r-m+4)\ldots r}(r-r)\,\mathrm{U}'_m\mathrm{W}^{(r+1)} =$$

$$= \frac{(m-2)(m-3)\ldots\ldots1}{(r-m+3)(r-m+4)\ldots r}\mathrm{U}_{m-2}\mathrm{W}^{(r)} + \frac{(m-2)(m-3)\ldots2}{(r-m+3)\ldots(r-1)}[\mathrm{U}_{m-3}+\mathrm{U}'_{m-2}]\,\mathrm{W}^{(r-1)} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left[\mathrm{U}_0 + \frac{m-2}{1}\mathrm{U}'_1 + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\mathrm{U}''_2 + \ldots\ldots + \frac{(m-2)(m-3)\ldots2.1}{1.2\ldots(m-3)(m-2)}\mathrm{U}^{(m-2)}_{m-2}\right]\mathrm{W}^{(r-m+2)}$$

$$+(r-m+2)\left[\mathrm{U}'_0 + \frac{m-2}{2}\mathrm{U}''_1 + \frac{(m-2)(m-3)}{2.3}\mathrm{U}'''_2 + \ldots + \frac{(m-2)(m-3)\ldots2.1}{2.3\ldots(m-2)(m-1)}\mathrm{U}^{(m-1)}_{m-2}\right]\mathrm{W}^{(r-m+1)}$$

$$+\binom{r-m+2}{2}\left[\mathrm{U}''_0 + \frac{m-2}{3}\mathrm{U}'''_1 + \frac{(m-2)(m-3}{3.4}\mathrm{U}^{IV}_2 + \ldots + \frac{(m-2)(m-3).\;.2.1}{3.4\ldots(m-1)m}\mathrm{U}^{(m)}_{m-2}\right]\mathrm{W}^{(r-m)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left[\mathrm{U}^{(r-m+2)}_0 + \frac{m-2}{r-m+3}\mathrm{U}^{(r-m+3)}_1 + \frac{(m-2)(m-3)}{(r-m+3)(r-m+4)}\mathrm{U}^{(r-m+4)}_2 + \ldots + \frac{(m-2)(m-3)\ldots2.1}{(r-m+3)\ldots\ldots r}\mathrm{U}^{(r)}_{m-2}\right]\mathrm{W}$$

Fasst man den zweiten Theil dieser Gleichungen aufmerksamer ins Auge, so gewahrt man darin die Entwicklung des mit L_1 bezeichneten Polynoms, multiplizirt mit einem constanten Factor, und kann sodann diese Gleichung auch in der folgenden Weise:

$$(r-r)\,\mathrm{U}'_m\mathrm{W}^{(r+1)} = (-1)^{m-1}\,r!\,\mathrm{L}_1.$$

aufzeichnen. Endlich gibt der Vergleich dieser so eben gewonnenen mit der ersten der beiden Gleichungen (542):

$$\mathrm{Q} = (-1)^{m-1}\,\frac{(r-r)\,\mathrm{W}^{(r+1)}}{(r+1)!} \qquad (543)$$

Genau auf dieselbe Weise ergibt sich auch der Werth von Q' proportional dem $(r-r)\,\mathrm{W}^{(r+2)}$. Man zeichnet sich nämlich die beiden Gleichungen auf, die zur Bestimmung dieser Grössen dienlich sind. Sie sind die zweite aus der Gruppe (541) und diejenige, die aus der allgemeinen (393) hervorgeht, wenn man r in $r-m+3$ verwandelt, nämlich:

$$\mathrm{L}_2 = (\mathrm{U}''_m - \mathrm{U}'_{m-1} + \mathrm{U}_{m-2})\,\mathrm{Q} + (r+2)\,\mathrm{U}'_m\mathrm{Q}'$$

$$\overline{h-r\underset{*}{+}m-3}\,.\,\mathrm{W}^{(r+2)} = \overline{h-r\overset{*}{+}m-3}\,.\,\mathrm{W}^{(r+1)} + \overline{h-r\overset{*'}{+}m-3}\,.\,\mathrm{W}^{(r)} + \ldots\ldots + \overline{h-r\overset{*(r+1)}{+}m-3}\,.\,\mathrm{W}.$$

Man setze nun anstatt der besternten Symbole ihre Werthe aus (392), nehme Rücksicht auf $h = r$ und auf die eben gewonnene Relation (543), so gibt die Vergleichung der vorliegenden zwei Bestimmungsgleichungen sofort:

$$Q' = (-1)^{m-1} \frac{(r - r)\, W^{(r+2)}}{(r+2)!} \tag{544}$$

Genau in derselben Weise ergibt sich nun auch:

$$Q'' = (-1)^{m-1} \frac{2\,(r - r) . W^{(r+3)}}{(r+3)!} \tag{545}$$

und endlich durch Vergleichung der letzten aus der Gruppe (541) mit der (393) selbst:

$$Q^{(m-2)} = (-1)^{m-1} \frac{(m-2)!}{(r+m-1)!} (r - r)\, W^{(r+m-1)}. \tag{546}$$

Die aus den Formeln (543), (544), (545), (546) leicht ersichtliche Beziehung zwischen den mit Q bezeichneten und den entsprechenden W genannten Coefficienten ist aber keineswegs beschränkt auf die $m-1$gliedrige Gruppe $Q, Q', \ldots\ldots Q^{(m-2)}$; sie ist vielmehr eine allgemein giltige und heisst, welche ganze und positive Bedeutung man der Zahl μ beilegen mag:

$$Q^{(m+\mu-2)} = (-1)^{m-1} \frac{(m+\mu-2)!}{(r+m+\mu-1)!} (r - r)\, W^{(r+m+\mu-1)}. \tag{547}$$

Es wird diess offenbar ganz allgemein erwiesen sein, wenn man zu zeigen im Stande ist, dass die vorliegende Gleichung richtig sei, wenn diejenige zurecht besteht, die man aus ihr gewinnt, μ durch die nächst höhere ganze Zahl $\mu+1$ ersetzend. Diess lässt sich aber darthun ohne wesentliche Schwierigkeit, wiewohl hiebei andere Bestimmungsgleichungen, als die so eben gebrauchten, in Anwendung treten müssen, die allgemeine nämlich aus dem Systeme (535) und diejenige, die man aus der (393) dadurch gewinnt, dass man r in $r+\mu+1$ verwandelt. Sie sind:

$$\begin{aligned}
0 = {} & (r+m+\mu)\, U'_m Q^{(m+\mu-1)} \\
& + \left\{ \binom{m+\mu}{2} U''_m - \binom{m+\mu-1}{1} U'_{m-1} + U_{m-2} \right\} Q^{(m+\mu-2)} \\
& + \left\{ \binom{m+\mu}{3} U'''_m - \binom{m+\mu-1}{2} U''_{m-1} + \binom{m+\mu-2}{1} U'_{m-2} - U_{m-3} \right\} Q^{(m+\mu-3)} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left\{ U_m^{(m+\mu)} - U_{m-1}^{(m+\mu-1)} + U_{m-2}^{(m+\mu-2)} - \ldots\ldots + (-1)^m U_0^{(\mu)} \right\} Q
\end{aligned} \tag{548}$$

$$\begin{aligned}
h - r \underset{*}{-} \mu - 1 . W^{(r+m+\mu)} = {} & h \overset{*}{-} r - \mu - 1 . W^{(r+m+\mu-1)} + h - r \overset{*'}{-} \mu - 1 . W^{(r+m+\mu-2)} + \ldots\ldots\ldots + \\
& + h - r \overset{*(r+m+\mu-1)}{-} \mu - 1 . W
\end{aligned}$$

Man bemerke nun, dass in der zweiten von ihnen: $W, W', W'' \ldots\ldots W^{(r)}$ endliche Werthe besitzen, während sich $W^{(r+1)}, W^{(r+2)}, \ldots\ldots W^{(r+m+\mu)}$ sämmtlich unendlich aus der Rechnung ergeben. Multiplizirt man sie daher mit dem verschwindenden Factor $r - r$, so dass dann anstatt der erwähnten Coefficienten der Reihenentwicklung des W nur mehr die Produkte:

$$(r-r)\,W^{(r+1)},\ (r-r)\,W^{(r+2)},\ (r-r)\,W^{(r+3)},\ \ldots\ldots$$

und

$$(r-r)\,W,\ (r-r)\,W',\ (r-r)\,W'',\ \ldots\ldots\ (r-r)\,W^{(r)}$$

zum Vorschein kommen; so sind die ersteren alle endlich und müssen in der Gleichung beibehalten werden, die anderen aber unendlich klein und können gestrichen werden. Nimmt man nun noch Rücksicht auf $h=r$ und auf die unter (392) dargelegten Bedeutungen der besternten Coefficienten, so hat man:

$$(-1)^{m-1}\frac{(\mu+1)(\mu+2\ldots(\mu+m-1)}{(r+\mu+2)(r+\mu+3)\ldots(r+m+\mu-1)}U'_m(r-r)\,W^{(r+m+\mu)}=$$

$$=(-1)^{m-2}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+m-2)}{(r+\mu+2)(r+\mu+3)\ldots(r+m+\mu-1)}\left[U_{m-2}-\frac{m+\mu-1}{1}U'_{m-1}+\frac{(m+\mu-1)(m+\mu)}{1.2}U''_m\right](r-r)W^{(r+m+\mu-1)}+ \quad (549)$$

$$+(-1)^{m-3}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+m-3)}{(r+\mu+2)(r+\mu+3)\ldots(r+m+\mu-2)}\left[U_{m-3}-\frac{m+\mu-2}{1}U'_{m-2}+\frac{(m+\mu-2)(m+\mu-1)}{1.2}U''_{m-1}\right.$$

$$\left.-\frac{(m+\mu-2)(m+\mu-1)(m+\mu)}{1.2.3}U'''_m\right](r-r)\,W^{(r+m+\mu-2)}+$$

. . . .

$$+\binom{r+\mu+1}{\mu}\left[U_0^{(\mu)}-U_1^{(\mu+1)}+U_2^{(\mu+2)}\ldots\ldots+(-1)^m U_m^{(\mu+m)}\right](r-r)\,W^{(r+1)}.$$

Angenommen nun, die Formeln (543), (544), (545), (546) seien alle richtig bis zur (547), so dass sich:

$$(r-r)\,W^{(r+1)},\ (r-r)\,W^{(r+2)},\ \ldots\ldots\ (r-r)\,W^{(r+m+\mu-1)}$$

der Reihe nach ersetzen lassen durch:

$$(-1)^{m-1}\,(r+1)!\,Q,\quad (-1)^{m-1}\frac{(r+2)!}{1!}Q',\ \ldots\ldots\ (-1)^{m-1}\frac{(r+m+\mu-1)!}{(m+\mu-2)!}Q^{(m+\mu-2)}$$

so gibt die Vergleichung der vorliegenden Gleichung mit der ersten der beiden (548) allsogleich:

$$Q^{(m+\mu-1)}=(-1)^{m-1}\frac{(m+\mu-1)!}{(r+m+\mu)!}(r-r)\,W^{(r+m+\mu)} \quad (550)$$

welche Formel man auch aus der (547) erhält, μ durch $\mu+1$ ersetzend. Diese Relation ist daher richtig für beliebige ganze und positive μ. Man kann nun das in Rede stehende asymptotische Integral, insoferne es als Produkt dasteht aus einer Exponentialgrösse $e^{\alpha x}$ in eine unendliche absteigende Reihe, die folgende Form nämlich:

$$y=e^{\alpha x}\left[Wx^r+\binom{r}{1}W'x^{r-1}+\binom{r}{2}W''x^{r-2}+\ldots\ldots\right]$$

für ganze und positive r zerlegen in zwei Theile, von denen der erste, bestehend aus $r+1$ Gliedern, seine Coefficienten aus der Reihenentwicklung derselben Function W bezieht, die in der Substitutions-

59

gleichung (501) erscheint; der andere hingegen, die Gestalt einer absteigenden unendlichen Reihe tragende, aus den Coefficienten der aufsteigenden Entwicklung der anderen Function Q zusammengefügt ist, welche die logarithmische Transcendente zum Factor hat. Es ergibt sich nämlich ganz allgemein das folgende Integral einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung mit Coefficienten vom Grade m, wenn zufällig r eine ganze Zahl ist:

$$(551)\quad \begin{aligned} y = {} & e^{ax}\left[W x^r + \binom{r}{1} W' x^{r-1} + \binom{r}{2} W'' x^{r-2} + \ldots\ldots + \binom{r}{r} W^{(r)}\right] \\ & + (-1)^{m-1}\, r!\, e^{ax}\left[\frac{Q}{x} - \frac{Q'}{x^2} + \frac{Q''}{x^3} - \ldots\ldots\ldots\right] \end{aligned}$$

Der erste Bestandtheil von y kann als r^{ter} Differentialquotient, der zweite ebenfalls als Differentialquotient mit dem Index -1 bezeichnet werden, so dass das y auch in der folgenden Weise hingezeichnet zu werden vermag:

$$(552)\quad y = \frac{d^r}{du^r}\left[e^{ux} W\right]\Big\}_{\alpha} + (-1)^{m-1} r!\, \frac{d^{-1}}{du^{-1}}\left[e^{ux} Q\right]\Big\}_{\sigma}$$

Eine Formel, die für jedes ganze und positive r und so auch für jedes m giltig ist, und die auch die früher angeführte (529), welche zu einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung mit quadratischen Coefficienten gehört, als speciellen Fall in sich enthält. Die Bestimmungsgleichungen (537) dienen hiebei zur Berechnung des W, während die anderen (535) die Glieder von Q liefern, jedoch erst von $Q^{(m-1)}$ angefangen. Dagegen sind $Q, Q', Q'', \ldots\ldots Q^{(m-2)}$ aus der Gruppe (541) zu ziehen und erscheinen aus derselben mit folgenden Werthen:

$$(553)\quad \begin{aligned}
Q &= \frac{1}{(r+1)\,U'_m} L_1 \\
Q' &= \frac{1}{(r+1)(r+2)\,U'^2_m}\Big\{(r+1)\,U'_m L_2 - (U''_m - U'_{m-1} + U_{m-2})\,L_1\Big\} \\
Q'' &= \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)U'^3_m}\Big\{(r+1)(r+2)U'^2_m L_3 - (r+1)U'_m(3U''_m - 2U'_{m-1} + U_{m-2})L_2 + \\
&\quad + \Big[(U''_m - U'_{m-1} + U_{m-2})(3U''_m - 2U'_{m-1} + U_{m-2}) - (r+2)U'_m(U'''_m - U''_{m-1} + U'_{m-2} - U_{m-3})\Big]L_1\Big\} \\
Q''' &= \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)U'^4_m}\Big\{(r+1)(r+2)(r+3)U'^3_m L_4 - (r+1)(r+2)U'^2_m(6U''_m - 3U'_{m-1} + U_{m-2})L_3 \\
&\quad + \left[\begin{array}{l}(r+1)U'_m(3U''_m - 2U'_{m-1} + U_{m-2})(6U''_m - 3U'_{m-1} + U_{m-2}) - \\ \qquad - (r+1)(r+3)U'^2_m(4U'''_m - 3U''_{m-1} + 2U'_{m-2} - U_{m-3})\end{array}\right]L_2 \\
&\quad - \left[\begin{array}{l}(U''_m - U'_{m-1} + U_{m-2})(3U''_m - 2U'_{m-1} + U_{m-2})(6U''_m - 3U'_{m-1} + U_{m-2}) - \\ -(r+3)U'_m(U''_m - U'_{m-1} + U_{m-2})(4U'''_m - 3U''_{m-1} + 2U'_{m-2} - U_{m-3}) - \\ -(r+2)U'_m(U'''_m - U''_{m-1} + U'_{m-2} - U_{m-3})(6U''_m - 3U'_{m-1} + U_{m-2}) + \\ +(r+2)(r+3)U'^2_m(U^{IV}_m - U'''_{m-1} + U''_{m-2} - U'_{m-3} + U_{m-4})\end{array}\right]L_1
\end{aligned}$$

. . . .

Diese Analysis legt den Zusammenhang dar zwischen dem asymptotischen Integrale einer Differentialgleichung von beliebiger Ordnungszahl und beliebigem Coefficientenbau und dem aufsteigenden Integrale ihrer Hilfsgleichung, so dass es einerlei ist, welches von beiden man sich zuerst verschafft hat; es lässt sich immer das andere dann unmittelbar niederschreiben, nur kömmt hier abermals zu bemerken, dass die aufsteigende Integration nur nützlich ist, wenn sie nach Potenzen der Factoren des ersten Coefficienten der Hilfsgleichung fortschreitet, wo, wie früher nachgewiesen worden ist, auch zugleich die convergentesten Reihen und zwar mit einem bekannten Grade der Convergenz erzielt werden. Es gäbe diess dem aufsteigenden Integriren einen besonderen Werth, wenn es nicht in den meisten Fällen bequemer erschiene, das asymptotische Integral aufzusuchen, für welches die früher auseinandergesetzte allgemeine graphisch-combinatorische Methode der Coefficientenbestimmung den einen und den andern Zweck zugleich erreicht.

§. 11.

Integration durch bestimmte Integrale.

(Schluss.)

Es ist schon Seite 373 der Formenlehre eines besonders merkwürdigen Satzes Erwähnung geschehen, der die innige Verbindung der aufsteigenden und asymptotischen Integrale einer beliebigen Differentialgleichung und der ihr zugehörigen Hilfsgleichung so zu sagen vervollständigt. Der Satz ist der folgende: Die zweite Hilfsgleichung, d. h. die Hilfsgleichung der Hilfsgleichung, ist wieder die vorgelegte Differentialgleichung selbst. Bringt man hiemit die Ergebnisse der im vorigen Paragraphe gepflogenen Untersuchungen in Verbindung, nach welchen das aufsteigende Integral der Hilfsgleichung unmittelbar das asymptotische der vorgelegten gibt, so sieht man, dass nothwendigerweise das aufsteigende der vorgelegten Gleichung auch das asymptotische der ihr entsprechenden ersten Hilfsgleichung liefern müsse.

Der Satz, von welchem die Rede ist, wurde am bezeichneten Orte, nämlich Seite 373 des I. Bandes, nicht bewiesen. Diess soll daher gegenwärtig geschehen und wir gehen zu diesem Zwecke von der allgemeinen Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung mit Coefficienten vom m^{ten} Grade aus, machen aber der leichten Uebersicht wegen von solchen Bezeichnungen der constanten Parameter Gebrauch, dass daraus unmittelbar ersichtlich ist, erstens zu welchem Differentialquotienten der abhängigen Veränderlichen y und zweitens zu welcher Potenz der unabhängigen Variablen x dieser Parameter als Coefficient gehörig sei; denjenigen nämlich, der zu dem Produkte $x^s y^{(r)}$ als Factor gehörig ist, bezeichnen wir mit: $[r, s]$.

Die entwickelt hingeschriebene Differentialgleichung würde in dieser Bezeichnungsweise folgendermassen lauten:

$$
\begin{aligned}
&\Big\{[n, m]\, x^m + [n, m-1]\, x^{m-1} + [n, m-2]\, x^{m-2} + \ldots\ldots + [n, 0]\Big\}\, y^{(n)} + \\
(554)\quad &+ \Big\{[n-1, m]\, x^m + [n-1, m-1]\, x^{m-1} + [n-1, m-2]\, x^{m-2} + \ldots\ldots + [n-1, 0]\Big\}\, y^{(n-1)} + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \Big\{[0, m]\, x^m + [0, m-1]\, x^{m-1} + [0, m-2]\, x^{m-2} + \ldots\ldots + [0, 0]\Big\}\, y = 0
\end{aligned}
$$

In der üblichen symbolischen Gestalt aber aufgezeichnet, würde sie einfacher, wie folgt, aussehen:

$$
(555)\qquad
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{S}\, \big[[p, q]\, x^q y^{(p)}\big] \\
p + \pi &= n \\
q + \omega &= m.
\end{aligned}
$$

Nun denken wir uns in der Absicht, das y in der Form eines bestimmten Integrales aufzufinden, die nachstehende Substitution durchgeführt:

$$
(556)\qquad y = \int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V du
$$

so ergibt sich als Resultat zunächst:

$$
(557)\qquad 0 = \int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V\, \big[U_m x^m + U_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + U_1\, x + U_0\big]\, du
$$

mit den Werthen:

$$
\begin{aligned}
&U_m \;\;\;\;\; = [n, m]\, u^n + [n-1, m]\, u^{n-1} + [n-2, m]\, u^{n-2} + \ldots\ldots + [0, m] \\
(558)\quad &U_{m-1} = [n, m-1]\, u^n + [n-1, m-1]\, u^{n-1} + [n-2, m-1]\, u^{n-2} + \ldots\ldots + [0, m-1] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&U_0 \;\;\;\;\;\; = [n, 0]\, u^n + [n-1, 0]\, u^{n-1} + [n-2, 0]\, u^{n-2} + \ldots\ldots + [0, 0].
\end{aligned}
$$

Das Verfahren des theilweisen Integrirens, so wie im vorigen Paragraphe und auch Seite 384 des I. Bandes, in Anwendung gesetzt und die nachherige Zerfällung in mehrere Bestandgleichungen führt nun zu der ersten Hilfsgleichung in V, die Seite 385 des I. Bandes unter (500) zu ersehen ist, und aussieht, wie folgt:

$$
\begin{aligned}
&V^{(m)}.\, U_m \\
&+ V^{(m-1)}\Big[\tbinom{m}{1} U'_m - \quad U_{m-1}\Big] \\
(559)\quad &+ V^{(m-2)}\Big[\tbinom{m}{2} U''_m - \tbinom{m-1}{1} U'_{m-1} + U_{m-2}\Big] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ V^{(r)}\Big[\tbinom{m}{r} U_m^{(m-r)} - \tbinom{m-1}{r} U_{m-1}^{(m-r-1)} + \tbinom{m-2}{r} U_{m-2}^{(m-r-2)} - \ldots\ldots + (-1)^{m-r}\, U_r\Big] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ V''\Big[\tbinom{m}{2} U_m^{(m-2)} - \tbinom{m-1}{2} U_{m-1}^{(m-3)} + \tbinom{m-2}{2} U_{m-2}^{(m-4)} - \ldots\ldots + (-1)^{m-2}\, U_2\Big] \\
&+ V'\Big[\tbinom{m}{1} U_m^{(m-1)} - \tbinom{m-1}{1} U_{m-1}^{(m-2)} + \tbinom{m-2}{1} U_{m-2}^{(m-3)} - \ldots\ldots + (-1)^{m-2}.2\, U'_2 + (-1)^{m-1}\, U_1\Big] \\
&+ V\, \Big[\quad U_m^{(m)} \quad - \quad U_{m-1}^{(m-1)} + \quad U_{m-2}^{(m-2)} - \ldots\ldots + (-1)^{m-2}\, U''_2 + (-1)^{m-1} U'_1 + (-1)^m U_0\Big] = 0
\end{aligned}
$$

Sie ist von der m^{ten} Ordnung und hat Coefficienten, die die Gradzahl n nicht überschreiten; man wird sie daher in ähnlicher Bezeichnungsweise wie die (554) auch so hinzeichnen können, dass (r, s) denjenigen constanten Parameter andeutet, der zum Produkte $u^s V^{(r)}$ als Factor gehört. Er ist offenbar aus den mit $[p, q]$ bezeichneten Symbolen in linearer Form zusammengefügt, und man wird ihn erhalten, wenn man aus sämmtlichen Gliedern desjenigen Polynomes, welches in der eben gewonnenen Hilfsgleichung (559) mit $V^{(r)}$ multiplizirt erscheint, d. h.

$$\binom{m}{r} U_m^{(m-r)} - \binom{m-1}{r} U_{m-1}^{(m-r-1)} + \binom{m-2}{r} U_{m-2}^{(m-r-2)} - \ldots\ldots + (-1)^{m-r} U_r \tag{560}$$

die mit dem Factor u^s verbundenen Bestandtheile heraushebt und zu einer Summe vereinigt. Man erhält hiemit:

$$\begin{aligned}(r, s) = \binom{m}{r} & (m-r+s)(m-r+s-1)(m-r+s-2)\ldots\ldots(s+1)[m-r+s, m] \\ -\binom{m-1}{r} & \qquad\qquad (m-r+s-1)(m-r+s-2)\ldots\ldots(s+1)[m-r+s-1, m-1] \\ +\binom{m-2}{r} & \qquad\qquad\qquad\qquad (m-r+s-2)\ldots\ldots(s+1)[m-r+s-2, m-2] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(-1)^{m-r} & [s, r]\end{aligned} \tag{561}$$

oder in der kürzeren symbolischen Ausdrucksweise:

$$(r, s) = \mathbf{S}\left[(-1)^{m-r+\beta}\binom{r+\beta}{r}\frac{(s+\beta)!}{s!}[s+\beta, r+\beta]\right] \tag{562}$$
$$\beta + \gamma = m - r$$

Diese Formel dient zur Construction der ersten Hilfsgleichung in der nachstehenden entwickelten Gestalt:

$$\begin{aligned}&\Big\{(m, n)u^n + (m, n-1)u^{n-1} + (m, n-2)u^{n-2} + \ldots\ldots + (m, 0)\Big\} V^{(m)} \\ +&\Big\{(m-1, n)u^n + (m-1, n-1)u^{n-1} + (m-1, n-2)u^{n-2} + \ldots\ldots + (m-1, 0)\Big\} V^{(m-1)} + \\ +&\Big\{(m-2, n)u^n + (m-2, n-1)u^{n-1} + (m-2, n-2)u^{n-2} + \ldots\ldots + (m-2, 0)\Big\} V^{(m-2)} + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +&\Big\{(0, n)u^n + (0, n-1)u^{n-1} + (0, n-2)u^{n-2} + \ldots\ldots + (0, 0)\Big\} V = 0.\end{aligned} \tag{563}$$

Um jetzt von dieser ersten Hilfsgleichung zur zweiten zu gelangen, nehmen wir an, man wolle derselben ebenfalls durch ein anstatt V gesetztes bestimmtes Integral Genüge leisten, namentlich durch das folgende:

$$V = \int_{t_0}^{t_1} e^{-ut} Z dt \tag{564}$$

[illegible]

allwo Z eine reine Function der Variablen t ohne u bedeutet.

Das zunächst gewonnene Substitutionsresultat ist:

(565) $$0 = \int_{t'}^{t''} e^{-tu} Z dt \left[T_n u^n + T_{n-1} u^{n-1} + T_{n-2} u^{n-2} + \ldots\ldots + T_0\right]$$

mit den Werthen:

(566)
$$T_n = (-1)^m (m,\ n)\, t^m + (-1)^{m-1} (m-1,\ n)\, t^{m-1} + (-1)^{m-2} (m-2,\ n)\, t^{m-2} + \ldots\ldots + (0,\ n)$$
$$T_{n-1} = (-1)^m (m, n-1)\, t^m + (-1)^{m-1} (m-1, n-1)\, t^{m-1} + (-1)^{m-2} (m-2, n-1)\, t^{m-2} + \ldots\ldots + (0, n-1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T_0 = (-1)^m (m, 0)\, t^m + (-1)^{m-1} (m-1, 0)\, t^{m-1} + (-1)^{m-2} (m-2, 0)\, t^{m-2} + \ldots\ldots + (0, 0).$$

Durch theilweises Integriren und Zerfällen in Bestandgleichungen gelangt man nun zur folgenden zweiten Hilfsgleichung in z:

$$0 = (ZT_n)^{(n)} + (ZT_{n-1})^{(n-1)} + (ZT_{n-2})^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots + ZT_0.$$

Die zunächst, nach Differentialquotienten von Z geordnet, in folgender Gestalt erscheint:

(567)
$$\begin{aligned} 0 = {} & Z^{(n)} . T_n \\ & + Z^{(n-1)} \left[\tbinom{n}{1} T'_n + T_{n-1}\right] \\ & + Z^{(n-2)} \left[\tbinom{n}{2} T''_n + \tbinom{n-1}{1} T'_{n-1} + T_{n-2}\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + Z^{(p)} \left[\tbinom{n}{p} T_n^{(n-p)} + \tbinom{n-1}{p} T_{n-1}^{(n-p-1)} + \tbinom{n-2}{p} T_{n-2}^{(n-p-2)} + \ldots\ldots\ldots + T_p\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + Z \left[T_n^{(n)} + T_{n-1}^{(n-1)} + T_{n-2}^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots + T_0\right] \end{aligned}$$

aber auch durch Substitution der für die Polynome T geltenden Ausdrücke ganz in entwickelter Gestalt hingezeichnet werden kann, und dann, auf die symbolische Summenform gebracht, folgendermassen aussehen wird:

(568)
$$\mathrm{S}\left\{[[p,\ q]]\ t^q Z^{(p)}\right\} = 0$$
$$p + \pi = n$$
$$p + \omega = m.$$

Sie ist, wie man sieht, ebenfalls von der n^{ten} Ordnung, wie die vorgelegte (555), sie hat ferner Coefficienten des m^{ten} Grades, wie diese. Liesse sich nun überhaupt nachweisen, dass für beliebige p und q

(569) $$[[p,\ q]] = [p,\ q]$$

bestehe, so wäre zwischen der vorgelegten Differentialgleichung (555) und ihrer Hilfsgleichung in Z nur eben der Unterschied in der Benennung der unabhängigen sowohl, wie auch der abhängigen Ver-

änderlichen, die hier x und y, dort t und Z heissen würden. Hätte man mithin $y = f(x)$, so wäre auch $Z = f(t)$. Es ist daher nur noch die Identität der beiden Symbole $[[p, q]]$ und $[p, p]$ und diess zwar nur bis auf einen constanten und allen gemeinschaftlichen Factor nachzuweisen, durch welchen man sich nachher die Differentialgleichung dividirt denken kann.

Zu diesem Zwecke ist zu bemerken, dass der allgemeine Werth von $[[p, q]]$ gewonnen werde aus demjenigen Polynome, mit welchem in der zweiten Hilfsgleichung $Z^{(p)}$ multiplizirt erscheint, nämlich:

$$\binom{n}{p} T_n^{(n-p)} + \binom{n-1}{p} T_{n-1}^{(n-p-1)} + \binom{n-2}{p} T_{n-2}^{(n-p-2)} + \dots\dots\dots + T_p$$

und zwar dadurch, dass man aus sämmtlichen Gliedern desselben die mit t^q als Factor verknüpften Bestandtheile heraushebt und zu einem Aggregate vereinigt. Dadurch ergibt sich aber zunächst:

$$\begin{aligned}[[p, q]] = & (-1)^{n-p+q} \binom{n}{p} (n-p+q)(n-p+q-1) \dots\dots (q+1)(n-p+q, n) \\ & + (-1)^{n-p+q-1} \binom{n-1}{p} (n-p+q-1) \dots\dots\dots\dots (q+1)(n-p+q-1, n-1) \\ & + (-1)^{n-p+q-2} \binom{n-2}{p} (n-p+q-2) \dots\dots\dots\dots (q+1)(n-p+q-2, n-2) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (-1)^q (q, p)\end{aligned}$$

oder in Summengestalt:

$$[[p, q]] = \mathrm{S} \left\{ (-1)^{q+\alpha} \binom{p+\alpha}{p} \frac{(q+\alpha)!}{q!} (q+\alpha, p+\alpha) \right\}$$
$$\alpha + \delta = n - p$$

In dieser Formel kommen noch die Coefficienten der ersten Hilfsgleichung vor, die sich aber vermittelst der allgemeinen Formel (562) durch die Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung ausdrücken lassen, und zwar hat man eben vermöge der Gleichung (562)

$$(q+\alpha, p+\alpha) = \mathrm{S} \left\{ (-1)^{m+q+\alpha+\beta} \binom{q+\alpha+\beta}{q+\alpha} \frac{(p+\alpha+\beta)!}{(p+\alpha)!} [p+\alpha+\beta, q+\alpha+\beta] \right\}$$
$$\beta + \gamma = m - q - \alpha$$

was dann, in die Gleichung (570) substituirt, den gesuchten Werth des Parameters gibt in Gestalt einer Summe mit zwei angehängten Beziehungsgleichungen:

$$[[p, q]] = \mathrm{S} \left\{ (-1)^{m+\beta} \frac{(q+\alpha+\beta)!\,(p+\alpha+\beta)!}{p!\;q!\;\alpha!\;\beta!} [p+\alpha+\beta, q+\alpha+\beta] \right\}$$
$$\alpha + \delta = n - p$$
$$\alpha + \beta + \gamma = m - q.$$

Sie ist noch einer bedeutenden Reduction fähig. Um diese zu vollführen, mag vor allem bemerkt werden, dass die Summe $\alpha + \beta$ beinahe in alle Factoren ihrer Glieder eingehe. Wir veranstalten daher die Summirung am zweckmässigsten so, dass wir dieser Summe der Reihe nach alle ganzen und posi-

tiven Werthe, deren sie fähig ist, nämlich von Null an bis $n-q$ ertheilen und so den zweiten Theil dieser Gleichung in ihre Bestandtheile zerlegen. Wir nehmen also der Reihe nach:

$$\begin{array}{llllll} \alpha+\beta= & 0, & 1, & 2, & 3 \ldots\ldots & \mu \ldots\ldots m-q \\ \gamma= & m-q, & m-q-1, & m-q-2, & m-q-3 \ldots\ldots & m-q-\mu \ldots\ldots 0. \end{array}$$

Dadurch erhalten wir:

$$572) \quad \begin{aligned} [[p.q]] = & \underset{\substack{\alpha+\delta=n-p \\ \alpha+\beta=0}}{\mathrm{S}} \left\{(-1)^{m+\beta}\frac{1}{\alpha!\,\beta!}[p,q]\right\} + \underset{\substack{\alpha+\delta=n-p \\ \alpha+\beta=1}}{\mathrm{S}} \left\{(-1)^{m+\beta}\frac{(q+1)!\,(p+1)!}{q!\;\;p!\;\;\alpha!\;\;\beta!}[p+1,q+1]\right\} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \underset{\substack{\alpha+\delta=n-p \\ \alpha+\beta=\mu}}{\mathrm{S}} \left\{(-1)^{m+\beta}\frac{(q+\mu)!\,(p+\mu!}{q!\;\;p!\;\;\alpha!\;\;\beta!}[p+\mu,q+\mu]\right\} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \underset{\substack{\alpha+\delta=n-p \\ \alpha+\beta=m-q}}{\mathrm{S}} \left\{(-1)^{m+\beta}\frac{m!\,(m+p-q)!}{q!\;p!\;\alpha!\;\beta!}[m+p-q,m]\right\} \end{aligned}$$

Die erste dieser Summen besteht nur aus einem einzigen Gliede, weil die Grössen α und β, nach welchen summirt werden soll, kraft der Gleichung $\alpha+\beta=0$, der durch ganze und positive α und β Genüge geleistet werden soll, nur ein einziges System von Werthen, nämlich $\alpha=0$ und $\beta=0$ zu lassen. Da nun bekanntlich $0!=1$ ist, so reduzirt sich die erste Summe auf $(-1)^m[p,q]$. Die übrigen Summen sind der Nulle gleich. Um diess zu zeigen, fassen wir die allgemeine von ihnen ins Auge, für welche $\alpha+\beta=\mu$ besteht. Wir ziehen zuvörderst alle Factoren heraus und schreiben sie vor das Summenzeichen, die α und β, welche die Grössen sind, nach welchen summirt werden soll, nicht enthalten. Diese eine Summe verwandelt sich hiedurch in:

$$(-1)^m\frac{(q+\mu)!\;(p+\mu)!}{q!\qquad p!}[p+\mu,\,q+\mu].\underset{\substack{\alpha+\delta=n-p \\ \alpha+\beta=\mu}}{\mathrm{S}}\left[(-1)^\beta\frac{1}{\alpha!\;\beta!}\right]$$

Nun besteht aber offenbar:

$$0=(1-1)^\mu=1-\mu+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}+\ldots=\underset{\alpha+\beta=\mu}{\mathrm{S}}\left\{(-1)^\beta\frac{\mu!}{\alpha!\,\beta!}\right\}=\mu!\,\underset{\alpha+\beta=\mu}{\mathrm{S}}\left\{(-1)^\beta\frac{1}{\alpha!\,\beta!}\right\}$$

Mithin verschwinden alle in Rede stehenden Summen, für welche μ einen Werth bekömmt, der grösser ist als Null und $n-p$ nicht überschreitet. Da aber in allen Summen grössere μ als $n-p$ gar nicht vorkommen, und namentlich das der letzten Summe angehörige μ und sohin auch alle übrigen wegen $m+p-q \leqq n$, mithin $\mu = m-q \leqq n-p$ augenscheinlich $n-p$ niemals überschreitet, so verschwinden in der Gleichung (572) alle Glieder bis auf das einzige erste und es reduzirt sich dieselbe offenbar auf:

$$[[p, q]] = (-1)^m [p, q].$$

Es sind also die constanten Parameter in den zwei, einer und derselben Ordnungszahl angehörigen Differentialgleichungen mit gleich hohen Coefficienten bis auf den constanten Factor $(-1)^m$ dieselben, in der vorgelegten Differentialgleichung nämlich und in ihrer zweiten Hilfsgleichung (569), d. h. die einen sind den anderen entweder identisch gleich, oder dem Zeichen nach entgegengesetzt. Da aber ein solcher Gegensatz im Zeichen der Coefficienten keine Verschiedenheit der Differentialgleichungen begründet, so wird auch das Integral der Hilfsgleichung mit jenem der vorgelegten Differentialgleichung der Form nach offenbar zusammenfallen, und wenn man von der (554) zwischen y und x, irgendwie integrirend, einen Ausdruck gewonnen hätte mit n Constanten, etwa den folgenden:

$$y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) + \dots\dots\dots + C_n f_n(x)$$

so wäre offenbar auch:

$$Z = A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) + A_3 f_3(t) + \dots\dots\dots + A_n f_n(t)$$

unter $A_1, A_2, A_3, \dots\dots A_n$ ebenfalls n Integrationsconstante verstanden, die mit $C_1, C_2, \dots\dots C_n$ zusammenfallen oder auch davon verschieden sein können. Substituirt man nun den hier angenommenen Werth anstatt y in die Gleichung (556), sodann aber anstatt V den unter (564) angenommenen Ausdruck, Z zugleich durch den vorliegenden Werth ersetzend, so erhält man:

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) \dots\dots + C_n f_n(x) =$$

$$= \int_{u'}^{u''} \int_{t'}^{t''} e^{u(x-t)} \Big\{ A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) + A_3 f_3(t) + \dots\dots + A_n f_n(t) \Big\} \, du dt$$

eine Gleichung, in welcher nur noch die Werthe der Constanten $A_1, A_2, \dots\dots A_n$ in Function von $C_1, C_2, \dots\dots C_n$ und jene der Integrationsgrenzen zu bestimmen kämen, wenn man nicht wüsste, dass sie nichts Anderes sei, als die wohlbekannte Fourier'sche Formel, kraft welcher überhaupt:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t'}^{t''} e^{u(x-t)\sqrt{-1}} f(t) \, du dt.$$

Hiebei sind die Grenzen t' und t'' willkürlich, nur muss der dem x ertheilte Werth dazwischen fallen. Hieraus folgt, dass der in seine n Bestandtheile zerlegte erste Theil der Gleichung Glied für Glied dem eben so zerklüfteten zweiten Theile identisch gleich angenommen werden könne, wenn man nur annimmt:

$$C_1 = 2\pi A_1, \quad C_2 = 2\pi A_2, \dots\dots\dots \; C_n = 2\pi A_n.$$

An diese Ergebnisse der Rechnung lassen sich einige Folgerungen knüpfen in Bezug auf die Integration der Differentialgleichungen in geschlossener Gestalt. Wir haben nämlich gesehen, dass das asymptotische Integral der vorgelegten (554) diese Beschaffenheit zeige, wenn gewisse Bedingungen n an der Zahl, von denen die erste besagt, dass eine gewisse Function der constanten Parameter, die die Rolle eines Exponenten oder Differentiationsindex spielt, in eine ganze und positive Zahl übergehe. Die übrigen $n - 1$ Bedingungen sind, wie im vorhergehenden Paragraphe gezeigt worden ist, die Bedingungen einer im Integrale nicht vorhandenen logarithmischen Transcendente. Wenn also dieser Logarithmus im aufsteigenden, nach Potenzen eines Factors des ersten Coefficienten geordneten Integrale fehlt, so ist ein geschlossenes asymptotisches Integral vorhanden. Da aber die zweite Hilfsgleichung abermals die vorgelegte Differentialgleichung selbst ist, so kann man auch sagen, dass, wenn im aufsteigenden Integrale der vorgelegten Differentialgleichung, geordnet nach Potenzen eines Factors des ersten Coefficienten, kein Logarithmus enthalten ist, so ist das Integral der Hilfsgleichung ein geschlossenes. Man kann also dann die vorgelegte Differentialgleichung wieder in geschlossener Form integriren, jedoch ist diese Form die eines bestimmten Integrales. Es bieten sich also demjenigen, der auf diese Beschaffenheit Werth legt, mannigfache Mittel dar, seinen Zweck zu erreichen.

Nachdem auf diese Weise die Verwandtschaft zwischen dem asymptotischen Integrale und demjenigen, welches aus Quadraturen zusammengesetzt ist, zur Genüge hervorgehoben worden, gelangt die Integrationsmethode in Form von bestimmten Integralen in ihren wesentlichsten Momenten zum Abschlusse. Da jedoch die hieher gehörigen Lehren zerstreut in den zwei Bänden des vorliegenden Werkes an verschiedenen Orten vorkommen, so dass ein Theil im ersten Bande Seite 38 bis 119 II. Abschnitt, ein anderer Theil in demselben Bande Formenlehre von Seite 328 bis 374, endlich ein dritter Theil an dem gegenwärtigen Orte sich befindet, wozu noch kürzere hie und da eingestreute Bemerkungen kommen, so dürfte es nicht unerspriesslich sein, wiederholungsweise das ohnehin nirgends zusammengefasste Verfahren hier noch kurz durchzunehmen, von welchem der Rechner Gebrauch machen wird, wenn er in Form von bestimmten Integralen zu integriren wünscht.

Eine jede der Integrationsmethoden, die wir bisher kennen gelernt haben, hat ihren besonderen Kreis vorzugsweiser Brauchbarkeit und man sieht es in der Regel der Differentialgleichung allsogleich durch Betrachtung der Gradzahlen ihrer Coefficienten an, wie viele verschiedene Gruppen particulärer Integrale, von welcher Gestalt vorhanden, ob sie mit oder ohne vorgängiger Transformation und durch welches specielle Integrationsverfahren aufzufinden seien. Ansteigungen in den Anfangscoefficienten, wenn sie mehr als eine Einheit und vorzüglich eine ganze Zahl auf das Coefficientenpaar betragen, veranlassen zu einer vorgängigen Transformation, bezüglich Abscheidung des Factors zweiter Classe aus einem oder mehreren particulären Integralen. Fernere Ansteigungen an einer anderen Seite des normalen Polygones mit gebrochener, die Einheit nicht erreichender und vorzüglich nahe an Null stehender Repartitionszahl führen die Form des bestimmten Integrales als die brauchbarste in den Vordergrund. Gleich hohe und höchste Coefficienten, mithin eine Ansteigungszahl Null, veranlasst wieder zum Gebrauche der asymptotischen Methode. Aufsteigende Reihen, aber nur solche, die nach Potenzen eines

Factors des ersten Coefficienten geordnet sind, werden vorzüglich brauchbar, wenn es in der Differentialgleichung Abfälle gibt von weniger als einer Einheit auf das Coefficientenpaar. Grössere Abfälle von einer Einheit und mehr räumen abermals der asymptotischen Methode den Platz ein. Angenommen nun, der Rechner finde sich veranlasst, die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} &\left\{[n, m]\, x^m + [n, m-1]\, x^{m-1} + \cdots + [n, 0]\right\} y^{(n)} \\ + &\left\{[n-1, m]\, x^m + [n-1, m-1]\, x^{m-1} + \cdots + [n-1, 0]\right\} y^{(n-1)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + &\left\{[0, m]\, x^m + [0, m-1]\, x^{m-1} + \cdots + [0, 0]\right\} y = 0 \end{aligned} \tag{573}$$

oder

$$\begin{gathered} \mathrm{S}\,[[p, q]\, x^q y^{(p)}] \\ p + \pi = n \\ q + \omega = m \end{gathered} \tag{574}$$

zu erfüllen durch die Form:

$$y = \int_{u'}^{u''} e^{ux}\, V du, \tag{575}$$

so bekömmt er durch Substitution, theilweises Integriren, und Zerlegen in die folgenden zwei Gleichungen, denen zu genügen ist:

$$\begin{aligned} F(x)\Big|_{u'}^{u''} = e^{ux}\,[x^{m-1}\, U_m V] + \\ &+ x^{m-2}\,[U_{m-1} V - (U_m V)'] \\ &+ x^{m-3}\,[U_{m-2} V - (U_{m-1} V)' + (U_m V)''] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ x \quad [U_2 V - (U_3 V)' + (U_4 V)'' - \cdots \mp (U_m V)^{(m-2)}] \\ &+ \quad\; [U_1 V - (U_2 V)' + (U_3 V)'' - \cdots \mp (U_{m-1} V)^{(m-2)} \pm (U_m V)^{(m-1)}]\Big|_{u'}^{u''} = 0 \end{aligned} \tag{576}$$

und

$$U_0 V - (U_1 V)' + (U_2 V)'' - \cdots + (-1)^{m-1}\, (U_{m-1} V)^{(m-1)} + (-1)^m\, (U_m V)^{(m)} = 0 \tag{577}$$

allwo

$$\begin{aligned} U_m &= [n, m]\, u^n + [n-1, m]\, u^{n-1} + \cdots + [0, m] \\ U_{m-1} &= [n, m-1]\, u^n + [n-1, m-1]\, u^{n-1} + \cdots + [0, m-1] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_0 &= [n, 0]\, u^n + [n-1, 0]\, u^{n-1} + \cdots + [0, 0] \end{aligned} \tag{578}$$

sind. Die hier unter (577) vorliegende Differentialgleichung ist die erste Hilfsgleichung der zu integri-

renden. Da sie wirklich zur Integration gebracht werden muss, wenn man seinen Zweck: Auffindung des y in der Form (575) erreichen will, so muss sie entwickelt und geordnet hingezeichnet werden. Hiezu dient die symbolische Formel:

$$(579)\quad \begin{aligned} 0 &= S\left[(-1)^{m-r+\beta}\binom{r+\beta}{r}\frac{(s+\beta)!}{s!}[s+\beta, r+\beta]\, u^s\, V^{(r)}\right] \\ \beta+\gamma &= m-r \\ s+\sigma &= n \\ r+\rho &= m. \end{aligned}$$

Nimmt man nun an, die Veranlassung, durch bestimmte Integrale Genüge zu leisten, liege in dem Umstande, dass in der Differentialgleichung (573) vermöge des Verschwindens gewisser Anfangsglieder der ersten Coefficienten an einer Polygonseite, die p Coefficientenpaare umfasst, eine Gesammtansteigung um q Einheiten wahrgenommen wird, und dass $q < p$ ist, mithin die Repartitionszahl $\frac{q}{p} = \frac{1}{r}$ ein echter Bruch wird. Man kann sich, um etwas Bestimmtes ins Auge zu fassen, r denken als eine ganze positive Zahl. Die Hilfsgleichung besitzt in einem solchen Falle eine Seite des ihren Coefficientenbau umspannenden normalen Polygones, welches q Coefficientenpaare mit der gemeinsamen Ansteigung t begreift. Diess gibt $\frac{p}{q} = r$ Einheiten als Repartitionszahl für das Paar, und weist hin auf particuläre Integrale q an der Zahl dieser Hilfsgleichung, die sämmtlich in der Form:

$$(580)\quad V = e^{\int\psi du}\, S$$

vorhanden sind, allwo ψ eine algebraische ganze Function vom Grade r und S eine andere Function von u bedeutet, die vermöge ihres Einflusses auf die Gradzahlen der Coefficienten der ersten Classe angehörig ist:

$$(581)\quad \begin{aligned} \psi &= A_r\, u^r + A_{r-1}\, u^{r-1} + A_{r-2}\, u^{r-2} + \dots\dots\dots + A_1\, u + A_0 \\ S &= Tu^h + \binom{h}{1} T' u^{h-1} + \binom{h}{2} T'' u^{h-2} \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Die erste dieser beiden Functionen, das geschlossene ψ nämlich, verschafft man sich durch Transformation vermittelst der Substitution (500) nach §. 9 der Transformationslehre Seite 162 dieses Bandes, deren Wirkung im Allgemeinen ein Abfall um die Einheit in der Gradzahl vom vorletzten auf den letzten Coefficienten ist, welcher in der Transformirten in S erscheint und auf q verschiedene Arten erzielt werden kann, was ebenso viele verschiedene Functionen ψ gibt und auch ebenso viele S. Das S gewinnt man aber durch asymptotische Integration in der vorliegenden Form einer absteigenden unendlichen Reihe. Dass diese gelegentlich abbrechen kann unter gewissen Bedingungen, wissen wir schon. Da nun

$$(582)\quad \int\psi du = \frac{A_r}{r+1}\, u^{r+1} + \frac{A_{r-1}}{r}\, u^r + \frac{A_{r-2}}{r-1}\, u^{r-1} + \dots\dots\dots + A_0 u$$

besteht, so wird man, die binomische algebraische Gleichung:

$$A_r\, u^{r+1} = -\infty$$

auflösend, zuvörderst eine Reihe unendlicher Wurzeln:

$$u_1 \infty,\ u_2 \infty,\ u_3 \infty,\ \ldots\ldots\ldots\ u_s \infty\ \ldots\ldots\ldots$$

erhalten, deren jede für die obere Integrationsgrenze u'' genommen werden kann. Setzt man noch überdiess $u' = a$ unter a eine Constante verstanden, die man erst in der Folge beliebig zu wählen berechtigt ist, so wird das Resultat der Substitution:

$$y = C \int_a^{u_s\infty} e^{ux+\int\psi du} . Sdu \tag{583}$$

zwar nicht Null sein, wohl aber:

$$-\ CF(x, a)$$

und statuirt man anstatt y nicht ein einzelnes bestimmtes Integral, sondern ein Aggregat von solchen, wie folgt:

$$y = C_1 \int_a^{u_1\infty} e^{ux+\int\psi du}\, Sdu + C_2 \int_a^{u_2\infty} e^{ux+\int\psi du}\, Sdu + \ldots\ldots\ldots + C_s \int_a^{u_s\infty} e^{ux+\int\psi du}\, Sdu + \ldots\ldots \tag{584}$$

so wird das Substitutionsresultat sein:

$$-\ [C_1 + C_2 + \ldots\ldots\ldots + C_s + \ldots\ldots]\ F(x, a).$$

Das so angenommene y wird also einen Genüge leistenden Werth darstellen, wenn zwischen den Integrationsconstanten folgende Beziehung stattfindet:

$$C_1 + C_2 + \ldots\ldots\ldots + C_s + \ldots\ldots = 0$$

und solcher Gruppen von Integralen wird man q an der Zahl gewinnen. Hiebei ist aber nicht nothwendig, dass r eine ganze Zahl sei, nur kann man in diesem Falle sagen, dass eine jede der q Gruppen aus $r + 1$ Integralen zusammengesetzt sei und ein particuläres Integral der Differentialgleichung mit r Constanten vorstelle, was aggregirt einen Integralausdruck mit $qr = p$ Constanten gibt. Für gebrochene r kann aber eine andere Gruppirung stattfinden, während dennoch alles Gesagte zurecht besteht und auch keine Constante verloren geht.

Ob nun die so erhaltenen particulären Integrale auch alle den strengen Anforderungen entsprechen, die man jetzt an derlei Formen macht, ist Gegenstand einer ferneren Discussion. Bei dieser wird man sich oft genöthigt sehen, die Wurzeln u_1, u_2, u_3, ... u_s ..... in zwei verschiedene Gruppen zu zerlegen, deren eine die positiven sammt denjenigen imaginären enthält, deren reeller Bestandtheil positiv ist; die andern dagegen die negativen sammt denjenigen imaginären, deren reeller Bestandtheil negativ ist. Zu den ersteren nimmt man ein eigenes positives a, zu den anderen wieder ein eigenes negatives und etablirt anstatt Einer Bedingungsgleichung zwischen den Integrationsconstanten deren zwei. Es versteht sich von selbst, dass der dadurch entstehende Verlust Einer Integrationsconstante auf passende Weise ausgeglichen werden muss.

Bei der Wahl der Constante a, die als untere Integrationsgrenze erscheint, hat man vorzüglich das in absteigender Reihenform vorhandene S zu berücksichtigen. Man wird nämlich a stets so gross zu wählen haben, dass das in einer bestimmten Anzahl von Anfangsgliedern gerechnete S für $u = a$ und $u > a$ einen genügend angenäherten Werth dieser ganzen Function erster Classe darstellt. Zu beurtheilen, ob diess geschehen sei bei irgend einer Wahl des a, dient das nach §. 8 dieses Abschnittes Seite 414 ermittelte Ergänzungsglied, oder vielmehr der Ausdruck der Grenzen, zwischen denen es enthalten ist, aus welchen sich dann allsogleich auch andere Grenzen für jeden Bestandtheil des y ableiten lassen und diess zwar beiläufig auf folgende Weise: Angenommen, man habe erkundet, dass es für $u = a$ sowohl, wie auch für $u > a$ enthalten sei zwischen den Grenzen S_1 und S_2, allwo:

$$(585)\quad \begin{aligned} S_1 &= Tu^h + \binom{h}{1} T' u^{h-1} + \binom{h}{2} T'' u^{h-2} + \ldots\ldots + \binom{h}{\rho} T^{(\rho)} u^{h-\rho} \\ S_2 &= Tu^h + \binom{h}{1} T' u^{h-1} + \binom{h}{2} T'' u^{h-2} + \ldots\ldots + \binom{h}{\rho} \left[T^{(\rho)} + t^{(\rho)}\right] u^{h-\rho} \end{aligned}$$

ist, so ist auch jeder Bestandtheil von y derjenige z. B. der den zweiten Theil der Gleichung (583) bildet, enthalten zwischen den Grenzen y_1 und y_2, unter y_1 und y_2 die nachstehenden Ausdrücke verstanden:

$$(586)\quad y_1 = C \int_a^{u,\infty} e^{ux+\int\psi du}\, S_1 du,\; y_2 = C \int_a^{u,\infty} e^{ux+\int\psi du}\, S_2 du.$$

Die Differenz $y_2 - y_1$ ist nun das Ergänzungsglied und es ergibt sich dafür folgender Ausdruck:

$$(587)\quad y_2 - y_1 = \binom{h}{\rho} t^{(\rho)}\, C \int_a^{u,\infty} e^{ux+\int\psi du}\, u^{h-\rho} du.$$

Die Beschaffenheit dieses Ausdruckes hat man nun zu studieren, was z. B. beiläufig auf folgende Weise geschehen kann: Gesetzt, es wäre a positiv und reell, x aber ebenfalls reell und negativ, so kann man sich die Differenz $y_2 - y_1$ auch in der folgenden Weise hingezeichnet denken:

$$(588)\quad y_2 - y_1 = \binom{h}{\rho} t^{(\rho)}\, C \int_a^{u,\infty} e^{ux}\, \frac{u^{h-\rho}}{\psi} \,.\, e^{\int\psi du}\, \psi du.$$

Trifft es sich nun, dass zwischen den Integrationsgrenzen der Factor $e^{\int\psi du}$ das Zeichen nicht mehr ändert, was jedesmal für ein genügend gross gewähltes a geschieht, wenn ψ reell ist, und hat man noch überdiess erkundet, dass auch der andere Factor unter dem Integralzeichen, nämlich:

$$e^{ux}\, \frac{u^{h-\rho}}{\psi}$$

für alle Werthe von u, die grösser sind als a, sich im Zustande des Abnehmens befindet, so zwar, dass sein grösster Werth zwischen diesen Grenzen eben für $u = a$ vorhanden ist, so kann man, diesen grössten Werth mit $e^{ax}H$ bezeichnend, jedesmal behaupten, dass:

$$y_2 - y_1 < \binom{h}{\rho} t^{(\rho)} C e^{ax} H \int_a^{u,\infty} e^{\int\psi du} \psi du \tag{589}$$

ist, oder wenn man den Werth, den das unter (582) angeführte Integral $\int\psi du$ annimmt für $u = a$ mit K bezeichnet:

$$y_2 - y_1 < -\binom{h}{\rho} t^{(\rho)} C H e^{ax+K} \tag{590}$$

und dieser Ausdruck ist es, der dazu dienen kann, den Grad der Genauigkeit zu beurtheilen, mit welchem der Ausdruck y_1 für y gesetzt den Werth desselben wiedergibt, und es kann offenbar jetzt noch eine solche Wahl der Constanten a getroffen werden, dass diese Genauigkeit eine entsprechende wird.

Sollten ψ sowohl, wie auch u_s und vielleicht auch a sich imaginär gestalten, so hat man durch Einführung einer neuen Variablen der Integration anstatt u erst die Grenzen in reelle umzugestalten, dann den Differentialausdruck unter dem Integralzeichen in seinen reellen und imaginären Bestandtheil zu zerlegen, wodurch trigonometrische Functionen zu Tage kommen. Man wird es dann nicht mehr zu thun haben mit Ausdrücken, wie $y_2 - y_1$, sondern mit anderen von folgender Gestalt:

$$\int_a^\infty e^{ux} \, Cos\,(kux + \pi) \frac{u^{h-\rho}}{\psi} e^{\int\psi du} \psi du \tag{591}$$

unter π eine algebraische Function von u verstanden, die so wie ψ reell ist. Da der hier hinzutretende Factor $Cos\,(kux + \pi)$ den grössten numerischen Werth Eins hat; so ist $e^{ax}H$ abermals der grösste Werth, dessen auch

$$\frac{e^{ux} \, Cos\,(kux + \pi) \, u^{h+\rho}}{\psi}$$

fähig ist. Mithin erleidet der Ausdruck (590) keine Veränderung.

Dieses Verfahren, um sich das Ergänzungsglied zu verschaffen, ist mannigfacher Aenderungen fähig; man kann z. B. denselben Zweck erreichen auch auf die folgende Weise, die nicht nur für negative, sondern auch für positive x giltig ist. Man schreibt nämlich $y_2 - y_1$ auf die nachstehende, etwas veränderte Weise:

$$y_2 - y_1 = \binom{h}{\rho} t^{(\rho)} C \int_a^{u,\infty} \frac{u^{h-\rho}}{x+\psi} e^{\int(x+\psi)du} (x + \psi)\, du.$$

Sind nun abermals der Stellenzeiger ρ und der Werth von a so gross gewählt, dass der Factor $\frac{u^{h-\rho}}{x+\psi}$ für $u > a$ sich im fortwährenden Abnehmen befindet, mithin sein grösster Werth eben für $u = a$ vorhanden ist, so hat man, diesen grössten Werth mit $\frac{H}{G+x}$ bezeichnend:

$$y_2 - y_1 < \binom{h}{\rho} t^{(\rho)} C \int_a^{u,\infty} e^{\int(x+\psi)du} (x + \psi)\, du$$

oder wenn man wieder den Werth von

$$\int \psi du$$

für $u = a$ mit K bezeichnet:

$$y_2 - y_1 < - \binom{h}{\rho} t^{(\rho)} C \frac{H}{G + x} e^{ax+K}.$$

Diess ist der Gang einer solchen Integration durch Quadraturen in seinen äussersten Umrissen, und es braucht nicht erst bemerkt zu werden, dass er der mannigfachsten Abänderungen fähig sei nach Massgabe der Umstände und nach dem Gutdünken des Analysten.

Gibt es mehrere Seiten des den Coefficientenbau der Differentialgleichung umspannenden Polygones, denen Repartitionszahlen grösser als Null und kleiner als Eins angehören, so hat man bei einer jeden derselben dieses Rechenverfahren durchzuführen. An den übrigen Polygonseiten jedoch wird die Form eines bestimmten Integrales als die minder verlässliche und minder brauchbare erscheinen und wiewohl man das Integriren in dieser Form versuchen mag, so wird man doch selbst dann, wenn es gelungen wäre, die Hilfsgleichung geschlossen zu integriren, von der Form eines bestimmten Integrales, obwohl man sie vielleicht bereits hat, abzugehen und zur asymptotischen seine Zuflucht zu nehmen genöthigt sein, weil man entweder der particulären Integrale zu wenig, oder nicht leicht erweisbar von einander verschieden, oder endlich solche haben wird, die Analogie mit einer divergirenden Reihe gewinnen, weil die Function unter dem Integralzeichen zwischen den Integrationsgrenzen, oder an einer derselben unendlich wird, ohne dass es möglich ist, diesem Uebelstande in geeigneter Weise auszuweichen. Wiewohl man aber die Gruppe asymptotischer Integrale, die dem absteigenden Theile des Polynomes entspricht und höchstens aus so vielen Theilen zusammengesetzt ist, als die Gradzahl von U_m, d. h. des ersten Coefficienten der Hilfsgleichung Einheiten in sich enthält, nur selten aus dieser Hilfsgleichung ableiten wird und es stets vorziehen dürfte, die ausgebildete asymptotische Integrationsmethode zu diesem Zwecke in Anwendung zu setzen, so wirft doch die hier dargelegte Verwandtschaft des aufsteigenden Integrales der Hilfsgleichung, geordnet nach Potenzen des ersten Coefficienten U_n mit dem asymptotischen Integrale der vorgelegten Differentialgleichung einiges Licht auf das asymptotische Integriren selbst zurück und der Analyst erfährt, von welchem Mittel er allenfalls Gebrauch machen könne, um seine absteigenden Reihen möglichst convergent zu machen. Es lassen sich nämlich in dieser Angelegenheit folgende Bemerkungen machen: Das V der Hilfsgleichung kann, wie schon Seite 448 bemerkt worden ist, gedacht werden in der folgenden Gestalt:

$$V = \frac{P}{(u - \alpha_1)^{k_1+1} (u - \alpha_2)^{k_2+1} \ldots\ldots (u - \alpha_n)^{k_n+1}}$$

allwo $u - \alpha_1$, $u - \alpha_2$, ... $u - \alpha_n$ die Factoren sind von U_m. Kraft eines Seite 346 beigebrachten Beweises nun convergiren die aufsteigenden Reihen, die man für die asymptotischen Functionen

$$W_1 = (u - \alpha_1)^{k_1+1} V, \; W_2 = (u - \alpha_2)^{k_2+1} V, \ldots\ldots W_n = (u - \alpha_n)^{k_n+1} V$$

beziehlich geordnet nach $u-\alpha_1$, $u-\alpha_2$, ... $u-\alpha_n$ erhält, jedesmal, ja man kann sogar den Grad der Convergenz angeben, wenn auch nur durch eine logische Disjunction. Die Convergenz nämlich ist dieselbe entweder mit einer exponentiellen Asymptote der Hilfsgleichung in V, in eine ähnliche aufsteigende Reihe entwickelt gedacht, oder sie fällt zusammen mit der Convergenz von irgend einer der Binomialreihen für $(u-\alpha_1)^{-h_1-1}$, $(u-\alpha_2)^{-h_2-1}$, ... $(u-\alpha_n)^{-h_n-1}$. Die erste Art der Convergenz ist in der Regel eine unbegrenzte und es wird bei ihrem Eintreten auch das asymptotische Integral vollkommen befriedigen und nichts zu wünschen übrig lassen. Die zweite Art hingegen ist nur die der Binomialformel eigenthümliche oder auch der geometrischen Progression angehörige, an gewisse Grenzen geknüpfte, die der Werth der Variablen nicht überschreiten darf. Hier wird nun offenbar das asymptotische Integral in der Regel erscheinen in der Gestalt einer halbconvergirenden Reihe und es liegt die Ursache hievon lediglich in dem Nenner des Werthes von V, oder was dasselbe ist, in den dieser Function eigenen algebraischen Factoren:

$$(u-\alpha_1)^{-h_1-1},\ (u-\alpha_2)^{-h_2-1},\ \ldots\ldots\ (u-\alpha_n)^{-h_n-1}$$

deren Differentialquotienten die Eigenschaft besitzen, bei dem unendlichen Wachsen des Differentiationsindex auch zuzunehmen ins Unendliche und zwar im Verhältnisse einer endlichen Zahl zu diesem ins Unendliche wachsenden Index, eine Eigenschaft, die sich dann auf V und auch auf sämmtliche W überträgt, weil bekanntlich einem Produkte dieselbe Art des Wachsthumes eigen ist, wie demjenigen seiner Factoren, der das rascheste ausweist. Hieraus ergibt sich unmittelbar das Mittel, auf den Convergenzzustand der asymptotischen Reihe einzuwirken. Es besteht nämlich in der Sonderung dieser algebraischen Factoren, die man übrigens auch dann erst vornehmen kann, wenn man sich bereits im Besitze des asymptotischen y befindet, d. h. wenn man bereits

$$y=\frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux}\ W\right]\Big\}_{\alpha}=e^{\alpha x}\left[\mathbf{W}x^h+\binom{h}{1}\mathbf{W}'x^{h-1}+\binom{h}{2}\mathbf{W}''x^{h-2}+\ldots\ldots\right]$$

erhalten hat, und wenn man aus den Werthen der Coefficienten $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$ ..... auf die halbe Convergenz und diejenigen algebraischen Factoren, die daran Schuld sind, den Schluss gemacht hat. Man wird nämlich dann:

$$W=\frac{P}{(u-\alpha_1)^{h_1+1}\,(u-\alpha_2)^{h_2+1}\ \ldots\ldots}$$

voraussetzen; man wird ferner diese Gleichung einer unbeschränkten Anzahl von Differentiationen unterwerfen, nachher $u=\alpha$ substituiren und $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$, ... mittelst der so erhaltenen Bestimmungsgleichungen durch $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$, ... ausdrücken; so wird sich dann ein y ergeben in anderer Gestalt: nämlich:

$$y=\frac{d^h}{du^h}\left[\frac{e^{ux}P}{(u-\alpha_1)^{h_1+1}\,(u-\alpha_2)^{h_2+1}\ \ldots\ldots}\right]\Big\}_{\alpha}$$

und es wird die **Mac-Laurin**'sche Reihe für P, nämlich:

$$P = \mathrm{P} + \mathrm{P}'(u-\alpha) + \mathrm{P}'' \frac{(u-\alpha)^2}{2} + \ldots\ldots$$

bei richtig geleiteter Rechnung unbeschränkte Convergenz besitzen können, während die ähnliche Reihe für W nur die beschränkte Convergenz der Binomialformel besass. Ob jetzt der neugefundene Ausdruck für y ein brauchbarer sei, bleibt der Beurtheilung in jedem speciellen Falle anheimgestellt und es ist auch nebstdem nicht ausser Acht zu lassen, dass die Auffindung der neuen Form nicht jederzeit ganz unbedingt gelingen wird und namentlich können diess unbestimmte Integralzeichen, wenn sie im allgemeinen Ausdrucke für V vorkommen, wenn auch nicht verhindern, so doch wenigstens erschweren. Endlich wird ein mit solchen Rechnungen vertrauter Analyst sehr bald sein etwa gehegtes Vorurtheil gegen die halbconvergirenden Reihen aufgeben, wenn er sieht, dass sie ihm hier alle möglichen Dienste leisten, die man von einer tadellosen analytischen Form verlangt.

§. 12.

Ermittlung der algebraischen Gleichung, aus deren Wurzeln die partikulären Integrale der Differentialgleichung abgeleitet werden können.

Die Neigung zum Absoluten und mit ihr zu Sätzen, die ganz ohne Ausnahme gelten, zu geschlossenen Formen und dergleichen, beherrscht jeden Rechner mehr oder weniger. Er findet zwar sehr oft Gelegenheit, zu bemerken, dass die geschlossenen Formen illusorisch seien und sehr oft zur Kenntniss derjenigen Function, die sie darstellen sollen, so gut wie gar nichts beitragen; er findet ferner, dass selbst der Begriff der geschlossenen Form ein unbestimmter, mit der Wissenschaft und ihren Fortschritten selbst veränderlicher sei, indem eine jede neue analytische Gestalt, in der die Functionen dargestellt werden können, auch zu einer entsprechenden Erweiterung des Begriffes der geschlossenen Form führt. Zuerst sind es nur die ganzen oder gebrochenen algebraischen Functionen, die so eigentlich diesen Namen zu führen berechtigt sind; dann gelangt man zu exponentiellen, trigonometrischen Functionen und Logarithmen und nennt auch diese geschlossen, wenn unter dem Zeichen *Sinus, Cosinus* u. s. w. ein geschlossener algebraischer Ausdruck steht. Nun bieten sich Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl dar, als beim Geschäfte des Differenzirens wichtige Formen und wir nennen sie abermals geschlossen, wenn sie darstellbar sind als Produkt aus einer Exponentialgrösse mit geschlossenem Exponenten in einen geschlossenen algebraischen Ausdruck. Gleiche Bewandtniss hat es mit den bestimmten Integralen, denn ungeachtet die Berechnung ihres numerischen Werthes oft nicht unbedeutenden, ja oft unübersteiglichen Hindernissen unterworfen ist, halten wir sie doch für geschlossen, wenn unter dem Integralzeichen eine geschlossene Function im Sinne der eben gegebenen Andeutungen vorhanden ist; mit einem Worte, wir halten zuletzt alles für geschlossen, was sich durch be-

liebige Rechnungsoperationen in letzter Instanz auf einen geschlossenen algebraischen Ausdruck zurückführen lässt, gleichviel, ob diese Rechnungsoperationen selbst in geschlossener Form, d. h. durch eine Reihe von Schritten in endlicher Zahl durchzuführen sind, oder nicht. Es ist also auch kein Wunder und die übergrosse Ausdehnung des Begriffes der Geschlossenen bringt es wesentlich mit sich, dass die geschlossene Form nicht immer, ja meistentheils das nicht leistet, was der minder erfahrene Rechner von ihr hofft. Sie dient dagegen zu etwas ganz Anderem. So haben wir z. B. bei der asymptotischen Integration gesehen, dass die geschlossenen Formen, was die Darstellung der Functionen betrifft, vor den unendlichen Reihen nur sehr geringe Vorzüge besitzen, ja ihnen sogar in gewisser Beziehung nachzustehen scheinen, wenn man die Aufschlüsse in Rechnung zieht, die eine gehörig durchgeführte Discussion des Ergänzungsgliedes der unendlichen Reihe bieten kann. Dagegen erweisen sie sich sehr geschickt zu einem ganz anderen Zwecke; sie dienen nämlich so zu sagen als Leitfaden zur Discussion der Differentialgleichung und erleichtern die Eintheilung und Classification der verschiedenen analytischen Formen, unter welchen das allgemeine Integral erscheinen kann.

Dass die Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten auch irrationale particuläre Integrale haben können, haben wir gleich im Anfange der Formenlehre erfahren und daraus Veranlassung genommen, über die Art ihres möglichen Vorkommens gewisse Untersuchungen anzustellen. Sie führten zu dem allgemeinen Ergebnisse, dass eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten eine oder mehrere Gruppen irrationaler particulärer Integrale in der Form $e^{\int\varphi dx}$ besitzen können, wenn die zu einer und derselben Gruppe gehörigen φ sämmtlich Wurzeln sind einer höheren algebraischen Gleichung mit gleichfalls rationalen Coefficienten. Hiemit tritt uns nun eine Sorte von geschlossener Form entgegen, wenn auch in etwas entfernterem Sinne. Wir nehmen nämlich an, das Integriren in geschlossener Form sei gelungen, wenn wir die algebraische Gleichung aufgefunden haben mit geschlossenen Coefficienten, welche sämmtliche Functionen φ der Bestandtheile $e^{\int\varphi dx}$ des allgemeinen Integrales zu Wurzeln hat.

Wenn der Analyst bei einer vorliegenden Differentialgleichung zu einer bestimmten Integrationsmethode greift, so hat er auch meistentheils dazu eine gewisse Veranlassung in den Formen, die entweder die unmittelbare Ansicht dieser seiner Gleichung, oder die darauf gegründeten Rechnungsentwicklungen gebothen haben. So reizen z. B. sehr geringe Ansteigungen in den Anfangscoefficienten zur Form des bestimmten Integrales, Fortschreitungen im Niveau in denselben zur asymptotischen Form u. s. w. Auch das Aufsuchen der algebraischen Gleichung, die der differentialen auf die eben angedeutete Weise zu Grunde liegt, fordert seine Berechtigung in den gewissen Eigenschaften derjenigen Differentialgleichungen, die aus geschlossenen algebraischen gebildet werden und die wir in der Formenlehre kennen gelernt haben. Sie sind theils negativer, theils positiver Natur und wir wollen sie hier kurz aufzählen. Zuvörderst kann bemerkt werden, dass, wenn man das allgemeine Integral einer so aus einer algebraischen entstandenen Differentialgleichung aufsteigend nach Potenzen einer beliebigen Differenz $x-\alpha$ in Reihen entwickelt denkt, diese der Natur der Sache nach nirgends einen Logarithmus beherbergen können. Diese Bemerkung bildet ein negatives Kriterium der Existenz einer

solchen algebraischen Gleichung; denn hätte man auch bei der aufsteigenden Reihenentwicklung des Integrales keinen Logarithmus entdeckt, so folgt daraus noch keineswegs, dass eine algebraische Gleichung wirklich vorhanden sei, die der differentialen zu Grunde liegt, und umgekehrt, hätte man wirklich einen Logarithmus gefunden, so folgt daraus wieder nicht, dass die Differentialgleichung mit einer algebraischen gar Nichts gemein habe, weil der Logarithmus entstanden sein kann dadurch, dass man sämmtliche particuläre Integrale der aus einer algebraischen wirklich abgeleiteten Differentialgleichung in eben derselben der Rechnungsoperation des Integrirens unterwirft und vielleicht noch zu gleicher Zeit mehrere neue particuläre Integrale einführt. Dem erfahrenen Analysten wird es aber immer möglich sein, die Spuren solcher Transformationen zu entdecken. Eine zweite, sehr hervorragende, besondere Eigenschaft solcher Gleichungen ist das Vorkommen gebrochener Werthe des mit k bezeichneten Exponenten, der zu irgend welchen Factoren $x - \alpha$ der Anfangscoefficienten gehörig ist, in Gruppen, deren einzelne Glieder im Verhältnisse der natürlichen Zahlen: $1, 2, 3, \ldots\ldots$ zu einander stehen. Zweigliedrige Gruppen von Dritteln, wie $\frac{4}{3}$ und $\frac{8}{3}$; dreigliedrige Gruppen von Vierteln, wie $\frac{5}{4}, \frac{10}{4}, \frac{15}{4}$ u. s. w. Sie begründen jedoch auch nur ein Kennzeichen der möglichen oder wahrscheinlichen Existenz der geschlossenen algebraischen Gleichungen. Eigentliche Sicherheit geben sie nicht, denn Gruppen solcher gebrochener Werthe von k können auch das Ergebniss der Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen in der Differentialgleichung sein. Umgekehrt können die so beschaffenen Werthe von k auch fehlen und es kann dem ungeachtet die Differentialgleichung aus einer algebraischen ihren Ursprung ziehen. Diess wird z. B. dann stattfinden, wenn man alle particulären Integrale derselben noch nachträglich durch $(x-\alpha)^h$ wegdividirt. Wären dann die k ursprünglich etwa $\frac{5}{4}, \frac{10}{4}, \frac{15}{4}$ gewesen, so verwandeln sie sich jetzt in $\frac{5}{4} + h, \frac{10}{4} + h, \frac{15}{4} + h$ und das Verhalten, wie die natürlichen Zahlen, $1, 2, 3$ ist verschwunden. Der geübte Rechner jedoch wird es ohne Mühe zu finden wissen. Man sieht, das Aufsuchen einer geschlossenen Form bleibt auch hier, so gut wie bei der asymptotischen Form im Allgemeinen ein analytisches Experiment, welches sehr selten gelingt, nur waltet hier ein wesentlicher Unterschied ob: Die durch das asymptotische Integriren gewonnenen Formen sind nämlich auch dann noch brauchbar, wenn sie nicht geschlossen sind. Was macht man aber mit einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten absteigend geordnete unendliche Reihen sind? Sie wird vor der Differentialgleichung schwerlich Vortheile bieten.

Gesetzt nun, der Rechner hätte sich dennoch zu einem solchen Experimente entschlossen, bewogen vielleicht durch die Uebereinstimmung mehrerer der eben erwähnten, wenn auch je für sich keinen sicheren Schluss gestattenden Erscheinungen, so bietet sich ihm zunächst die Frage: was weiss ich von der algebraischen Gleichung rein aus der Kenntniss der Differentialgleichung und gewissermassen ohne Rechnung? Die Beantwortung dieser Frage ist wichtig, weil man darnach das Integrationsverfahren selber einzuleiten haben wird. Diese Frage zerfällt in mehrere, nämlich erstens: Was ist die Gradzahl der algebraischen Gleichung, wenn die Ordnungszahl der differentialen n ist? Hierauf dient zur Antwort: Die Algebraische ist höchstens vom n^{ten} Grade, höher nicht, kann jedoch niedriger

sein. Sie erhebt sich wahrscheinlich bis zu der Gradzahl n, wenn die characteristischen gebrochenen Werthe von k die folgenden sind: $k = \frac{m}{n}, \frac{2m}{m}, \ldots\ldots \frac{(n-1)m}{n}$; dagegen werden Gruppen von ähnlichen gebrochenen Werthen mit einem anderen, kleineren Nenner, etwa s, eher auf eine algebraische Gleichung des s^{ten} Grades hinweisen. Man begeht indess bei dem letzteren Vorkommen keineswegs einen Fehler, wenn man die algebraische Gleichung vom n^{ten} Grade voraussetzt, nur wird sie dann, wenn vorhanden, wahrscheinlicherweise rational in Factoren zu zerlegen sein, von denen einer dem s^{ten} Grade angehört. Beispielsweise wollen wir annehmen, die algebraische Gleichung werde wirklich vom n^{ten} Grade vorausgesetzt. Nun fragt sich zweitens: Welche sind die Gradzahlen ihrer Coefficienten? Hierauf dient wieder zur Antwort: Die Gradzahlen der Wurzeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_n$ einer algebraischen Gleichung in φ lassen sich vollständig aus den Gradzahlen der Coefficienten erschliessen mit Hilfe des ihren Bau umspannenden Polygones. Die Gradzahlen der Functionen φ der unter der Form $e^{\int \gamma dx}$ gedachten particulären Integrale ebenfalls und zwar vermittelst desselben, den Coefficientenbau umspannenden Polygones, welches so lange in der algebraischen, wie in der Differentialgleichung dasselbe ist, als keine der in Rede stehenden Gradzahlen unter der negativen Einheit liegt, so dass also die Uebereinstimmung im Baue der zwei Gleichungen nur zu mangeln anfangen kann bei den letzten Coefficienten, die einen Abfall um mehr als die Einheit darbieten und die die Form der Rechnung nur ganz unbedeutend ändern können. Es ist jedoch wohl zu merken, dass die Uebereinstimmung nur stattfindet zwischen den Differenzen der Gradzahlen der Coefficienten und nicht zwischen den Gradzahlen selbst. Diese können nämlich begreiflicherweise andere sein in der einen und in der anderen Gleichung.

Endlich kann man noch fragen, ob sich nicht aus dem Factorenbau der Coefficienten der Differentialgleichung auf jene in der algebraischen ein Schluss gründen lasse? Wir sehen uns genöthigt, um eine Antwort auf diese Frage zu finden, unsere analytischen Erfahrungen zu consultiren. Wir haben in der Formenlehre gesehen, dass die aus der algebraischen abgeleitete Differentialgleichung weit complizirter sei, als diese. Es gehen nämlich die Factoren $x - \alpha$ des ersten Coefficienten zum grössten Theile auch auf den ersten Coefficienten der Differentialgleichung über. Ausgenommen hievon können nur diejenigen sein, denen ein ganzes, negatives k angehört, welches seinem Zahlenwerthe nach kleiner ist als n. Solche Factoren $x - \alpha$, denen k entsprechen, die keine reinen Zahlen, sondern Functionen constanter Parameter sind, kann man mit Bestimmtheit als beiden Gleichungen gemeinschaftlich betrachten. Aber ferner erscheinen im ersten Coefficienten der Differentialgleichung noch andere Factoren $x - \alpha$, die man in der algebraischen nicht sieht, bei deren Verschwinden eine Unterbrechung der Stetigkeit, ein Hindurchgehen mehrerer Wurzeln durch den Zustand der Gleichheit veranlasst wird. Sie sind es in der Regel, denen die characteristischen Werthe von k zukommen. Man hat das Recht, sie im ersten Coefficienten der algebraischen Gleichung nicht zu vermuthen. Endlich kommen im ersten Coefficienten der Differentialgleichung noch andere Factoren $x - \alpha$ vor, deren k negative ganze Zahlen sind, und mit deren Verschwinden gar keine Unterbrechung der Stetigkeit irgendwie verbunden ist. Ihr Vorhandensein vermag nur auf folgende Weise erklärt zu werden: Man denke

sich n verschiedene Functionen von x als particuläre Integrale einer Differentialgleichung, säm in Reihen entwickelt nach Potenzen von $x - \alpha$ mit ganz unbestimmtem α; so kann man die gestellten particulären Integrale durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition so g piren, dass aus ihnen n neue Ausdrücke hervorgehen, die bezüglich der 0ten, 1ten, 2ten ..... (n — Potenz von $x - \alpha$ proportional sind. Für specielle α kann diese mögliche Gruppirung eine a werden. Ist diess der Fall, dann fällt der Factor $x - \alpha$ unfehlbar in die Anfangscoefficienten Differentialgleichung, aber nicht nothwendigerweise in die der algebraischen. Man kann daher sa Diejenigen Factoren der Anfangscoefficienten der Differentialgleichung, denen ganze und negative k gehören, numerisch kleiner als n, deuten im Wesentlichen nur auf eine andere, als die normale G pirungsweise der in Reihenform gedachten particulären Integrale. Schliesslich hat man noch Fac $x - \alpha$, die in den Nennern der Functionen φ erscheinen, aber alldort mit einem von der Ei verschiedenen Exponenten. Ihnen entspricht kein k und sie sind auf gleiche Weise in den Anf coefficienten der algebraischen und der Differentialgleichung vorhanden. Die gehörige Benützung desjenigen, was man von dem Baue, insbesondere des ersten Coefficienten zu sagen weiss, ist a rathen, weil es mindestens die Rechnung abzukürzen geeignet ist. Dass übrigens die algebra Gleichung auch Factoren $x - \alpha$ des ersten Coefficienten aufweisen kann, von denen man in differentialen nirgends etwas sieht, fällt in die Augen, wenn man bedenkt, dass jeder Factor x - des Nenners einer Function φ im ersten Coefficienten der algebraischen Gleichung nothwendiger vorhanden ist, während er in der differentialen fehlen kann, wenn er nur zu einem Factor (x — des entsprechenden in der Form $e^{\int \gamma dx}$ gedachten particulären Integrales gehört, und wenn h kl als n ist.

Bevor wir uns nun die algebraische Gleichung, welche der differentialen zu Grunde l verschaffen, muss bemerkt werden, dass man von einer Methode, die diess leistet, zweierlei verla könne, nämlich erstens: die gesuchte algebraische Gleichung und ihre sämmtlichen Wurzeln φ in steigender Reihenform zu gleicher Zeit; — diess hätte den Vortheil, dass, wenn man auch keine schlossene Gleichung bekäme, man doch wenigstens brauchbare Werthe von φ erhielte, und zwei die algebraische Gleichung allein ohne ihre Wurzeln. Wir wollen zuvörderst die zum ersten doppelten Zwecke dienende Methode auseinandersetzen und diess zwar der Klarheit wegen zuvör in dem speciellen Beispiele einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit gleich hohen, dem Grade angehörigen Coefficienten.

Sie sei:

$$(592)\quad [a_2x^m+b_2x^{m-1}+c_2x^{m-2}+\ldots]y''+[a_1x^m+b_1x^{m-1}+c_1x^{m-2}+\ldots]y'+[a_0x^m+b_0x^{m-1}+c_0x^{m-2}+\ldots]$$

Besteht nun eine algebraische Gleichung, aus der sie entstanden ist, in φ, so trägt diese dem zuvor Gesagten nach die folgende ähnliche Gestalt mit Coefficienten von einer und derselben Gradzal

$$(593)\quad [A_2x^p+B_2x^{p-1}+C_2x^{p-2}+\ldots]\varphi^2+[A_1x^p+B_1x^{p-1}C_1x^{p-2}+\ldots]\varphi+A_0x^p+B_0x^{p-1}+C_0x^{p-2}+\ldots$$

Substituiren wir nun in die erstere anstatt y die Exponentielle $e^{\int \gamma dx}$, wodurch sie übergeht in:

$$[a_2x^m+b_2x^{m-1}+c_2x^{m-2}+\,.\,.](\varphi^2+\varphi')+[a_1x^m+b_1x^{m-1}+c_1x^{m-2}+\,.\,.]\varphi+[a_0x^m+b_0x^{m-1}+c_0x^{m-2}+\,.\,.]=0. \quad (594)$$

Ist die (592) wirklich aus der (593) entstanden, so müssen genau dieselben Werthe von φ der einen und der anderen Genüge leisten. Diese Function φ ist vermöge der gemachten Voraussetzung gleich hoher, dem m^{ten} Grade angehöriger Coefficienten von der Gradzahl Null d. h. in absteigender Reihenform gedacht, fängt sie an mit einem Gliede mit x^0. Man kann also annehmen:

$$\varphi = \alpha + \beta x^{-1} + \gamma x^{-2} + \delta x^{-3} + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (595)$$

Substituiren wir diese absteigende Reihe in die obige Differentialgleichung (592) sowohl, wie auch in die algebraische (593) und bilden zu diesem Zwecke:

$$\begin{aligned} \varphi' &= -\beta x^{-2} - 2\gamma x^{-3} - 3\delta x^{-4} - \,. \\ \varphi^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta x^{-1} + \left.\begin{matrix} 2\alpha\gamma \\ +\beta^2 \end{matrix}\right] x^{-2} + \left.\begin{matrix} 2\alpha\delta \\ +2\beta\gamma \end{matrix}\right] x^{-3} + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \end{aligned} \quad (596)$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} &[A_2x^p+B_2x^{p-1}+C_2x^{p-2}+\,.\,.\,.\,.\,.][\alpha^2+2\alpha\beta x^{-1}+(2\alpha\gamma+\beta^2)x^{-2}+(2\alpha\delta+2\beta\gamma)x^{-3}+\,.\,.\,.\,.\,.]+ \\ &+[A_1x^p+B_1x^{p-1}+C_1x^{p-2}+\,.\,.\,.\,.\,.][\alpha+\beta x^{-1}+\gamma x^{-2}+\delta x^{-3}+\,.]+ \\ &\qquad +A_0x^p+B_0x^{p-1}+C_0x^{p-2}+\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.=0 \end{aligned} \quad (597)$$

$$\begin{aligned} &[a_2x^m+b_2x^{m-1}+c_2x^{m-2}+\,.\,.\,.\,.\,.][\alpha^2+2\alpha\beta x^{-1}+(2\alpha\gamma+\beta^2-\beta)x^{-2}+(2\alpha\delta+2\beta\gamma-2\gamma)x^{-3}+\,.\,.\,.]+ \\ &+[a_1x^m+b_1x^{m-1}+c_1x^{m-2}+\,.\,.\,.\,.\,.][\alpha+\beta x^{-1}+\gamma x^{-2}+\delta x^{-3}+\,.]+ \\ &\qquad +a_0x^m+b_0x^{m-1}+c_0x^{m-2}+\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.=0. \end{aligned} \quad (598)$$

Durch absteigende Entwicklung dieser beiden Gleichungspolynome erhalten wir ferner:

$$\begin{aligned} 0 = {} & x^p \quad [\alpha^2A_2 + \alpha A_1 + A_0] + \\ & + x^{p-1} [\alpha^2B_2 + \alpha B_1 + B_0 + 2\alpha\beta A_2 + \beta A_1] \\ & + x^{p-2} [\alpha^2C_2 + \alpha C_1 + C_0 + 2\alpha\beta B_2 + \beta B_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2)\, A_2 + \gamma A_1] \\ & + x^{p-3} [\alpha^2D_2 + \alpha D_1 + D_0 + 2\alpha\beta C_2 + \beta C_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2)\, B_2 + \gamma B_1 + \\ & \qquad + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)\, A_2 + \delta A_1] \\ & .\,. \end{aligned} \quad (599)$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & x^m \quad [\alpha^2a_2 + \alpha a_1 + a_0] \\ & + x^{m-1} [\alpha^2b_2 + \alpha b_1 + b_0 + 2\alpha\beta a_2 + \beta a_1] \\ & + x^{m-2} [\alpha^2c_2 + \alpha c_1 + c_0 + 2\alpha\beta b_2 + \beta b_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2 - \beta)\, a_2 + \gamma a_1] \\ & + x^{m-3} [\alpha^2d_2 + \alpha d_1 + d_0 + 2\alpha\beta c_2 + \beta c_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2 - \beta)\, b_2 + \gamma b_1 + \\ & \qquad + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma - 2\gamma)\, a_2 + \delta a_1] \\ & .\,. \end{aligned} \quad (600)$$

Es müssen beide identisch erfüllt sein durch dasselbe φ, mithin durch dieselben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und zwar für beliebige x. Mithin wird man in der einen sowohl, wie in der anderen die Coefficienten der verschiedenen Potenzen dieser Veränderlichen je für sich der Nulle gleich zu setzen haben und wird so zwei Systeme von Bestimmungsgleichungen erhalten, die zu gleicher Zeit die Werthe von

α, β, γ, ... und die der Coefficienten A, B, C, ... in der algebraischen G
tion der constanten Parameter in der Differentialgleichung zu liefern haben. Die z
Bestimmungsgleichungen, gewonnen durch Nullsetzen der Coefficienten der höchsten
nämlich von x^p in der (599) und x^m in der (600) sind:

$$\alpha_2 A_2 + \alpha A_1 + A_0 = 0\ ,\quad \alpha^2 a_2 + \alpha a_1 + a_0 = 0. \tag{601}$$

Da sie einerlei α liefern sollen, so muss

$$\frac{A_2}{a_2} = \frac{A_1}{a_1} = \frac{A_0}{a_0}$$

sein. Den gemeinschaftlichen Werth dieser drei Brüche kann man gleich Eins ann
mit demselben:

$$A_2 = a_2\ ,\quad A_1 = a_1\ ,\quad A_0 = a_0 \tag{602}$$

und

$$\alpha = \frac{1}{2a_2}(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}). \tag{603}$$

Hiemit sind das erste Glied von φ und die erste Coefficientenschichte A_2, A_1, A_0
Gleichung bestimmt.

Um β und die zweite Coefficientenschichte zu erhalten, legen wir uns das
Bestimmungsgleichungen vor, den Coefficienten von x^{p-1} in (599) und jenen von x
Nulle gleich setzend. Sie sind:

$$\begin{aligned} \alpha^2 B_2 + \alpha B_1 + B_0 + \beta(2\alpha A_2 + A_1) &= 0 \\ \alpha^2 b_2 + \alpha b_1 + b_0 + \beta(2\alpha a_2 + a_1) &= 0 \end{aligned} \tag{604}$$

und liefern, von einander abgezogen, mit Rücksicht auf die Werthe (602):

$$(B_2 - b_2)\,\alpha^2 + (B_1 - b_1)\,\alpha + (B_0 - b_0) = 0. \tag{605}$$

Diese Gleichung soll eine identische sein und zwar für die beiden Werthe
Formel (603) enthalten sind. Sie kann also von der zweiten der beiden (601)
weil ihr genau dieselben α Genüge leisten müssen. Eliminiren wir nun aus
gen α^2, wodurch sich ergibt:

$$[a_2\,(B_1 - b_1) - a_1\,(B_2 - b_2)]\,\alpha + a_2\,(B_0 - b_0) - a_0\,(\tag{606}$$

so sollte auch diese letztere Gleichung durch zwei verschiedene α identisch
nicht sein, weil sie nur vom ersten Grade ist, es sei denn, dass sie
jedes α, indem:

$$a_2\,(B_1 - b_1) - a_1\,(B_2 - b_2) = 0\ ,\quad a_2\,(B_0 - b_0) - \tag{607}$$

ausfällt. Hiemit ist die Substitution irrationaler Ausdrücke für α vermieden und für B_0 und B_1 sind die folgenden Werthe gewonnen:

$$B_0 = b_0 + \frac{a_0}{a_2}(B_2 - b_2)\,, \quad B_1 = b_1 + \frac{a_1}{a_2}(B_2 - b_2). \tag{608}$$

Der dritte Coefficient dieser zweiten Schichte, nämlich B_2 bleibt unbestimmt und kann als solcher hineingezogen werden in die fernere Rechnung mit der Absicht, zu irgend einem beliebigen Zwecke, etwa zur Darstellung der Coefficienten der algebraischen Gleichung in geschlossener Form verwendet zu werden, und man könnte zwar $B_2 = b_2$ wählen, wodurch $B_1 = b_1$ und $B_0 = b_0$ ausfiele, würde sich aber dadurch der Gefahr aussetzen, die geschlossene Form der Coefficienten, selbst wenn sie vorhanden ist, zu verfehlen. Den Werth von β und hiemit das zweite Glied von φ gewinnt man aus der zweiten der Bestimmungsgleichungen (604) zunächst in folgender Bruchform:

$$\beta = -\frac{\alpha^2 b_2 + \alpha b_1 + b_0}{2\alpha a_2 + a_1}. \tag{609}$$

Sie liefert für jedes der beiden α ein eigenes β, kann aber zur wirklichen Berechnung tauglicher eingerichtet werden dadurch, dass man aus dem Nenner jede Spur von α eliminirt und den Zähler gleichfalls durch Elimination der höheren Potenzen von α vermittelst der zweiten der (601) auf eine möglichst geringe Anzahl von Dimensionen herabsetzt. Zu diesem Zwecke dient die Multiplication von Zähler und Nenner mit einem Ausdrucke, wie $p\alpha + q$ und eine darnach getroffene solche Wahl der Coefficienten p und q, dass die Glieder mit α^2 und α im Nenner verschwinden, derselbe sich daher auf eine Constante nach α zurückzieht. Da nun diese Multiplication des Nenners zu dem Produkte führt:

$$2a_2 p\alpha^2 + (a_1 p + 2a_2 q)\,\alpha + a_1 q = P,$$

aus welchem durch Elimination von α^2 vermittelst der (601)

$$P = (2a_2 q - pa_1)\,\alpha + a_1 q - 2pa_0$$

gewonnen wird, so hat man:

$$2a_2 q - pa_1 = 0\,, \quad \frac{p}{q} = \frac{2a_2}{a_1}$$

zu setzen und ist zur Vermeidung der Brüche berechtigt:

$$p = 2a_2\,, \quad q = a_1$$

anzunehmen, was dem in Rede stehenden Produkte den Werth:

$$P = a_1^2 - 4a_0 a_2 = -A \tag{610}$$

verleiht, während der verwendete Multiplicator, mit dem nun auch der Zähler von β zu multipliziren ist,

$$2\alpha a_2 + a_1$$

wird. Das erhaltene Produkt ist zuvörderst vom dritten Grade, nämlich:

$$2a_2b_2\alpha^3 + (2a_2b_1 + a_1b_2)\,\alpha^2 + (2a_2b_0 + a_1b_1)\,\alpha + a_1b_0.$$

Man wird aber aus demselben zuvörderst α^3 vermittelst der mit α multiplizirten (601), dann aber auch α^2 eliminiren können, wornach dann der Werth von β die folgende einfache Gestalt annimmt:

$$\text{(611)}\qquad \beta = -\frac{1}{a_2(a_1^2 - 4a_0a_2)}\left[(a_1^2b_2 - a_2a_1b_1 - 2a_0a_2b_2 + 2a_2^2b_0)\,\alpha + a_1a_0b_2 - 2a_2a_0b_1 + a_2a_1b_0\right]$$
$$= \frac{1}{a_2A}\left[\mathrm{B}_1\alpha + \mathrm{B}_0\right],$$

allwo:

$$\text{(612)}\qquad \begin{aligned} \mathrm{B}_1 &= a_1^2b_2 - a_2a_1b_1 - 2a_0a_2b_2 + 2a_2^2b_0 \\ \mathrm{B}_0 &= a_1a_0b_2 - 2a_2a_0b_1 + a_2a_1b_0 \\ A &= -a_1^2 + 4a_0a_2 \end{aligned}$$

ist.

Nachdem so die zwei ersten Anfangsglieder von φ und zugleich die zwei ersten Coefficientenschichten der algebraischen (593) bestimmt sind, setzen wir in (599) den Coefficienten von x^{p-2} und in (600) den von x^{m-2} der Nulle gleich und erhalten die folgenden zwei Bestimmungsgleichungen, denen der dritte Coefficient von φ und die dritte Coefficientenschichte der (593) zu entnehmen sind, nämlich:

$$\text{(613)}\qquad \begin{aligned} &\alpha^2C_2 + \alpha C_1 + C_0 + \beta^2A_2 + \beta(2\alpha B_2 + B_1) + \gamma(2\alpha A_2 + A_1) = 0 \\ &\alpha^2c_2 + \alpha c_1 + c_0 + \beta^2a_2 + \beta(2\alpha b_2 + b_1 - a_2) + \gamma(2\alpha a_2 + a_1) = 0. \end{aligned}$$

Die zweite von der ersten abziehend, erhält man:

$$\text{(614)}\qquad \alpha^2(C_2 - c_2) + \alpha(C_1 - c_1) + C_0 - c_0 + \beta(2\alpha(B_2 - b_2) + (B_1 - b_1) + a_2) = 0.$$

Hier ist nun anstatt β der so eben gewonnene Werth zu substituiren, sodann eliminirt man α^2 vermittelst der (601), gelangt so zu einer Gleichung, die nach α offenbar nur dem ersten Grade angehörig ist und doch für zwei Werthe dieser Grösse identisch werden muss, was nicht anders angeht, als indem sie für jedes α identisch wird durch Zerfallen in die folgenden zwei Gleichungen:

$$\text{(615)}\qquad \begin{aligned} &a_1a_2A(C_2 - c_2) - a_2^2A(C_1 - c_1) + (2a_1\mathrm{B}_1 - 2a_2\mathrm{B}_0)(B_2 - b_2) - a_2\mathrm{B}_1(B_1 - b_1 + a_2) = 0 \\ &a_0a_2A(C_2 - c_2) - a_2^2A(C_0 - c_0) + 2a_0\mathrm{B}_1(B_2 - b_2) - a_2\mathrm{B}_0(B_1 - b_1 + a_2) = 0. \end{aligned}$$

Aus ihnen ziehen wir nach gehörig durchgeführter Substitution der für B_1 und B_0 unter (608) gefundenen Ausdrücke die Werthe der Coefficienten C_1 und C_0 in Function von C_2, welcher letztere wieder unbestimmt bleibt, so dass auch der erste Coefficient der dritten Schichte als unbestimmte und beliebig zu wählende Grösse in der ferneren Rechnung zur Verfügung steht. Sie sind:

$$
\left.\begin{aligned}
C_1 &= c_1 + \frac{a_1}{a_2}(C_2 - c_2) + \frac{1}{a_2^2 A}(a_1 B_1 - 2a_2 B_0)(B_2 - b_2) - \frac{B_1}{A} \\
C_0 &= c_0 + \frac{a_0}{a_2}(C_2 - c_2) + \frac{1}{a_2^2 A}(2a_0 B_1 - a_1 B_0)(B_2 - b_2) - \frac{B_0}{A}.
\end{aligned}\right\} \qquad (616)
$$

Der dritte Coefficient in der Reihenentwicklung des φ, γ nämlich, wird erhalten aus der zweiten der Gleichungen (613), indem man auch hier anstatt β den eben gewonnenen Ausdruck substituirt, sodann die höheren Potenzen von α vermittelst der (601) eliminirt, dann zunächst γ in Bruchform gewinnt und zwar gebrochen durch dasselbe Binom $2a_2\alpha + a_1$, wie bei der Bestimmung von β, von welchem dann die Befreiung auch genau auf dieselbe Weise erfolgt durch Multiplication des Zählers und Nenners mit dem Binome $2a_2\alpha + a_1$ und nachheriges Eliminiren der höheren Potenzen von α. Auf diese Weise gewinnt man:

$$
\begin{aligned}
\gamma = \frac{1}{a_2^2 A^2}\Big\{ \alpha & \left[\begin{aligned} & a_2 a_1^2 c_2 A^2 + a_1^2 B_1^2 + 2a_1^2 b_2 AB_1 - 2a_0 a_2^2 c_2 A^2 - 2a_0 a_2 B_1^2 - 4a_0 a_2 b_2 AB_1 - \\ & - a_2^2 a_1 c_1 A^2 - 2a_1 a_2 B_0 B_1 - a_1 a_2 b_1 AB_1 + a_1 a_2^2 AB_1 - 2a_1 a_2 b_2 AB_0 + \\ & + 2a_2^2 c_0 A^2 + 2a_2^2 B_0^2 + 2a_2^2 b_1 AB_0 - 2a_2^2 AB_0 \end{aligned}\right] \\
& + a_0 a_1 a_2 c_2 A^2 + a_0 a_1 B_1^2 + 2a_0 a_1 b_2 AB_1 - 2a_0 a_2^2 c_1 A^2 - 4a_0 a_2 B_0 B_1 - 2a_0 a_2 b_1 AB_1 + \\
& + 2a_0 a_2^2 AB_1 - 4a_0 a_2 b_2 AB_0 + a_1 a_2^2 c_0 A^2 + a_1 a_2 B_0^2 + a_1 a_2 b_1 AB_0 - a_1 a_2^2 AB_0 \Big\} \\
& = \frac{1}{a_2^2 A^2}[\Gamma_1 . \alpha + \Gamma_0]
\end{aligned} \qquad (617)
$$

wenn:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 = {} & a_2 a_1^2 c_2 A^2 + a_1^2 B_1^2 + 2a_1^2 b_2 AB_1 - 2a_0 a_2^2 c_2 A^2 - 2a_0 a_2 B_1^2 - 4a_0 a_2 b_2 AB_1 - a_2^2 a_1 c_1 A^2 - \\
& - 2a_1 a_2 B_0 B_1 - a_1 a_2 b_1 AB_1 + a_1 a_2^2 AB_1 - 2a_1 a_2 b_2 AB_0 + 2a_2^2 c_0 A^2 + 2a_2^2 B_0^2 + 2a_2^2 b_1 AB_0 - \\
& - 2a_2^2 AB_0
\end{aligned} \qquad (618)
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_0 = {} & a_0 a_1 a_2 c_2 A^2 + a_0 a_1 B_1^2 + 2a_0 a_1 b_2 AB_1 - 2a_0 a_2^2 c_1 A^2 - 4a_0 a_2 B_0 B_1 - 2a_0 a_2 b_1 AB_1 + \\
& + 2a_0 a_2^2 AB_1 - 4a_0 a_2 b_2 AB_0 + a_1 a_2^2 c_0 A^2 + a_1 a_2 B_0^2 + a_1 a_2 b_1 AB_0 - a_1 a_2^2 AB_0 .
\end{aligned}
$$

vorausgesetzt wird.

Genau auf dieselbe Weise erhält man nun, von jedem bereits verwendeten Paare von Bestimmungsgleichungen zum nächstfolgenden fortschreitend und dasselbe auf ähnliche Weise benützend, den vierten, fünften, sechsten Coefficienten u. s. w. der absteigenden Entwicklung von φ und zugleich die vierte, fünfte, sechste Coefficientenschichte u. s. w. der gesuchten algebraischen Gleichung. Die Rechnungen jedoch und die daraus sich ergebenden Formeln compliziren sich stets mehr und mehr, und gewinnen endlich einen Umfang, der den entschlossensten Rechner zurückschrecken kann, so lange wenigstens, als man mit allgemeinen Ausdrücken rechnet für die Parameter in der Differentialgleichung. In speciellen Fällen indess, wo solcher Parameter nur eine geringe Anzahl vorliegt, ergeben sich gewöhnlich auch sehr namhafte Abkürzungen und es gestaltet sich mitunter die Rechnung zu einer ganz leichten.

Um zu zeigen, in welchem Masse die späteren Rechnungsresultate verwickelter zu werd(vermögen, wird es gut sein, hier noch den vierten Coefficienten der Reihenentwicklung von φ u zugleich die vierte Coefficientenschichte in der algebraischen Gleichung aufzusuchen. Es dient hie: das folgende Paar von Bestimmungsgleichungen:

$$\alpha^2 D_2 + \alpha D_1 + D_0 + \beta^2 B_2 + \beta(2\alpha C_2 + C_1) + \gamma(2\alpha B_2 + B_1 + 2\beta A_2) + \delta(2\alpha A_2 + A_1) = 0 \tag{619}$$
$$\alpha^2 d_2 + \alpha d_1 + d_0 + \beta^2 b_2 + \beta(2\alpha c_2 + c_1 - b_2) + \gamma(2\alpha b_2 + b_1 - 2a_2 + 2\beta a_2) + \delta(2\alpha a_2 + a_1) = 0.$$

Sie geben, von einander abgezogen:

$$0 = \alpha^2(D_2 - d_2) + \alpha(D_1 - d_1) + D_0 - d_0 + \beta^2(B_2 - b_2) + \tag{620}$$
$$\beta[2\alpha(C_2 - c_2) + C_1 - c_1 + b_2] + \gamma[2\alpha(B_2 - b_2) + B_1 - b_1 + 2a_2].$$

Nun folgt die Substitution der für β und γ in (611), (617) gewonnenen Ausdrücke und Elim nation der höheren Potenzen von α, bis die Gleichung nach diesem α sich nur vom ersten Grade e weist und für den Doppelwerth dieser Grösse nicht anders identisch werden kann, als wenn sie übe haupt für jedes α identisch ist. Sie zerfällt darnach in zwei verschiedene Gleichungen, denen man d Werthe D_1 und D_0 entnimmt, während D_2 abermals willkürlich bleibt. Sie sind:

$$D_1 = d_1 + \frac{a_1}{a_2}(D_2 - d_2) + \frac{a_1\Gamma_1 - 2a_2\Gamma_0}{a_2^2 A^3}(B_2 - b_2) + \frac{a_1\mathrm{B}_1 - 2a_2\mathrm{B}_0}{a_2^2 A}(C_2 - c_2) + \tag{621}$$
$$+ \frac{1}{a_2 A^3}[A\mathrm{B}_1^2 - b_2 A^2\mathrm{B}_1 - 2\Gamma_1]$$

$$D_0 = d_0 + \frac{a_0}{a_2}(D_2 - d_2) + \frac{2a_0\Gamma_1 - a_1\Gamma_0 + a_0 A\mathrm{B}_1^2 + a_2 A\mathrm{B}_0^2 - a_1 A\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}{a_2^2 A^3}(B_2 - b_2) +$$
$$+ \frac{2a_0\mathrm{B}_1 - a_1\mathrm{B}_0}{a_2^2 A}(C_2 - c_2) + \frac{1}{a_2 A^3}[A\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1 - b_2 A^2\mathrm{B}_0 - 2\Gamma_0].$$

Die zweite der Bestimmungsgleichungen (619) aber gibt auf dem betretenen Wege d Substitution und nachheriger Elimination des α aus dem Nenner überhaupt und der höheren Potenz desselben von der zweiten an aus dem Zähler, den folgenden Werth des vierten Reihencoefficie ten von φ:

$$\delta = \frac{1}{a_2^3 A^5}\Big\{ \alpha\Big[a_1^2 a_2^2 d_2 A^4 + a_1^2 b_2 A^2\mathrm{B}_1^2 + 2a_1^2 a_2 c_2 A^3\mathrm{B}_1 + 2a_1^2 b_2 A\Gamma_1 + 2a_1^2\mathrm{B}_1\Gamma_1 - 2a_0 a_2^2 d_2 A^4 \tag{622}$$
$$- 2a_0 a_2 b_2 A^2\mathrm{B}_1^2 - 4a_0 a_2^2 c_2 A^3\mathrm{B}_1 - 4a_0 a_2 b_2 A\Gamma_1 - 4a_0 a_2\mathrm{B}_1\Gamma_1 - a_1 a_2^2 d_1 A^4$$
$$- 2a_1 a_2 b_2 A^2\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1 - 2a_1 a_2^2 c_2 A^3\mathrm{B}_0 - a_1 a_2^2 c_1 A^3\mathrm{B}_1 + a_1 a_2^2 b_2 A^3\mathrm{B}_1 - 2a_1 a_2 b_2 A\Gamma_0$$
$$- a_1 a_2 b_1 A\Gamma_1 + 2a_1 a_2^2 A\Gamma_1 - 2a_1 a_2\mathrm{B}_1\Gamma_0 - 2a_1 a_2\mathrm{B}_0\Gamma_1 + 2a_2^4 A^4 d_0 + 2a_2^2 b_2 A^2\mathrm{B}_0^2$$
$$+ 2a_2^2 c_1 A^3\mathrm{B}_0 - 2a_2^2 b_2 A^3\mathrm{B}_0 + 2a_2^2 b_1 A\Gamma_0 - 4a_2^2 A\Gamma_0 + 4a^2\mathrm{B}_0\Gamma_0\Big] +$$
$$+ a_0 a_1 a_2^2 d_2 A^4 + a_0 a_1 b_2 A^2\mathrm{B}_1^2 + 2a_0 a_1 a_2 c_2 A^3\mathrm{B}_1 + 2a_0 a_1 b_2 A\Gamma_1 + 2a_0 a_1\mathrm{B}_1\Gamma_1$$
$$- 2a_0 a_2^2 d_1 A^4 - 4a_0 a_2 b_2 A^2\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1 - 4a_0 a_2^2 c_2 A^3\mathrm{B}_0 - 2a_0 a_2^2 c_1 A^3\mathrm{B}_1 + 2a_0 a_2^2 b_2 A^3\mathrm{B}_1$$
$$- 4a_0 a_2 b_2 A\Gamma_0 - 2a_0 a_2 b_1 A\Gamma_1 + 4a_0 a_2^2 A\Gamma_1 - 4a_0 a_2\mathrm{B}_1\Gamma_0 - 4a_0 a_2\mathrm{B}_0\Gamma_1$$
$$+ a_1 a_2^3 d_0 A^4 + a_1 a_2 b_2 A^2\mathrm{B}_0^2 + a_1 a_2^2 c_1 A^3\mathrm{B}_0 - a_1 a_2^2 b_2 A^3\mathrm{B}_0 + a_1 a_2 b_1 A\Gamma_0$$
$$- 2a_1 a_2^2 A\Gamma_0 + 2a_1 a_2\mathrm{B}_0\Gamma_0$$

was bereits ein ziemlich complizirter Ausdruck ist. Unendliche Werthe von β, γ, δ, ... können, wie aus den dafür erhaltenen Formeln erhellt, nur dann die Rechnung unterbrechen, wenn die Gleichung in α gleiche Wurzeln hat, weil in diesem Falle das allenthalben im Nenner vorhandene A in Null übergeht.

In eine Discussion der damit verbundenen analytischen Erscheinungen sich einzulassen, ist hier nicht nothwendig. Sie sind im §. 2 der Transformationslehre erschöpfend auseinandergesetzt. Hier braucht nur bemerkt zu werden, dass in dem Falle gleicher Wurzeln α durch die Transformation:

$$y = e^{\alpha x}.z$$

der Differentialgleichung alsogleich eine andere Gestalt ertheilt wird, insoferne, als die gleich hohen Coefficienten in andere von gegen den letzten abnehmender Gradzahl verwandelt werden, und dass dann die ganze Rechnung mit der erhaltenen Transformirten in z auf entsprechende Weise von vorne zu beginnen habe.

Je weiter die Berechnung der aufeinander folgenden Coefficientenschichten und der Glieder des φ fortgesetzt wird, desto mehr Constanten mit dem Stellenzeiger 2, namentlich B_2, C_2, D_2, ..., insgesammt gehörig zum ersten Coefficienten der gesuchten algebraischen Gleichung, über deren Werthe man nach Belieben verfügen kann, treten in der Rechnung auf. Der ganze erste Coefficient dieser Algebraischen, erscheint sohin willkürlich und man könnte allenfalls, wenn man wollte, $B_2 = C_2 = D_2 \ldots = 0$ wählen, nur dürfte man dann nicht vergessen, dass eine solche Annahme keinen anderen Sinn haben könne, als, man sucht die algebraische Gleichung in einer Form, die sie durch Division aller ihrer Glieder durch den ersten Coefficienten gewinnt, eine Operation, durch welche die übrigen Coefficienten in die Gestalt recurrirender Reihen gezwängt, selbst dann nicht mehr in geschlossener Form vorhanden sein können, wenn es überhaupt eine algebraische Gleichung gibt mit geschlossenen Coefficienten, die der Differentialen angehört. Aus diesem Grunde wird der Analyst, der oft nach geschlossenen Formen strebt, selbst dann, wenn er kein besonderer Verehrer derselben ist, nur um einen Eintheilungsgrund der verschiedenen Formen zu gewinnen, in denen das Integral aufzutreten vermag, die willkürlichen B_2, C_2, D_2, ... lieber so zu wählen trachten, dass geschlossene Coefficienten der algebraischen Gleichung zu Tage kommen. Je weiter nun die Rechnungen fortgesetzt worden sind, desto grösser ist die Anzahl dieser disponiblen Parameter, desto mehr Hoffnung hat man mithin, wirklichen geschlossenen Formen zu begegnen. Ihr Vorhandensein wird darauf beruhen, dass von irgend einer der Coefficientenschichten angefangen, sämmtliche darauffolgenden der Nulle gleich werden. Ob und für welche B_2, C_2, D_2, ... diess stattfindet, wird man in der Regel dann am besten zu untersuchen anfangen, wenn sämmtliche Schichten der Parameter der vorgelegten Differentialgleichung bereits erschöpft, d. h. schon in die Rechnung eingegangen sind. Z. B.: Wenn alle Coefficienten der Differentialgleichung (592), auf welche sich die gegenwärtigen Untersuchungen beziehen, vom zweiten Grade sind, so sind nur die mit a, b, c bezeichneten Parameter in derselben von Null verschieden; die folgenden: d, e,... verschwinden bereits. Man wird daher, in der Regel wenigstens, in einem solchen Falle die Unter-

suchung nach geschlossenen Formen bei den Gleichungen (621) anheben können, die D_1 und D_0 bestimmen, indem man diese als Null voraussetzt, zu diesem Ende eine schickliche Wahl der Werthe von B_2, C_2 und $D_2 = 0$ treffend. Es ist diess offenbar immer möglich, aber zum Bestehen geschlossener Formen überhaupt noch keineswegs zureichend; es kommt vielmehr noch darauf an, nachzuweisen, dass für dieselben B_2 und C_2, $D_2 = 0$, welche D_0 und D_1 verschwinden machen, auch die übrigen Coefficientenschichten und namentlich E_0, E_1, ... in die Nulle übergehen unter gleichzeitigem $E_2 = 0$. Diess kann dann, wenn es wirklich geschieht, entweder allgemein, oder nur für gewisse Werthe der in der Differentialgleichung vorhandenen Parameter geschehen und es nimmt im letzteren Falle die Rechnung auch wieder den Charakter einer Discussion an der verschiedenen Formen des Integrales nach Massgabe der Beschaffenheit der Parameter.

In dem hier auseinandergesetzten Verlaufe der Rechnung wird einstweilen noch keine Rücksicht darauf genommen, dass wir über einige Kenntniss des ersten Coefficienten der algebraischen Gleichung und mitunter auch der folgenden verfügen, wenn diess auch keine erschöpfende ist; nehmen wir aber gehörige Rücksicht auf dasjenige, was wir von der Zusammensetzung dieses ersten Coefficienten der algebraischen Gleichung aus jenem der Differentialgleichung wissen, so kann diess zur Erleichterung und Abkürzung der Untersuchungen dienlich sein. Man hätte sich da speciell bei der vorliegenden Differentialgleichung der zweiten Ordnung zu benehmen, wie folgt: Der erste Coefficient der Differentialgleichung werde zerlegt in einfache Factoren von der Form $x - \alpha$. Ist irgend einer derselben wiederholt vorhanden, während er im zweiten Coefficienten gar nicht vorkömmt, so hat man ihn ebenso oft auch dem ersten Coefficienten der algebraischen Gleichung zuzuschreiben und, als demselben angehörig, aufzuzeichnen. Diess findet überhaupt Statt, wenn das den Coefficientenbau in Bezug auf einfache Factoren, wie $x - \alpha$, umspannende Polygon repartirte Abfälle bietet, die grösser sind als Eins.

Ist die Repartitionszahl die Einheit selber, so hat man nach dem zu $x = \alpha$ gehörenden Exponenten, der immer k genannt worden ist, zu forschen. Ist dieser eine positive oder allgemeine, eines positiven Werthes fähige Zahl, so hat man ebenfalls den Factor $x - \alpha$ unter diejenigen des ersten Coefficienten der algebraischen Gleichung zu reihen und zwar zweimal bei der Differentialgleichung der zweiten Ordnung, weil, wie wir schon im §. 10 der Formenlehre gesehen haben, beide Functionen φ den Divisor $x - \alpha$ tragen und demungeachtet nur ein einziges particuläres Integral mit dem Divisor $(x - \alpha)^k$ vorhanden sein kann.

Diejenigen Factoren $x - \alpha$, denen ganze und negative k entsprechen, numerisch kleiner als die Ordnungszahl der Gleichung, hier kleiner als zwei, mithin $k = -1$, könnte man allenfalls weglassen; in Anbetracht jedoch des Umstandes, dass man die geschlossene Form der Coefficienten durch überflüssiges Multipliziren mit einem ganzen Polynome nicht verfehlt, wohl aber verfehlen kann dadurch, dass man einen wirklich vorhandenen Factor weglässt, könnten auch diese $x - \alpha$ ohne Schaden unter die Factoren des ersten Coefficienten aufgenommen werden, wiewohl auch hinwiederum das Hinweglassen derselben bei gehörig durchgeführter Rechnung von keinem erheblichen Nachtheile

begleitet sein wird. Es können also, wie gesagt, diese Factoren $x - \alpha$, denen ein $k = -1$ angehört, ganz weggelassen werden.

Ist endlich für irgend einen Factor $x - \alpha$ das entsprechende $k = -\frac{1}{2}$, so deutet diess in der Regel nur auf einen Werth $x = \alpha$, bei welchem in der algebraischen Gleichung die zwei Wurzeln hindurchgehen durch den Zustand der Gleichheit, womit ein Uebergang von Reell in Imaginär verknüpft ist. Alle solchen Factoren $x - \alpha$ wird man daher ebenfalls wegzulassen berechtigt sein. Nimmt man also wirklich nur die unter 1 und 2 angeführten Factoren $x - \alpha$ und vereinigt sie in ein Produkt Q, so wird sich der erste Coefficient der algebraischen Gleichung wiedergeben lassen als ein Produkt aus zwei ganzen algebraischen Functionen Q und R, von welchen nur die letztere unbekannt ist. Es sei nun:

$$Q = x^r + \mathfrak{b}_2 x^{r-1} + \mathfrak{c}_2 x^{r-2} + \dots\dots\dots \tag{623}$$

allwo $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, ... bekannte Coefficienten bedeuten; es sei ferner:

$$R = \mathfrak{A}_2 x^{p-r} + \mathfrak{B}_2 x^{p-r-1} + \mathfrak{C}_2 x^{p-r-2} + \dots\dots\dots \tag{624}$$

wo $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, ... annoch zu bestimmende Coefficienten sind, so hat man sich durch diese Darstellung des ersten Coefficienten in Gestalt eines Produktes die Rechnung insoferne erleichtert, als man anstatt der Coefficienten B_2, C_2, D_2, ... die p an der Zahl sind, nur mehr die: $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_2$ ... zu bestimmen hat, die $p - r$ an der Zahl sind. Es ist nämlich dieser erste Coefficient:

$$\begin{aligned} QR &= A_2 x^p + B_2 x^{p-1} + C_2 x^{p-2} + D_2 x^{p-3} + \dots\dots = \\ &= (x^r + \mathfrak{b}_2 x^{r-1} + \mathfrak{c}_2 x^{r-2} + \dots\dots)\,(\mathfrak{A}_2 x^{p-r} + \mathfrak{B}_2 x^{p-r-1} + \mathfrak{C}_2 x^{p-r-2} + \dots\dots) \end{aligned} \tag{625}$$

oder nach Entwicklung des im letzten Theile der Gleichung vorhandenen Produktes:

$$\begin{aligned} & A_2 x^p + B_2 x^{p-1} + C_2 x^{p-2} + D_2 x^{p-3} + \dots\dots = \\ &= \mathfrak{A}_2 x^p + (\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{b}_2 \mathfrak{A}_2)\, x^{p-1} + (\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{b}_2 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{c}_2 \mathfrak{A}_2)\, x^{p-2} + \\ &+ (\mathfrak{D}_2 + \mathfrak{b}_2 \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{c}_2 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{d}_2 \mathfrak{A}_2)\, x^{p-3} + \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{626}$$

Hieraus folgt durch Gleichstellung der Coefficienten der einzelnen Potenzen von x:

$$\begin{aligned} A_2 &= \mathfrak{A}_2 = a_2 \\ B_2 &= \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{b}_2 \mathfrak{A}_2 \\ C_2 &= \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{b}_2 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{c}_2 \mathfrak{A}_2 \\ D_2 &= \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{b}_2 \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{c}_2 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{d}_2 \mathfrak{A}_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{627}$$

Diese Werthe nun lassen sich anstatt der disponiblen Constanten B_2, C_2, D_2, ... in die Formeln (608), (616) und (621) einführen, wodurch dieselben durch andere ersetzt werden, nämlich: $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_2$, ... die jedesmal in geringerer Anzahl vorhanden sein müssen, wenn überhaupt eine geschlossene Form der Coefficienten besteht, und über deren Bedeutungen man ebenso gut zur Erzeugung der geschlossenen Form zu verfügen berechtigt ist. Man läuft, auf die hier auseinandergesetzte Weise ver-

fahrend, zwar manchmal noch immer Gefahr, der algebraischen Gleichung einen oder ein Paar Factoren wie $x - a$ zu viel zu ertheilen, durch welchen oder durch welche dann sich die Gleichung dividiren lässt; allein, man wird sich doch die Rechnung wesentlich erleichtert haben, und die geschlossene Form, wenn sie vorhanden ist, nie verfehlen. Ein Paar specielle Beispiele mögen den Gebrauch der Methode erläutern.

Erkiesen wir als erstes Beispiel eine einfache Differentialgleichung, die schon zu wiederholten Malen Gegenstand unserer Betrachtungen war, nämlich die:

$$xy'' + ay' - b^2xy = 0. \tag{628}$$

Wir wissen von ihr, dass sie geschlossene particuläre Integrale zulasse, so oft $\frac{a}{2}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist. Offenbar wird bei einer solchen Beschaffenheit der particulären Integrale auch eine geschlossene algebraische Gleichung vorhanden sein und es ist wohl nicht ohne Interesse, zu untersuchen, ob die geschlossene Eigenschaft ihrer Coefficienten wirklich geknüpft sei an die Bedingung, dass $\frac{a}{2}$ ganz ist, weil es auch sehr gut möglich ist, dass die algebraische Gleichung in einem jeden Falle geschlossen erscheint, und nur für den Fall, dass $\frac{a}{2}$ in eine ganze Zahl übergeht, eine rationale Zerlegung in zwei Factoren gestattet. Es sei also die der vorgelegten (628) entsprechende algebraische:

$$\begin{aligned}
&[A_2x^p + B_2x^{p-1} + C_2x^{p-2} + D_2x^{p-3} + E_2x^{p-4} + F_2x^{p-5} + \ldots\ldots]\,\varphi^2 + \\
+\,&[A_1x^p + B_1x^{p-1} + C_1x^{p-2} + D_1x^{p-3} + E_1x^{p-4} + F_1x^{p-5} + \ldots\ldots]\,\varphi\ + \\
+\,&[A_0x^p + B_0x^{p-1} + C_0x^{p-2} + D_0x^{p-3} + E_0x^{p-4} + F_0x^{p-5} + \ldots\ldots\ldots = 0
\end{aligned} \tag{629}$$

so ergeben sich für dieses specielle Beispiel die nachstehenden Bestimmungsgleichungen, schon zu zwei und zwei zusammengestellt, wie sie zur Berechnung der aufeinander folgenden Glieder von φ und der ihnen entsprechenden Coefficientenschichten dienen:

$$\begin{aligned}
&\alpha^2A_2 + \alpha A_1 + A_0 = 0\\
&\alpha^2 - b^2 = 0
\end{aligned} \tag{630}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha^2B_2 + \alpha B_1 + B_0 + 2\alpha\beta A_2 + \beta A_1 = 0\\
&\alpha a + 2\alpha\beta = 0
\end{aligned} \tag{631}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha^2C_2 + \alpha C_1 + C_0 + 2\alpha\beta B_2 + \beta B_1 + (\beta^2 + 2\alpha\gamma)\,A_2 + \gamma A_1 = 0\\
&\beta a + \beta^2 - \beta + 2\alpha\gamma = 0
\end{aligned} \tag{632}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha^2D_2 + \alpha D_1 + D_0 + 2\alpha\beta C_2 + \beta C_1 + (\beta^2 + 2\alpha\gamma)\,B_2 + \gamma B_1 + (2\beta\gamma + 2\alpha\delta)\,A_2 + \delta A_1 = 0\\
&\gamma a + 2\beta\gamma + 2\alpha\delta - 2\gamma = 0
\end{aligned} \tag{633}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha^2E_2 + \alpha E_1 + E_0 + 2\alpha\beta D_2 + \beta D_1 + (\beta^2 + 2\alpha\gamma)C_2 + \gamma C_1 + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)B_2 + \delta B_1 + (2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma^2)A_2 + \varepsilon A_1 = 0\\
&\delta a + 2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma^2 - 3\delta = 0
\end{aligned} \tag{634}$$

$$\alpha^2F_2+\alpha F_1+F_0+2\alpha\beta E_2+\beta E_1+(\beta^2+2\alpha\gamma)D_2+\gamma D_1+(2\alpha\delta+2\beta\gamma)C_2+\delta C_1+(2\alpha\varepsilon+2\beta\delta+\gamma^2)B_2+\varepsilon B_1+$$
$$+(2\alpha\eta+2\beta\varepsilon+2\gamma\delta)A_2+\eta A_1=0 \tag{635}$$
$$\varepsilon a+2\alpha\eta+2\beta\varepsilon+2\gamma\delta-4\varepsilon=0$$

$$\alpha^2G_2+\alpha G_1+G_0+2\alpha\beta F_2+\beta F_1+(\beta^2+2\alpha\gamma)E_2+\gamma E_1+(2\alpha\delta+2\beta\gamma)D_2+\delta D_1+(2\alpha\varepsilon+2\beta\delta+\gamma^2)C_2+\varepsilon C_1+$$
$$(2\alpha\eta+2\beta\varepsilon+2\gamma\delta)B_2+\eta B_1+(2\alpha\zeta+2\beta\eta+2\gamma\varepsilon+\delta^2)A_2+\zeta A_1=0 \tag{636}$$
$$\eta a+2a\zeta+2\beta\eta+2\gamma\varepsilon+\delta^2-5\eta=0$$

. . . .

Dem ersten Paare dieser Bestimmungsgleichungen entnimmt man:

$$A_2 = 1\ ,\quad A_1 = 0\ ,\quad A_0 = -b^2 \qquad \alpha = \pm b \tag{637}$$

das zweite liefert sofort:

$$B_1 = a\ ,\quad B_0 = -b^2B_2 \qquad \beta = -\frac{a}{2}. \tag{638}$$

Hiemit sind aber die sämmtlichen Coefficientenschichten unserer sehr einfachen Differentialgleichung erschöpft, und man kann die Frage nach geschlossener Form der algebraischen Gleichung stellen und sieht auch gleich, dass alle drei Coefficienten der zweiten Schichte: B_2, B_1, B_0 verschwinden, wenn $a=0$ ist. Der fernere Verlauf der Rechnung wird die Ueberzeugung bringen, dass in diesem Falle wirklich der Differentialgleichung

$$xy'' - b^2xy = 0 \tag{639}$$

die geschlossene algebraische:

$$\varphi^2 - b^2 = 0 \tag{640}$$

angehöre, was sich übrigens auch von selbst versteht. Nun gibt das dritte Paar von Bestimmungsgleichungen:

$$C_1 = aB_2\ ,\quad C_0 = -b^2C_2 + \frac{a}{2} \qquad \gamma = \pm\frac{a(a-2)}{8b}. \tag{641}$$

Die dritte Coefficientenschichte, nämlich C_2, C_1, C_0, geht in Null über, wenn die zweite verschwindet und $C_2=0$ willkürlich angenommen wird. Hiemit bestätigt sich das Zusammengehören der beiden Gleichungen (639) und (640); allein es zeigt sich auch, dass es keine algebraische Gleichung mit nur zwei Coefficientenschichten gebe, welche der differentialen (628) angehören könnte, was auch die Bedeutung von a sein mag. Dem vierten Paare von Bestimmungsgleichungen entnehmen wir:

$$D_1 = aC_2 - \frac{a(a-2)}{4b^2}\ ,\quad D_0 = -b^2D_2 + \frac{a}{2}B_2 \qquad \delta = \frac{a(a-2)}{8b^2}. \tag{642}$$

Die vierte Schichte der Coefficienten D_2, D_1, D_0 kann man nun zum Verschwinden bringen, erstens für $a=0$, was abermals eine Bestätigung der beiden Gleichungen (639) und (640) ist, zweitens dadurch, dass man annimmt:

$$C_2 = \frac{a-2}{4b^2},\ B_2 = 0,\ C_1 = 0,\ C_0 = \frac{a+2}{4},\ B_1 = a,\ B_0 = 0 \tag{643}$$

mithin vermögen auch die folgenden zwei Gleichungen, die eine eine Differentialgleichung, die andere eine algebraische, zusammenzugehören:

$$\begin{gathered} xy'' + ay' - b^2xy = 0 \\ \left(x^2 + \frac{a-2}{4b^2}\right)\varphi^2 + ax\varphi - b^2x^2 + \frac{a+2}{4} = 0. \end{gathered} \tag{644}$$

Ob diess allgemein für jedes a oder nur für einen speciellen Werth dieses Parameters stattfinde, muss erst die Folge lehren, weil zum geschlossenen Vorhandensein nebst den (643) auch das Verschwinden der nächsten Coefficientenschichten erforderlich ist, wozu vielleicht die Annahme eines speciellen Werthes von a unerlässlich wird. In der That gibt das folgende Gleichungspaar, (634) nämlich

$$\begin{gathered} E_1 = aD_2 - \frac{a(a-2)}{4b^2}B_2,\ E_0 = -b^2E_2 + \frac{a}{2}C_2 - \frac{a(a+3)(a-2)}{8b^2} \\ \varepsilon = \mp\frac{a(a-2)(a+4)(a-6)}{128.b^8} \end{gathered} \tag{645}$$

und es besteht $E_2 = E_1 = E_0 = 0$ nicht nur, wenn $a=0$ ist, sondern auch, wenn die (643) und mithin die: $D_2 = D_1 = D_0 = 0$ erfüllt sind und man zugleich $a = \pm 2$ hat. Also nicht für jedes a, sondern nur für $a = \pm 2$ sind die beiden (644) zusammengehörig.

Gehen wir jetzt über zu dem folgenden Paare von Bestimmungsgleichungen, (635) nämlich, so erhalten wir:

$$\begin{gathered} F_1 = aE_2 - \frac{a(a-2)}{4b^2}C_2 + \frac{a(a-2)(a^2-2a-12)}{16b^4} \\ F_0 = -b^2F_2 + \frac{a}{2}D_2 - \frac{a(a-2)(a+3)}{8b^2}B_2 \\ \eta = -\frac{a(a-2)(a^2-2a-12)}{32.b^4} \end{gathered} \tag{646}$$

und gewinnen in drei verschiedenen Fällen $F_2 = F_1 = F_0 = 0$, nämlich für $a=0$, dann beim Bestehen von (643) für $a = \pm 2$. Um nun weiter entscheiden zu können, ob es nicht eine algebraische Gleichung gebe, bei welcher vier Coefficientenschichten, nämlich die mit A, B, C, D bezeichneten von Null verschieden ausfallen und nur die folgenden verschwinden, wird es nothwendig sein, das folgende Paar von Bestimmungsgleichungen, nämlich die (636) hinzuzufügen. Sie geben:

$$G_1 = aF_2 - \frac{a(a-2)}{4b^2} D_2 + \frac{a(a-2)\left[a^2 - 2a - 12\right]}{16b^4} B_2$$

$$G_0 = -b^2 G_2 + \frac{a}{2} E_2 - \frac{a(a-2)(a+3)}{8b^2} C_2 + \frac{a(a-2)(a^3 + 4a^2 - 24a - 60)}{32b^4} \tag{647}$$

Nun betrachte man in den sechs Gleichungen (645), (646) und (647) die Coefficienten E_0, E_1, E_2, F_0, F_1, F_2, G_0, G_1, G_2 als verschwindende Grössen, ohne dass desshalb auch die D_0, D_1, D_2 in Null übergehen, so gibt die zweite der (645):

$$C_2 = \frac{(a-2)(a+3)}{4b^2}$$

in Folge dessen die erste der (646):

$$a = -2$$

gibt. Hingegen liefert die erste der (645):

$$D_2 = \frac{a-2}{4b^2} B_2$$

und in Folge dessen die zweite der (646):

$$(a + 2) B_2 = 0$$

was entweder abermals $a = -2$ oder $B_2 = 0$ gibt. Versucht man nun diesen Werth von a in die beiden Gleichungen (647) zu substituiren, so werden beide identisch. Es existirt also, wie es scheint, für $a = -2$ eine algebraische Gleichung mit vier von der Nulle verschiedenen Coefficientenschichten, mithin mit Coefficienten des dritten Grades nach x, welche der Differentialgleichung (628) entspricht. Allein bei näherer Untersuchung ergibt sich, dass für $a = -2$ die vierte der Coefficientenschichten D nicht von der Nulle verschieden ausfalle. Man hat also eigentlich eine der früher gewonnenen algebraischen Gleichungen zum zweiten Male und sieht, dass die mit vier von Null verschiedenen Coefficientenschichten nicht vorhanden sei.

Lassen wir jetzt, in der Untersuchung fortfahrend, die fünf mit A, B, C, D, E benannten Coefficientenschichten von der Nulle verschieden sein und die übrigen, namentlich F, G verschwinden. Wir ziehen unter diesen Voraussetzungen aus der zweiten der (646) und aus der ersten der (647) Werthe von D_2, die, einander gleichgesetzt, zur:

$$(a + 2) B_2 = 0$$

führen. $a + 2 = 0$ liefert nichts Neues, sondern führt zu einer der früheren Gleichungen zurück. Wir sind daher genöthigt: $B_2 = 0$ anzunehmen. Eben so gibt jetzt die erste der (646) verbunden mit der zweiten der (647) eine zur Bestimmung von C_2 dienende Gleichung, der wir:

$$C_2 = \frac{1}{4b^2}\left[a^2 + a - 24\right]$$

entnehmen. Mit diesen Werthen nun von B_2 und C_2 gestalten sich die vorangehenden Coefficientenschichten der gesuchten algebraischen Gleichung, wie folgt:

$$A_2 = 1\,,\quad A_1 = 0\,,\quad A_0 = -b^2$$
$$B_2 = 0\,,\quad B_1 = a\,,\quad B_0 = 0$$
$$C_2 = \frac{1}{4b^2}(a^2 + a - 24)\,,\quad C_1 = 0\,,\quad C_0 = -\frac{1}{4}(a^2 - a - 24,$$
$$D_2 = 0\,,\quad D_1 = \frac{1}{4b^2}(a^2 - 22a)\,,\quad D_0 = 0$$
$$E_2 = \frac{3(a-2)(a-4)}{16b^4}\,,\quad E_1 = 0\,,\quad E_0 = -\frac{1}{16b^2}(a^2 + 12a + 24)$$

und es ist jetzt nur noch die Frage, ob für jedes a, oder nur für besondere Werthe dieser Constanten auf das Verschwinden der folgenden Coefficientenschichten zu rechnen sei. Die weiter fortgeführte Untersuchung besagt aber, dass diess nur stattfinde für $a = \pm 4$ und, wie schon bekannt, für $a = \pm 2$ und $a = 0$. Es ist jedoch nicht nothwendig, die Rechnung weiter fortzusetzen, um sich hievon zu überzeugen, dass nämlich geschlossene Integrale auftreten für die genannten Bedeutungen des a. Diess ist uns bereits bekannt, weil wir wissen, dass dann die particulären Integrale selbst geschlossen sind, dass mithin die ihnen zugehörigen φ von keiner anderen als einer geschlossenen Gleichung abhängig sein können. Wir hätten also durch unsere Rechnung die folgenden fünf Paare zusammengehöriger Gleichungen gewonnen, von welchen das erste der Annahme $a = 0$ entspricht, die zwei folgenden aus den (644) für $a = \pm 2$ abgeleitet werden, endlich die zwei letzten den Voraussetzungen $a = \pm 4$ angehören:

$$xy'' - b^2xy = 0,\ \varphi^2 - b^2 = 0$$
$$xy'' + 2y' - b^2xy = 0,\ x^2\varphi^2 + 2x\varphi - b^2x^2 + 1 = 0$$
$$xy'' - 2y' - b^2xy = 0,\ \left(x^2 - \frac{1}{b^2}\right)\varphi^2 - 2x\varphi - b^2x^2 = 0$$
$$xy'' + 4y' - b^2xy = 0,\ \left[x^4 - \frac{x^2}{b^2}\right]\varphi^2 + \left[4x^3 - \frac{6x}{b^2}\right]\varphi - b^2x^4 + 3x^2 - \frac{11}{2b^2} = 0$$
$$xy'' - 4y' - b^2xy = 0,\ \left[x^4 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{9}{b^4}\right]\varphi^2 + \left[-4x^3 - \frac{6x}{b^2}\right]\varphi - b^2x^4 + 3x^2 + \frac{1}{2b^2} = 0.$$

Einem Liebhaber geschlossener Formen wird es hier sowohl, wie auch in vielen anderen Beispielen unangenehm auffallen, dass die Frage, ob eine geschlossene algebraische Gleichung vorhanden sei für beliebige Werthe des Parameters a eigentlieh nicht beantwortet wird, weil man nicht weiss, ob ein Abbrechen der Gleichungscoefficienten nicht erst in den spätesten Schichten derselben stattfindet. Entschieden ist nur das, dass es eine algebraische Gleichung mit Coefficienten von mässiger Ausdehnung nicht gebe, die für beliebige a zur differentialen (628) gehörig wäre. Für den practischen Gebrauch indessen sind sehr complizirte und unendliche Coefficienten offenbar von einerlei Werth.

Erwählen wir als ein zweites Beispiel die folgende Differentialgleichung mit viel verwickelter aussehenden Coefficienten:

$$x(x^2 + c^2)\,y'' + \left[2ax^2 + (2a+1)\,c^2\right] y' - \left[b^2x^3 + (a^2 + a)\,x\right] y = 0. \tag{648}$$

Hier kann es bereits frommen, die Factoren des ersten Coefficienten in zwei Gruppen zu sondern, diejenigen nämlich, die der algebraischen Gleichung angehören müssen, und die anderen, die in derselben

fehlen können. Wir suchen zu diesem Zwecke die diesen Factoren, welche drei an der Zahl sind, nämlich:

$$x\ ,\quad x - c\sqrt{-1}\ ,\quad x + c\sqrt{-1}$$

zugehörigen Werthe des Exponenten k nach der Formel (8) Seite 7 des II. Bandes.

Sie sind beziehlich:

$$2a\ ,\quad -\frac{3}{2}\ ,\quad -\frac{3}{2}$$

Von dem ersten dieser drei Factoren wissen wir mithin gewiss, dass er auch der algebraischen Gleichung angehöre, wenn eine solche überhaupt existirt mit geschlossenen Coefficienten. Die den beiden übrigen zugehörigen $k = -\frac{3}{2}$ begründen die Wahrscheinlichkeit der Existenz und erregen zugleich die Vermuthung, dass in den zwei irrationalen Werthen der Function φ der Factor $x^2 + c^2$ unter dem Wurzelzeichen vorhanden, oder dass $x = \pm c\sqrt{-1}$ ein Werth sei, bei welchem die beiden φ von Reell in Imaginär übergehen. Diess nimmt zwar gegenwärtig auf den Gang der Rechnung keinen Einfluss, als insoferne, dass man sich berechtigt sieht, nach geschlossenen Formen zu forschen gleich nach den ersten zwei Coefficientenschichten, die aus begreiflichen Gründen bei jeder Differentialgleichung mit im Niveau stehenden Coefficienten und bei der ihr zugehörigen Algebraischen identisch dieselben sind. Man hat also, die unter (593) aufgestellte Algebraische mit den vorgelegten Differentialen in Bezug setzend:

$$\begin{gathered} A_2 = 1\ ,\quad A_1 = 0\ ,\quad A_0 = -b^2 \\ B_2 = 0\ ,\quad B_1 = 2a,\quad B_0 = 0 \\ \alpha = \pm b\ ,\quad \beta = -a \end{gathered} \tag{649}$$

Für die dritte Coefficientenschichte und für γ ergeben sich nun aus den folgenden zwei Bestimmungsgleichungen die Werthe:

$$\begin{gathered} C_1 = 0\ ,\quad C_0 = -b^2(C_2 - c^2) - a^2 \\ \gamma = \pm\frac{2a^2 - b^2c^2}{2b} \end{gathered} \tag{650}$$

und man hat augenscheinlich: $C_2 = C_1 = C_0 = 0$, wenn $b^2 c^2 = a^2$ besteht.

Geht man jetzt über zu der folgenden Coefficientenschichte, so erhält man leicht aus den derselben angehörigen Bestimmungsgleichungen:

$$D_0 = -b^2 D_2\ ,\quad D_1 = 2aC_2 - 2c^2 + 2\frac{a^2}{b^2} \tag{651}$$

und es ist nebst: $C_2 = C_1 = C_0 = 0$ auch $D_2 = D_1 = D_0 = 0$, unter derselben Bedingung: $b^2 c^2 = a^2$. Diese Wiederholung macht es wahrscheinlich, dass unter gleichen Umständen auch die folgenden Coefficientenschichten verschwinden werden, man also der vorgelegten Differentialgleichung entsprechend

für $c^2 b^2 = a^2$ die folgende sehr einfache Algebraische gewonnen habe, mit Coefficienten des erste Grades:

(652) $$x.\varphi^2 + 2a\varphi - b^2 x = 0.$$

Dass dem wirklich so sei, davon überzeugt man sich, diejenige Differentialgleichung bildend, welch dieser Algebraischen angehört, was vermöge der Formel (68) Seite 194 des I. Bandes ohne Schwierig keit bewerkstelligt wird.

Die Integration der complizirteren Gleichung ist daher mit weit weniger Mühe gelungen als die der vorangehenden einfacheren.

Nehmen wir, um das Verfahren in allen Fällen zu erläutern, noch das folgende Beispiel eine Differentialgleichung mit Coefficienten des sechsten Grades vor:

(653) $$(x^2-a^2)(x^4-a^2c^2)y''+[2bx^5+2a^2x^3-2a^2c^2(b+1)x]y'+[x^6+(c^2-b)x^4-a^2c^2x^2-a^2c^2(c^2+b)]y=0$$

Der hohen Gradzahl der Coefficienten wegen wird es jetzt wieder erspriesslich sein, nach denjenigen ein fachen Factoren des ersten derselben zu forschen, die nothwendig der Algebraischen und der Differen tialgleichung gemeinschaftlich sein müssen. Die Zerlegung führt zu den folgenden sechs an der Zahl:

$$x-a,\ x+a,\ x+\sqrt{ac},\ x-\sqrt{ac},\ x+\sqrt{-ac},\ x-\sqrt{-ac}.$$

Ihnen entsprechen bezüglich die folgenden Werthe von k:

$$b\,,\quad b\,,\quad -\frac{3}{2}\,,\quad -\frac{3}{2}\,,\quad -\frac{3}{2}\,,\quad -\frac{3}{2}$$

Die ersten zwei haben beide den allgemeinen Zahlenwerth b; mithin sind auch die ersten beiden Fac toren, oder was dasselbe ist, das Produkt $x^2 - a^2$ beiden Gleichungen nothwendig gemeinschaftlich die letzteren vier hingegen berechtigen durch ihre gebrochene Beschaffenheit zu der Voraussetzung dass eine geschlossene algebraische Gleichung, die der gegebenen differentialen angehört, vorhanden sein könne, und dass namentlich $x^4 - a^2 c^2$ in den beiden Werthen von φ vorkomme unter den Wurzelzeichen. Wir statuiren also die allgemeine algebraische Gleichung (593) als der differentiale entsprechend, denken uns jedoch den nothwendigerweise im ersten Coefficienten vorhandenen Factor $x^2 - a^2$ geschieden, so dass:

(654) $$A_2 x^p + B_2 x^{p-1} + C_2 x^{p-2} + \ldots\ldots = (x^2-a^2)[\mathfrak{A}_2 x^{p-2} + \mathfrak{B}_2 x^{p-3} + \mathfrak{C}_2 x^{p-4} + \ldots\ldots]$$

besteht. Durch Entwicklung des im zweiten Theile dieser Gleichung vorhandenen Produktes und Gleich stellung der Coefficienten gleichnamiger Potenzen von x erhält man nun zunächst:

(655) $$\begin{aligned} A_2 &= \mathfrak{A}_2 \\ B_2 &= \mathfrak{B}_2 \\ C_2 &= \mathfrak{C}_2 - a^2\mathfrak{A}_2 \\ D_2 &= \mathfrak{D}_2 - a^2\mathfrak{B}_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nun wissen wir ferner, dass die ersten zwei Coefficientenschichten den beiden Gleichungen gemeinschaftlich vorausgesetzt werden können, daher man:

$$\begin{gathered} A_2 = 1\,,\quad A_1 = 0\,,\quad A_0 = 1 \\ B_2 = 0\,,\quad B_1 = 2b,\quad B_0 = 0 \\ \alpha = \pm\sqrt{-1}\,,\quad \beta = -b \end{gathered} \tag{656}$$

gewinnt. Nun nehmen wir das Paar von Bedingungsgleichungen vor, dem die dritte Coefficientenschichte, mit C benannt, und das entsprechende γ entspriesst. Es ist unter (613) enthalten und man bekömmt mit Rücksicht auf die (655):

$$C_0 = \mathfrak{C}_2 + c^2,\; C_1 = 0,\; \gamma = \pm\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)\sqrt{-1} \tag{657}$$

Jetzt kann man gleich die Frage stellen, ob und unter welchen Bedingungen der erste Coefficient der algebraischen Gleichung, dargestellt in der Formel (654) lediglich in $x^2 - a^2$ übergeht, während sich der andere in die Einheit verwandelt, was der Fall ist, wenn

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{D}_2 = \ldots\ldots\ldots = 0$$

werden, und man sieht allsogleich, dass zu diesem Zwecke nur $C_0 = c^2$ angenommen werden muss. Und nun frägt es sich weiter, ob unter diesen Umständen die folgenden Coefficientenschichten zum Verschwinden zu bringen seien. Wir schreiten daher zu dem unter (619) vorfindigen ferneren Paare von Bestimmungsgleichungen für die vierte Coefficientenschichte, benannt mit D und für δ. Sie geben:

$$\begin{gathered} D_0 = \mathfrak{D}_2,\; D_1 = 2b\mathfrak{C}_2 + a^2 + b^2 - c^2 \\ \delta = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 + 2a^2 b) \end{gathered} \tag{658}$$

und man hat: $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{C}_2 = D_0 = D_1 = D_2 = 0$ nur dann, wenn $c^2 = a^2 + b^2$ ist, wodurch δ in $-a^2 b$ übergeht. Wenn nun unter Voraussetzung derselben Relation auch die folgenden Coefficientenschichten, welche die Benennung E, F, G, ... tragen, alle in Null übergehen würden, so wäre die der vorgelegten Differentialgleichung entsprechende Algebraische:

$$(x^2 - a^2)\,\varphi^2 + 2bx\varphi + x^2 + (a^2 + b^2) = 0. \tag{659}$$

Anstatt nun durch Berechnung der successiven Coefficientenschichten dieses Verschwinden Schichte um Schichte zu constatiren, ein Verfahren, bei welchem es doch zweifelhaft bleibt, ob nicht eine der folgenden von Null verschieden ausfallen könnte, erproben wir lieber die Zusammengehörigkeit der beiden Gleichungen (653) und (659) für $c^2 = a^2 + b^2$ vermittelst der allgemeinen Differentialgleichung der 2ten Ordnung, die unter (68) Seite 194 des I. Bandes vorkömmt und zur algebraischen (59) Seite 193 ebendaselbst gehörig ist, indem wir:

$$L = x^2 - a^2,\; M = 2bx,\; N = x^2 + a^2 + b^2$$

substituiren. Der Erfolg bestätigt die Annahme, dass die genannten beiden Gleichungen für $c^2 = a^2 + b^2$ zusammengehörig seien. Ueberhaupt wird diese allgemeine (68) bei jeder Differentialgleichung der zweiten Ordnung nicht nur dazu dienen können, die Frage nach der Existenz der algebraischen Gleichung in entscheidender Weise bejahend oder verneinend beantworten zu können, sondern sie wird auch die Bedingungen, welche zu diesem Zwecke unter den constanten Parametern erfüllt sein müssen, kund zu geben geeignet sein. In gleicher Weise wird sich dann auch die Differentialgleichung (135) mit den nachfolgenden Coefficientenwerthen (136) bis (139), die der algebraischen (144) Seite 209 und 210 des ersten Bandes angehört, bei Differentialgleichungen der dritten Ordnung als nutzbringend bewähren. Denselben Nutzen wird die (251), die der biquadratischen:

$$\varphi^4 + A\varphi^2 + B = 0$$

entspricht, mit den Coefficientenwerthen: (253) bis (257) Seite 240 des ersten Bandes gewähren. Endlich gehören noch die (305) (306) (307) (335) (336) (337) zu demselben Zwecke und lassen nur unter Umständen, die ihrem jedesmaligen Ursprunge angemessen sind, eine vortheilhafte Verwendung zu. Mit diesen analytischen Hilfsmitteln ausgerüstet, wird der Rechner, dem eine noch so verwickelte Differentialgleichung vorgelegt wird, mit den auffallenden Spuren von Irrationalgrössen in den particulären Integralen, die wirklich aus einer geschlossenen Algebraischen abgeleitet ist, selten in Verlegenheit gerathen. Er wird vielmehr nach gepflogener mehr oder minder langwieriger Untersuchung die Algebraische selbst mit oder ohne Beziehungsgleichungen zwischen den Parametern auffinden.

Der aufmerksame Analyst, der die Untersuchungen §. 9, 10, 11, 12, 13, 14 der Formenlehre, die von den Irrationalgrössen im Integrale handeln, mit der sich anschliessenden hier auseinandergesetzten Integrationsmethode vergleicht, könnte leicht zu folgenden Bedenken Veranlassung finden: Es ist an dieser Stelle der Formenlehre zwar erwiesen, dass die Differentialgleichung, deren Integral:

$$y = C_1 e^{\int \varphi_1 dx} + C_2 e^{\int \varphi_2 dx} \tag{660}$$

ist, unter φ_1 und φ_2 die irrationalen Wurzeln verstanden der algebraischen Gleichung des zweiten Grades:

$$L\varphi^2 + M\varphi + N = 0, \tag{661}$$

unter L, M, N rationale und geschlossene Functionen von x verstanden, ebenfalls geschlossene und rationale Coefficienten besitzen müsse. Es fehlt jedoch der Gegenbeweis, nämlich dass, wenn überhaupt eine geschlossene algebraische Gleichung, wie die (661), existiren soll, das Integral nothwendigerweise die Form (660) trage. Unsere gewonnenen analytischen Erfahrungen haben nämlich gelehrt, dass die Integralformel nicht stets in der Form (660) erscheine, dass vielmehr, wenn sich auch ein particuläres Integral in geschlossener Form auffinden lässt, wie $e^{\int \varphi dx}$, wo φ geschlossen ist, das andere nicht nothwendiger Weise, ja in der Regel sogar selten diesen Charakter trage, mit einem Worte, dass gewöhnlich und nur mit seltenen Ausnahmen die Integralformel die Gestalt:

$$y = Ce^{\int \varphi dx} \int e^{\int \psi dx} dx \tag{662}$$

biete, eine Form, die sich nur dann in die (660) verwandelt, wenn unter dem Integralzeichen, welches die Function $e^{\int \psi dx}$ beherrscht, das vollständige Differential einer Function vorhanden ist. Nun könnte man zweifelnd fragen: können denn nicht hier φ und ψ Irrationalgrössen in sich schliessen, die wirklich von einer geschlossenen algebraischen Gleichung, wie die (661) abhängig sind, während doch $\int e^{\int \psi dx} dx$ kein vollständiges Differential ist einer geschlossenen Function, und ist diess der Fall, so verfehlt ja offenbar unsere eben vorgetragene Integrationsmethode diese dann vorhandene algebraische Gleichung, weil sie nur diejenige sucht, die der Form (660) des Integrales angehört, welche als specieller Fall in der anderen allgemeinen enthalten ist. Es kann also wirklich die Frage aufgeworfen werden, ob man nicht etwa mit der eben auseinandergesetzten Integrationsmethode nur eine speciellere algebraische Gleichung gewinne, die dann besteht, wenn $e^{\int \psi dx} dx$ ein vollständiges Differential ist, und eine ebenfalls vorhandene viel allgemeinere verfehle, welche die volle Integrabilität dieser Differentialfunction gar nicht verlangt. Diese Zweifel zu zerstreuen, wird es nicht unwichtig sein, zu zeigen, dass eine geschlossene algebraische Gleichung für die allgemeinere Integralform (662) gar nicht einmal bestehen könne, woferne nicht $e^{\int \psi dx} dx$ in geschlossener Form integrabel ausfällt, mithin die speciellere Form (660) des Integrales massgebend auftritt.

Gehen wir in der That, um diess darzuthun, von der allgemeinen Form (662) aus unter der Voraussetzung irrationaler φ und ψ, so dass die in denselben vorkommenden Irrationalgrössen aus der Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades hervorgehen. Jedermann wird sich hier, wenn auch verschiedene Gleichungen zur Bestimmung von φ und ψ, doch einerlei Wurzelgrösse in beiden Functionen vorstellen. Nun bilde man zuvörderst die Differentialgleichung der ersten Ordnung, deren Integral

$$u = e^{\int \psi dx} \tag{663}$$

ist. Sie heisst:

$$u' - \psi u = 0. \tag{664}$$

Nun führe man zunächst eine neue abhängige Veränderliche ein vermittelst der Substitution:

$$u = v' \quad \text{mithin} \quad v = \int u dx = \int e^{\int \psi dx} dx \tag{665}$$

und

$$v'' - \psi v' = 0. \tag{666}$$

Endlich tausche man die v gegen eine andere Veränderliche y um, substituirend:

$$v = e^{-\int \varphi dx} . y. \tag{667}$$

Diess führt zur Differentialgleichung:

$$y'' + y' [- 2\varphi - \psi] + y [\varphi^2 - \varphi' + \psi\varphi] = 0 \tag{668}$$

deren Integral wirklich die allgemeine Form (662) ist. Ist nun ψ die geschlossene irrationale Wurzel irgend einer geschlossenen Gleichung des zweiten Grades, so besteht es stets in der Gestalt:

$$\psi = S + \sqrt{U} \tag{669}$$

und es können die beiden Coefficienten der Differentialgleichung offenbar nur dann rational ausfallen, wenn auch φ in entsprechender Weise irrational gewählt wird. Namentlich erfordert die rationale Beschaffenheit des ersten dieser beiden Coefficienten, dass:

$$2\varphi = R - \sqrt{U} \tag{670}$$

sei. Hier sind unter R sowohl, wie auch unter S und U geschlossene und rationale algebraische Functionen zu verstehen, die ganz sein können oder gebrochen, denn es wird verlangt, dass ψ sowohl, wie auch φ gegeben sei durch eine algebraische Gleichung mit geschlossenen algebraischen Coefficienten, was nur dann der Fall sein kann, wenn auch R, S, U diese Beschaffenheit haben.

Führen wir jetzt die Werthe von φ und ψ auch ein in den zweiten Coefficienten, so geht derselbe über in:

$$\frac{1}{4}\left[R^2 - U - 2R' + 2RS\right] + \frac{1}{4}\sqrt{U}\left[\frac{U'}{U} - 2S\right]$$

und fällt offenbar dann rational aus, wenn entweder

$$S = \frac{U'}{2U} \quad \text{oder} \quad U = 0$$

ist. Die rationale Differentialgleichung heisst nun:

$$y'' + y'\left(- R - \frac{U'}{2U}\right) + \frac{1}{4}y\left[R^2 - U - 2R' + R\frac{U'}{U}\right] = 0$$

oder:

$$y'' - y'(R + S) + \frac{1}{4}y \quad (R^2 - 2R' + 2RS) = 0.$$

Die ihr entsprechende, zur Bestimmung von ψ dienende Algebraische aber ist:

$$(\psi - S)^2 - U = 0$$

dagegen φ aus der folgenden hervorgeht:

$$(2\varphi - R)^2 - U = 0.$$

Endlich besteht die aus der (662) durch Substitution der Werthe für φ und ψ hervorgehende Integralformel:

$$y = Ce^{\int \frac{1}{2}(R - \sqrt{U})dx} \int e^{\int \left(\frac{U'}{2U} + \sqrt{U}\right)dx} dx$$

oder da $\frac{U'}{2U} = \frac{d}{dx}\left[log \sqrt{u}\right]$ ist:

$$y = Ce^{\int \frac{1}{2}(R - \sqrt{U})dx} \int e^{\int \sqrt{U}dx} \sqrt{U}dx = Ce^{\int \frac{1}{2}(R - \sqrt{U})dx}\left[e^{\int \sqrt{U}dx} + D\right] = C_1 e^{\int \frac{1}{2}(R + \sqrt{U})dx} + C_2 e^{\int \frac{1}{2}(R - \sqrt{U})dx} \tag{671}$$

was nicht mehr die allgemeine Formel (662), sondern vielmehr die speciellere (660) ist. Unter den alldort vorhandenen φ_1 und φ_2 die beiden Wurzeln der einzigen algebraischen Gleichung:

$$\left(\varphi - \frac{1}{2} R\right) - U = 0$$

verstanden. Hieraus lassen sich nun einige Folgerungen ziehen, die für den nach geschlossenen Formen Strebenden von Wichtigkeit sind, nämlich:

Erstens, wenn eine algebraische Gleichung rational nicht zerlegbar existirt, die der Differentialen zu Grunde liegt, so ist die Form des Integrales niemals die allgemeinere (662), sondern immer die speciellere (660), aus welcher wir die (68) Seite 194 der Formenlehre abgeleitet haben, weil dann der Differentialausdruck $e^{\int \varphi dx} dx$ mit irrationalem aber geschlossenem φ jederzeit geschlossen integrabel ausfällt. Nur wenn ψ gleich einer rationalen Function $\mathbf{S}$, mithin auch φ gleich einer ähnlichen Function, gleich $\frac{1}{2} R$ auftritt, braucht der eben erwähnte Differentialausdruck nicht in geschlossener Form integrabel zu sein, wodurch die allgemeinere Form (662) wieder in ihre Rechte tritt.

Zweitens, wenn man in einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung aus den gebrochenen Repartitionszahlen, sei es im Polygone, das den Coefficienbau in Bezug auf die Gradzahl derselben umspannt, oder auch in Bezug auf die Zusammensetzung aus einfachen Factoren, auf Irrationalgrössen im Integrale mit Sicherheit schliessen muss; so existirt keine geschlossene Integralformel, selbst nicht in der allgemeinen Gestalt (662), woferne nicht eine geschossene algebraische Gleichung aufgefunden werden kann, und hätte man sich überzeugt, dass keine solche existirt, so besteht auch kein geschlossenes irrationales Integral, denn gäbe es ein solches, so könnte man offenbar die Gleichung davon befreien, würde dadurch zu einer Differentialgleichung der ersten Ordnung gelangen, die immer geschlossen integrabel ist, würde somit ein geschlossenes Integral in der Form (662) gewinnen mit irrationalem φ und ψ, was nicht sein kann, da der Voraussetzung nach die geschlossene algebraische Gleichung nicht besteht, die zu diesem Zwecke vorhanden sein sollte. Es ist mithin in jedem Falle entweder eine geschlossene algebraische Gleichung vorhanden, oder gar kein geschlossenes Integral. Gestaltet sich die Integralformel rational, so ist die algebraische Gleichung rational in Factoren zerlegbar, und es existiren zwei geschlossene particuläre Integrale, beide rational; ist hingegen nur eines von ihnen geschlossen, das andere aber nicht, es sei denn in der Form (662), so gibt es keine geschlossene algebraische Gleichung, mit einem Worte, irrationale particuläre Integrale treten entweder beide geschlossen auf, oder keines; rationale hingegen können entweder beide, oder auch nur eines von ihnen, oder endlich gar keines in geschlossener Form auftreten.

Diese Bemerkungen vermögen in passender Weise auch auf Differentialgleichungen von höheren Ordnungen ausgedehnt zu werden. Man kann nämlich sagen: Eine bestehende algebraische Gleichung, die mehrere oder alle Functionen φ, welche irrational in den particulären Integralen vorkommen, zu Wurzeln hat, schliesst in der allgemeinen Integralformel ebenso viele unbestimmte Integralzeichen aus, als solcher irrationaler Wurzeln vorhanden sind, und man sieht hieraus klar, dass, in wel-

cher Form man sich auch immer das allgemeine Integral gegeben denken mag, doch g
algebraische Ausdrücke in denselben zu den Seltenheiten gehören, und dass die in der Reg
vorkommenden Formen zwar Functionen der ersten Classe seien, jedoch solche, die absteig
Form von einer unendlichen Reihe wiedergegeben werden können. Von dieser Beschaffenheit
hin auch in der Regel die mit R, S, U bezeichneten Functionen von x, während dem
die aus ihnen zusammengesetzten Coefficienten der Differentialgleichung rationale und geschlo
drücke sein können, was sich auch ohne Mühe in einer Fülle specieller Beispiele nachweise

§. 13.

Ermittlung der algebraischen Gleichung für noch einige Fälle der Differentialgleic zweiten Ordnung.

Unter allen Differentialgleichungen sind die der zweiten Ordnung für den Ana
wichtigsten, theils wegen ihres sehr häufigen Vorkommens, theils auch darum, weil sich
andere, z. B. alle mit quadratischen Coefficienten versehenen, was auch ihre Ordnungszahl
darauf zurückführen lassen, indem stets eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung die
chung einer anderen mit quadratischen Coefficienten ist. Die Integration der Hilfsgleichung r
mit oder ohne vorgängiger Transformation am liebsten in dem Falle vor, wenn in ihr betr
Ansteigungen in den zwei Coefficientenpaaren zu ersehen sind. Sehr oft, ja meistentheils e
schon aus der Beschaffenheit der Repartitionszahlen das nothwendige Vorhandensein von Irr
sen im Integrale dieser Hilfsgleichung und findet sich dadurch zu der Frage veranlasst, c
geschlossene algebraische Gleichung bestehe, die der Differentialen zu Grunde liegt, vielle
die andere Frage nach der geschlossenen Beschaffenheit eines der particulären Integrale
unmittelbar durch die unzweifelhaften Spuren der Irrationalgrössen oder nach versuchter
Integration verneinend entschieden hat. Es wird mithin von Nutzen sein, das Aufsuchen
schen Gleichung wenigstens bei solchen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung n
men, welche Ansteigungen in ihren Coefficienten bieten. Wir wenden uns zuvörderst z
mit der Ansteigungszahl Eins:

$$\begin{aligned}(672)\quad &[a_2x^m + b_2x^{m-1} + c_2x^{m-2} + d_2x^{m-3} + \ldots\ldots]\,y'' + [a_1x^{m+1} + b_1x^m + c_1x^{m-1} + d_1 \\ &\qquad + [a_0x^{m+2} + b_0x^{m+1} + c_0x^m + d_0x^{m-1} + \ldots\ldots]\,y = 0.\end{aligned}$$

Wir setzen nun beide Integrale in der Form: $e^{\int \varphi dx}$ voraus und nehmen an, dass
zeln seien der folgenden algebraischen Gleichung mit derselben Ansteigungszahl Ei

$$\begin{aligned}(673)\quad &[A_2x^p + B_2x^{p-1} + C_2x^{p-2} + D_2x^{p-3} + \ldots\ldots]\,\varphi^2 + [A_1x^{p+1} + B_1x^p + C_1x^{p-1} + D \\ &\qquad + [A_0x^{p+2} + B_0x^{p+1} + C_0x^p + D_0x^{p-1} + \ldots\ldots] = 0.\end{aligned}$$

Die Substitution des oben erwähnten Werthes von φ in die Differentialgleichung liefert nun eine zweite Bestimmungsgleichung für die Function φ, nämlich die folgende:

$$
\begin{aligned}
[a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + d_2 x^{m-3} + \ldots\ldots](\varphi^2 + \varphi') + [a_1 x^{m+1} + b_1 x^m + c_1 x^{m-1} + d_1 x^{m-2} + \ldots\ldots]\varphi + \\
+ a_0 x^{m+2} + b_0 x^{m+1} + c_0 x^m + d_0 x^{m-1} + \ldots\ldots = 0
\end{aligned} \tag{674}
$$

und es muss jetzt diesen beiden durch jeden der zwei Werthe von φ, gegeben in absteigender Reihenform, Genüge geleistet werden. Sie müssen daher auch und zwar alle beide dieselben zwei ihnen abverlangten Reihenentwicklungen von φ liefern. Wir wissen nun, dass in Folge der vorausgesetzten Beschaffenheit der Coefficienten jedem φ die Gradzahl Eins zukomme, d. h. die absteigende Reihenentwickung des φ fängt mit der ersten Potenz von x an. Es ist mithin:

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \alpha x + \beta + \gamma x^{-1} + \delta x^{-2} + \varepsilon x^{-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi^2 &= \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta + (2\alpha\gamma + \beta^2)\, x^{-1} + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)\, x^{-2} + \ldots\ldots \\
\varphi' &= \alpha - \gamma x^{-2} - 2\delta x^{-3} - 3\varepsilon x^{-4} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{675}
$$

Da sich die beiden Gleichungen in φ nur durch den Zusatz eines einzigen Gliedes, des mit dem Factor φ' verbundenen nämlich, in der Form von einander unterscheiden; da ferner φ' um volle zwei Einheiten in der Gradzahl niedriger ist, als φ^2, mithin in der Reihenentwicklung des Gleichungspolynomes erst auf das dritte Glied Einfluss nehmen kann, so unterscheiden sich die beiden absteigend entwickelten Gleichungspolynome in den ersten zwei Gliedern nur dadurch, dass hier kleine, dort aber die gleichbenannten grossen Buchstaben in den Coefficienten vorkommen. Diese zwei Anfangsglieder der Entwicklung werden daher völlig identisch, wenn man willkürlich:

$$
\begin{aligned}
A_2 = a_2\,,\quad A_1 = a_1\,,\quad A_0 = a_0 \\
B_2 = b_2\,,\quad B_1 = b_1\,,\quad B_0 = b_0
\end{aligned} \tag{676}
$$

annimmt. Mithin geben sie, der Nulle gleich gesetzt, auch einerlei Glieder des φ. Wir hätten also hier gerade so, wie in dem Falle gleich hoher Coefficienten, den der vorhergehende Paragraph behandelt hat, zwei Coefficientenschichten, die der Differential- und der algebraischen Gleichung gemeinschaftlich vorausgesetzt werden können, aber nicht müssen. Stellen wir nun, die Coefficienten der einzelnen Potenzen der absteigenden Reihenentwicklung je der Nulle gleichsetzend, die so erhaltenen Bestimmungsgleichungen paarweise zusammen. Sie sind:

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha^2 A_2 + \alpha A_1 + A_0 \\
0 &= \alpha^2 a_2 + \alpha a_1 + a_0
\end{aligned} \tag{677}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha^2 B_2 + \alpha B_1 + B_0 + 2\alpha\beta A_2 + \beta A_1 \\
0 &= \alpha^2 b_2 + \alpha b_1 + b_0 + 2\alpha\beta a_2 + \beta a_1
\end{aligned} \tag{678}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha^2 C_2 + \alpha C_1 + C_0 + 2\alpha\beta B_2 + \beta B_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2)\, A_2 + \gamma A_1 \\
0 &= \alpha^2 c_2 + \alpha c_1 + c_0 + 2\alpha\beta b_2 + \beta b_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2)\, a_2 + \gamma a + \alpha a_2
\end{aligned} \tag{679}
$$

$$
(680)\quad \begin{aligned} 0 &= \alpha^2 D_2 + \alpha D_1 + D_0 + 2\alpha\beta C_2 + \beta C_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2) B_2 + \gamma B_1 + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma) A_2 + \delta A_1 \\ 0 &= \alpha^2 d_2 + \alpha d_1 + d_0 + 2\alpha\beta c_2 + \beta c_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2) b_2 + \gamma b_1 + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma) a_2 + \delta a_1 + \alpha b_2 \end{aligned}
$$

$$
(681)\quad \begin{aligned} 0 &= \alpha^2 E_2 + \alpha E_1 + E_0 + 2\alpha\beta D_2 + \beta D_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2) C_2 + \gamma C_1 + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma) B_2 + \delta B_1 + \\ &+ (2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma^2) A_2 + \varepsilon A_1 \\ 0 &= \alpha^2 e_2 + \alpha e_1 + e_0 + 2\alpha\beta d_2 + \beta d_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2) c_2 + \gamma c_1 + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma) b_2 + \delta b_1 + \\ &+ (2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma^2) a_2 + \varepsilon a_1 + \alpha c_2 - \gamma a_2 \end{aligned}
$$

. . . .

Dem ersten Paare entnehmen wir denselben Doppelwerth für α, wenn:

$$
(682)\qquad A_2 = a_2\,,\quad A_1 = a_1\,,\quad A_0 = 0
$$

ist. Ist nun dieser Doppelwerth ein sehr einfacher, etwa monomischer, was z. B. dann stattfindet, wenn die Gleichung in α wie:

$$
\alpha^2 - k^2 = 0
$$

aussieht, oder wie:

$$
\alpha^2 - k\alpha = 0
$$

dann ist es gerathen, auf folgende Weise vorzugehen: Man subtrahirt das zweite Paar von Bestimmungsgleichungen von einander und erhält:

$$
(683)\qquad \alpha^2 (B_2 - b_2) + \alpha (B_1 - b_1) + B_0 - b_0 = 0.
$$

Hier setzt man anstatt α erst den ersten, dann den zweiten seiner Werthe und erhält dadurch zwei Gleichungen, welche B_1 und B_0 in Function des unbestimmt bleibenden B_2 liefern werden. Ueberdiess wird noch die zweite dieser beiden Gleichungen, aufgelöst nach β, den zwei verschiedenen α entsprechend, auch zwei β liefern, die in der Regel ebenfalls als einfache Ausdrücke dastehen werden, wenn die beiden α solche erlangen. Mit den gefundenen zwei Paaren von Werthen für α und β und den ermittelten zwei Coefficientenschichten sammt dem zur Verwendung stehenden B_2 wenden wir uns dann zu dem dritten Paare von Bestimmungsgleichungen, die wir genau auf dieselbe Weise behandeln, um daraus zuvörderst C_1 und C_0 in Function der einstweilen noch unbestimmt bleibenden B_2 und C_2 abzuleiten, dann aber noch einen Doppelwerth für γ zu gewinnen u. s. w. Die so allmählig in die Gleichungen fallenden unbestimmten Constanten B_2, C_2, D_2, ... können dann dazu verwendet werden, die späteren Coefficientenschichten der allmählig sich zusammenstellenden algebraischen Gleichung zum Verschwinden zu bringen.

Sind jedoch die Werthe von α und in Folge dessen auch die von β, γ, ... irrational, so kann die Substitution solcher Irrationalgrössen eine lästige werden und man könnte es vorziehen, den folgenden Weg der Rechnung einzuschlagen, der die irrationalen Substitutionen gänzlich vermeidet: Man eliminirt aus der durch Subtraction gewonnenen (683) vermittelst der $a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$ das

α^2. Sie verwandelt sich dadurch in eine Gleichung des ersten Grades nach α und soll doch durch einen Doppelwerth dieser Grösse identisch werden. Diess kann offenbar nicht anders sein, als wenn sie überhaupt für jedes α identisch wird. Man ist mithin berechtigt, den Coefficienten von α in derselben für sich und die übrigen Glieder gleichfalls für sich der Nulle gleichzusetzen. Das Ergebniss hievon sind zwei Gleichungen, denen man:

$$\begin{aligned} B_1 &= b_1 + \frac{a_1}{a_2}(B_2 - b_2) \\ B_0 &= b_0 + \frac{a_0}{a_2}(B_2 - b_2) \end{aligned} \tag{684}$$

entringt.

Hiezu gibt nun die zweite der Bestimmungsgleichungen (678) einen Werth von β zunächst in folgender Gestalt:

$$\beta = -\frac{\alpha^2 b_2 + \alpha b_1 + b_0}{2\alpha a_2 + a_1}. \tag{685}$$

Um auch hier die beiden irrationalen Substitutionen für α bei der Berechnung des Doppelwerthes von β zu vermeiden, oder mindestens zu erleichtern, suchen wir erst den Nenner von allen α, dann aber den Zähler von allen höheren Potenzen dieser Irrationalgrösse, bis auf die erste zu befreien. Hiezu dient wieder, wie im vorhergehenden Paragraphe die Multiplication von Zähler und Nenner mit dem Binome $2\alpha a_2 + a_1$ und nachherige Elimination, durch welche

$$\beta = \frac{1}{a_2 A}\left[\mathrm{B}_1\alpha + \mathrm{B}_0\right] \tag{686}$$

erzielt wird, allwo:

$$\begin{aligned} A &= 4a_0a_2 - a_1^2 . \\ \mathrm{B}_1 &= a_1^2 b_2 - a_1a_2b_1 - 2a_0a_2b_2 + 2a_2^2 b_0 \\ \mathrm{B}_0 &= a_0a_1b_2 - 2a_0a_2b_1 + a_1a_2b_0 \end{aligned} \tag{687}$$

ist.

Jetzt kömmt das dritte Paar von Bestimmungsgleichungen zur Bestimmung der dritten Coefficientenschichte und des γ an die Reihe. Sie liefern von einander subtrahirt:

$$0 = \alpha^2(C_2 - c_2) + \alpha(C_1 - c_1) + C_0 - c_0 + 2\alpha\beta(B_2 - b_2) + \beta(B_1 - b_1) - \alpha a_2 \tag{688}$$

und hieraus geht durch Substitution des gewonnenen Werthes von β, B_1, Elimination von α^2 und Zerfällen in zwei identische Gleichungen:

$$\begin{aligned} C_1 &= c_1 + \frac{a_1}{a_2}(C_2 - c_2) + \frac{a_1\mathrm{B}_1 - 2a_2\mathrm{B}_0}{a_2^2 A}(B_2 - b_2) + a_2 \\ C_0 &= c_0 + \frac{a_0}{a_2}(C_2 - c_2) + \frac{2a_0\mathrm{B}_1 - a_1\mathrm{B}_0}{a_2^2 A}(B_2 - b_2) \end{aligned} \tag{689}$$

hervor. Der aus der zweiten dieser Bestimmungsgleichungen auf ähnliche Weise, wie bei β g
nene Werth von γ aber ist:

$$\gamma = \frac{1}{a_2^2 A^2} [\Gamma_1 \alpha + \Gamma_0] \tag{690}$$

allwo:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= a_2 a_1^2 c_2 A^2 + a_1^2 \mathrm{B}_1^2 + 2a_1^2 b_2 A\mathrm{B}_1 - 2a_0 a_2^2 c_2 A^2 - 2a_0 a_2 \mathrm{B}_1^2 - 4a_0 a_2 b_2 A\mathrm{B}_1 - a_2^2 a_1 c_1 A^2 - 2a_1 a \\ &\quad - a_1 a_2 b_1 A\mathrm{B}_1 - 2a_1 a_2 b_2 A\mathrm{B}_0 + 2a_2^2 c_0 A^2 + 2a_2^2 \mathrm{B}_0^2 + 2a_2^2 b_1 A\mathrm{B}_0 - a_1 a_2^2 A^2 \\ \Gamma_0 &= a_0 a_1 a_2 c_2 A^2 + a_0 a_1 \mathrm{B}_1^2 + 2a_0 a_1 b_2 A\mathrm{B}_1 - 2a_0 a_2^2 c_1 A^2 - 4a_0 a_2 \mathrm{B}_0 \mathrm{B}_1 - 2a_0 a_2 b_1 A\mathrm{B}_1 - 4a_0 a_2 b_2 A \\ &\quad + a_1 a_2^2 c_0 A^2 + a_1 a_2 \mathrm{B}_0^2 + a_1 a_2 b_1 A\mathrm{B}_0 - 2a_0 a_2^2 A^2 \end{aligned} \tag{691}$$

ist.

Genau auf dieselbe Weise gelangt man nun auch zur folgenden vierten Coefficientenschichte. Sie

$$\begin{aligned} D_1 &= d_1 + \frac{a_1}{a_2}(D_2 - d_2) + \frac{a_1 \mathrm{B}_1 - 2a_2 \mathrm{B}_0}{a_2^2 A}(C_2 - c_2) + \\ &\quad + \frac{a_1 \Gamma_1 - 2a_2 \Gamma_0}{a_2^2 A^2}(B_2 - b_2) + b_2 - \frac{\mathrm{B}_1}{A} \\ D_0 &= d_0 + \frac{a_0}{a_2}(D_2 - d_2) + \frac{2a_0 \mathrm{B}_1 - a_1 \mathrm{B}_0}{a_2^2 A}(C_2 - c_2) + \\ &\quad + \frac{2a_0 \Gamma_1 - a_1 \Gamma_0 + a_0 A\mathrm{B}_1^2 - a_1 A\mathrm{B}_0 \mathrm{B}_1 + a_2 A\mathrm{B}_0^2}{a_2^2 A^2}(B_2 - b_2) - \end{aligned} \tag{692}$$

Die Rechnung kann nach Belieben fortgesetzt werden. Da indess die Ausdrücke immer compl
werden und da auch eine algebraische Gleichung mit sehr vielen Coefficientenschichten kaum
Vortheil bieten dürfte bei der Erörterung der Eigenschaften des particulären Integrales, so wir
sich in der Regel mit den gethanenen Schritten begnügen und die Rechnung beendigen mit der U
suchung, ob und unter welchen Umständen, d. h. bei welchen Werthen der bisher willkürlich
senen B_2, C_2, D_2 und der Parameter der Differentialgleichung die geschlossene Form der Alg
schen eintrete. Hiezu dient nun wieder die (68) Seite 194 der Formenlehre, die der Algebraisch

$$L\varphi^2 + M\varphi + N = 0$$

entspricht. Man kann zwar dasselbe auch auf eine andere Weise leisten, wie in der Folge zur Sp
kommen soll, allein in den meisten Fällen dürfte doch die erwähnte Algebraische, wenn man sie
liegen hat, einigen Vortheil bieten, weil oft schon der berechnete erste Coefficient die Frage,
auch nur in negativer Weise beantwortet.

Gehen wir jetzt über zu einer Differentialgleichung mit der Ansteigungszahl 2 der C
cienten. Sie sei:

$$\begin{aligned} &[a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + d_2 x^{m-3} + \ldots\ldots] y'' + [a_1 x^{m+2} + b_1 x^{m+1} + c_1 x^m + \ldots\ldots] \\ &\quad + [a_0 x^{m+4} + b_0 x^{m+3} + c_0 x^{m+2} + d_0 x^{m+1} + \ldots\ldots] y = 0. \end{aligned} \tag{693}$$

Die ihr entsprechende Algebraische und diejenige, welche durch die Substitution $y = e^{\int \varphi a x}$ aus ihr gewonnen wird, sind:

$$[A_2 x^p + B_2 x^{p-1} + C_2 x^{p-2} + D_2 x^{p-3} + \ldots\ldots]\varphi^2 + [A_1 x^{p+2} + B_1 x^{p+1} + C_1 x^p + D_1 x^{p-1} + \ldots\ldots]\varphi + \\ + [A_0 x^{p+4} + B_0 x^{p+3} + C_0 x^{p+2} + D_0 x^{p+1} + \ldots\ldots] = 0 \tag{694}$$

$$[a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + d_2 x^{m-3} + \ldots\ldots](\varphi^2 + \varphi') + [a_1 x^{m+2} + b_1 x^{m+1} + c_1 x^m + d_1 x^{m-1} + \ldots\ldots]\varphi + \\ + [a_0 x^{m+4} + b_0 x^{m+3} + c_0 x^{m+2} + d_0 x^{m+1} + \ldots\ldots] = 0$$

endlich hat man ein der Gradzahl 2 angehöriges φ, also:

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma + \delta x^{-1} + \varepsilon x^{-2} + \ldots\ldots \\ \varphi^2 &= \alpha^2 x^4 + 2\alpha\beta x^3 + (2\alpha\gamma + \beta^2)\, x^2 + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)\, x + (2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma^2) + \ldots\ldots \\ \varphi^1 &= 2\alpha x + \beta - \delta x^{-2} - 2\varepsilon x^{-3} - 3\eta x^{-4} - \ldots\ldots \end{aligned} \tag{695}$$

Besorgt man nun die absteigende Entwicklung der Gleichungspolynome, so kann offenbar φ', weil es um drei Einheiten niedriger ist, als φ^2, nur auf das vierte Glied dieser Entwicklung Einfluss nehmen, daher man, da sich die Gleichungspolynome nur durch den Zusatz φ' von einander unterscheiden, drei Coefficientenschichten der Differentialgleichung und der Algebraischen gemeinschaftlich annehmen kann, aber nicht muss. Das Nullsetzen der Coefficienten der beiden absteigenden Entwicklungen liefert nun folgende Paare von Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} &\alpha^2 A_2 + \alpha A_1 + A_0 = 0 \\ &\alpha^2 a_2 + \alpha a_1 + a_0 = 0 \end{aligned} \tag{696}$$

$$\begin{aligned} &\alpha^2 B_2 + \alpha B_1 + B_0 + 2\alpha\beta A_2 + \beta A_1 = 0 \\ &\alpha^2 b_2 + \alpha b_1 + b_0 + 2\alpha\beta a_2 + \beta a_1 = 0 \end{aligned} \tag{697}$$

$$\begin{aligned} &\alpha^2 C_2 + \alpha C_1 + C_0 + 2\alpha\beta B_2 + \beta B_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2)\, A_2 + \gamma A_1 = 0 \\ &\alpha^2 c_2 + \alpha c_1 + c_0 + 2\alpha\beta b_2 + \beta b_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2)\, a_2 + \gamma a_1 = 0 \\ &\alpha^2 D_2 + \alpha D_1 + D_0 + 2\alpha\beta C_2 + \beta C_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2)\, B_2 + \gamma B_1 + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)\, A_2 + \delta A_1 = 0 \\ &\alpha^2 d_2 + \alpha d_1 + d_0 + 2\alpha\beta c_2 + \beta c_1 + (2\alpha\gamma + \beta^2)\, b_2 + \gamma b_1 + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)\, a_2 + \delta a_1 + 2a_2\alpha = 0. \end{aligned} \tag{698}$$

Aus ihnen lassen sich die folgenden Werthe der successiven Coefficientenschichten und zugleich der Constanten: β, γ, δ, ... in Function des zweiwerthigen α genau durch denselben Eliminationsprozess, wie in den früher der Betrachtung unterworfenen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung ableiten. Sie sind der Reihe nach:

$$\begin{gathered} A_2 = a_2\,,\quad A_1 = a_1\,,\quad A_0 = a_0 \\ \alpha = \frac{1}{2a_2}\left(-\, a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}\right) \\ B_1 = b_1 + \frac{a_1}{a_2}(B_2 - b_2)\,,\quad B_0 = b_0 + \frac{a_0}{a_2}(B_2 - b_2) \\ \beta = \frac{1}{a_2 A}\left[B_1\alpha + B_0\right] \end{gathered} \tag{699}$$

$$A = -a_1^2 + 4a_0a_2\,,\quad \mathrm{B}_1 = a_1^2b_2 - 2a_0a_2b_2 - a_1a_2b_1 + 2a_2^2b_0\,,\quad \mathrm{B}_0 = a_0a_1b_2 - 2a_0a_2b_1 + a_1a_2b_0$$

$$C_1 = c_1 + \frac{a_1}{a_2}(C_2 - c_2) + \frac{a_1\mathrm{B}_1 - 2a_2\mathrm{B}_0}{a_2^2A}(B_2 - b_2)$$

$$C_0 = c_0 + \frac{a_0}{a_2}(C_2 - c_2) + \frac{2a_0\mathrm{B}_1 - a_1\mathrm{B}_0}{a_2^2A}(B_2 - b_2)$$

$$\gamma = \frac{1}{a_2^2A^2}[\Gamma_1\alpha + \Gamma_0]$$

$$\Gamma_1 = a_1^2a_2c_2A^2 + a_1^2\mathrm{B}_1^2 + 2a_1^2b_2A\mathrm{B}_1 - 2a_0a_2^2c_2A^2 - 2a_0a_2\mathrm{B}_1^2 - 4a_0a_2b_2A\mathrm{B}_1 - a_1a_2^2c_1A^2 -$$
$$- 2a_1a_2\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1 - a_1a_2b_1A\mathrm{B}_1 - 2a_1a_2b_2A\mathrm{B}_0 + 2a_2^2c_0A^2 + 2a_2^2\mathrm{B}_0^2 + 2a_2^2b_1A\mathrm{B}_0$$

$$\Gamma_0 = a_0a_1a_2c_2A^2 + a_0a_1\mathrm{B}_1^2 + 2a_0a_1b_2A\mathrm{B}_1 - 2a_0a_2^2c_1A^2 - 4a_0a_2\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1 - 2a_0a_2b_1A\mathrm{B}_1 - 4a_0a_2b_2A\mathrm{B}_0 +$$
$$+ a_1a_2^2c_0A^2 + a_1a_2\mathrm{B}_0^2 + a_1a_2b_1A\mathrm{B}_0$$

$$D_1 = d_1 + \frac{a_1}{a_2}(D_2 - d_2) + \frac{a_1\mathrm{B}_1 - 2a_2\mathrm{B}_0}{a_2^2A}(C_2 - c_2) + \frac{a_1\Gamma_1 - 2a_2\Gamma_0}{a_2^2A^2}(B_2 - b_2) + 2a_2$$

$$D_0 = d_0 + \frac{a_0}{a_2}(D_2 - d_2) + \frac{2a_0\mathrm{B}_1 - a_1\mathrm{B}_0}{a_2^2A}(C_2 - c_2) +$$
$$+ \frac{1}{a_2^2A^2}[2a_0\Gamma_1 - a_1\Gamma_0 + a_0A\mathrm{B}_1^2 - a_1A\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1 + a_2A\mathrm{B}_0^2](B_2 - b_2)$$

Es ist nicht immer nothwendig, von diesen Formeln Gebrauch zu machen, die auf einem Wege erhal
ten worden sind, um die irrationalen Substitutionen zu vermeiden. Oft sind nämlich die beiden Werth
von α rational, und in einem solchen Falle ist die directe Substitution dieser rationalen Werthe de
Eliminationsprozesse vorzuziehen. Diess geschieht unter anderen in dem folgenden Beispiele:

$$(700)\quad x(x^2 - 3a^2)y'' + [2x^5 - 8a^2x^3 - 2x^2 + 6a^4x + 3a^2]y' + [a^2x^6 - 2a^4x^4 - a^2x^2 - 3a^2x - 3a^4]y = 0$$

Die Berechtigung, nach einer algebraischen Gleichung zu forschen, ist hier im Coefficientenbaue wahr
zunehmen, dem Factor nämlich x des ersten Coefficienten entspricht ein Exponent $k = -1$, den be
den übrigen, nämlich $x = +a\sqrt{3}$ und $x = -a\sqrt{3}$ entspricht ein $k = -\frac{3}{2}$. Es ist daher nicht nu
wahrscheinlich, dass dieser Differentialgleichung eine algebraische entspricht, sondern es steht auch z
vermuthen, dass der erste Coefficient dieser letzteren weder den Factor x, noch den Factor $x^2 - 3a$
besitzen werde, d. h. er wird eine reine Constante sein. Ist mithin die algebraische Gleichung i
geschlossener Form vorhanden, so ist der zweite und dritte Coefficient quadratisch; man hat mithi
schon nach drei berechneten Coefficientenschichten bei der Berechnung der vierten die gerechte Ve
anlassung, nach dem etwaigen Abbrechen zu fragen, wenn man nämlich, die höchste Polygonseite z
Grunde legend, die Gleichung betrachtet als eine mit im Niveau stehenden Coefficienten. Sieht man s
hingegen als eine mit der Ansteigungszahl 2 versehene an, so wird man volle fünf Coefficientenschich
ten zu berechnen haben, und das Abbrechen erst bei der sechsten erwarten. Drei dieser Schichte
lassen sich den beiden Gleichungen gemeinschaftlich voraussetzen. Man zieht also aus den ersten dr
Paaren von Bestimmungsgleichungen die folgenden Werthe:

$$A_2 = 1\,,\quad A_1 = 2\,,\quad A_0 = 0$$

und entweder $\alpha = -2$ oder $\alpha = 0$

$$B_1 = 2B_2\,,\quad B_0 = 0$$

und $\beta = 0$

$$C_1 = 2C_2 - 2a^2\,;\quad C_0 = a^2$$

und entweder

$$\gamma = \frac{5a^2}{2} \quad \text{oder} \quad \gamma = -\frac{a^2}{2}$$

Hier kann man gleich die Bemerkung machen, dass wenn, wie vermuthet, der erste Coefficient der algebraischen eine reine Constante ist, $B_2 = C_2 = D_2 = 0$ ausfallen müssen. Dem widersprechen die gewonnenen Werthe nicht, nur muss dann $C_1 = -2a^2$ sein. Nun liefert das vierte Paar von Bestimmungsgleichungen:

$$D_1 = 2D_2 - 2a^2B_2\,,\quad D_0 = a^2B_2$$

und

$$\delta = 0.$$

Aus dem fünften Paare endlich ziehen wir:

$$E_1 = 2E_2 - 2a^2C_2\quad E_0 = a^2C_2 + a^4$$

und entweder

$$\varepsilon = +\frac{9a^4}{8} \quad \text{oder} \quad \varepsilon = -\frac{9a^4}{8}.$$

Es kann also nicht nur $D_2 = 0$ sondern auch $E_2 = 0$ angenommen werden, ohne dass daraus entweder ein Widerspruch oder irgend ein specieller Werth des Parameters a hervorginge. Ist mithin die algebraische Gleichung geschlossen, so hätten wir bereits alle Coefficientenschichten derselben. Sie wird nämlich so aussehen:

$$\varphi^2 + 2\,(x^2 - a^2)\,\varphi + a^2\,(x^2 + a^2) = 0 \tag{701}$$

und in der That, wenn man jetzt die Differentialgleichung construirt, welche dieser algebraischen angehört, zu diesem Zwecke abermals die (68) Seite 194 des ersten Bandes in Anwendung bringend, so gelangt man zu der gegebenen (700) zurück.

§. 14.

Integration einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung vermittelst einer algebraischen.

Nachdem wir in mehreren allgemeineren und specielleren Beispielen die Methode der Auffindung der algebraischen Gleichung, die zu einer gegebenen differentialen gehörig ist, durchgemacht haben, fällt es nicht schwer, dieselbe auch allgemein in Bezug auf eine beliebige Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung mit wie immer gestalteten Coefficienten auszudehnen. Freilich ist hier zu bemerken,

dass die Rechnungen, in die man sich verwickelt sieht, der Natur der Sache nach mit denjenige übereinstimmen müssen, die sich in der Formenlehre S. 10 bis S. 14 vorfinden und die Auffindung d Differentialgleichung, die einer algebraischen angehört, zum Zwecke haben, und ihrer Ausdehnur halber sehr bald undurchführbar werden. Da es aber demungeachtet Fälle gibt, in welchen ein solch Calcul nicht nur durchführbar, sondern sogar leicht und schnell durchführbar ist, so wird es fromme die allgemeine Methode mindestens in ihren Grundzügen hier auseinander zu setzen. Wir machen hieb der Kürze wegen Gebrauch von der oft in Anwendung gebrachten symbolischen Schreibweise d Polynome in Summengestalt und nehmen an, in der vorgelegten Differentialgleichung seien durchwe Ansteigungen vorhanden von r Einheiten auf das Coefficientenpaar, unter r eine ganze positive Za verstanden, da wir wissen, dass sich gebrochene Ansteigungszahlen durch eine passende Transfo mation in ganze verwandeln lassen, und dass man von der Voraussetzung einer gemeinsamen A steigungszahl r zu jener verschiedener solcher Repartitionszahlen durch Nullsetzen gewisser Anfang glieder der Coefficienten sehr leicht den Weg findet. Es ist in der Regel von einigem Vortheile, d grösste Ansteigungszahl, die der ersten Polygonseite entspricht, besonders wenn sie eine ganze i für r zu erkiesen. Die Gleichung sei:

$$\mathbf{S}\left[\mathfrak{X}_\alpha y^{(\alpha)}\right] = 0 \qquad \alpha + \omega = n \tag{702}$$

mit den Coefficientenwerthen:

$$\mathfrak{X}_n = [n, m]\, x^m + [n, m-1]\, x^{m-1} + \ldots\ldots + [n, 0] \quad = \mathbf{S}\left[[n, \theta]\, x^\theta\right] \qquad \theta + \tau = m$$

$$\mathfrak{X}_{n-1} = [n-1, m+r]\, x^{m+r} [n-1, m+r-1]\, x^{m+r-1} + \ldots\ldots + [n-1, 0] = \mathbf{S}\left[[n-1, \theta]\, x\right. \qquad \theta + \tau = m +$$

$$\mathfrak{X}_{n-2} = [n-2, m+2r]\, x^{m+2r} [n-2, m+2r-1]\, x^{m+2r-1} + \ldots\ldots + [n-2, 0] = \mathbf{S}\left[[n-2, \theta]\, x\right. \qquad \theta + \tau = m + \tag{703}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{X}_\alpha = [\alpha, m+(n-\alpha)r]\, x^{m+(n-\alpha)r} [\alpha, m+(n-\alpha)r-1]\, x^{m+(n-\alpha)r-1} + \ldots + [\alpha, 0] \quad = \mathbf{S}\left[[\alpha, \theta]\, x^\theta\right] \qquad \theta + \tau = m + (n-\alpha$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{X}_0 = [0, m+nr]\, x^{m+nr} + [0, m+nr-1]\, x^{m+nr-1} + \ldots\ldots + [0, 0] \quad = \mathbf{S}\left[[0, \theta]\, x^\theta\right] \qquad \theta + \tau = m + nr$$

Da die dieser Differentialgleichung entsprechende Algebraische denselben Coefficientenbau mit alleinig Ausnahme jener Stellen des Polygones, die Abfälle bieten von Einer Einheit oder mehr als Einer Ei heit in der Gradzahl auf das Paar, besitzen muss, so können wir annehmen, dass diese Algebraisc der Form nach

$$\mathbf{S}\left[\mathbf{X}_\alpha \phi^{(\alpha)}\right] = 0 \qquad \alpha + \omega = n \tag{704}$$

sei, allwo

$$\begin{array}{ll}
X_n = (n,p)x^p + (n,p-1)x^{p-1} + \ldots\ldots + (n,0) & = S[(n,\theta)x^\theta] \\
& \quad \theta + \tau = p \\
X_{n-1} = (n-1,p+r)x^{p+r} + (n-1,p+r-1)x^{p+r-1} + \ldots\ldots + (n-1,0) & = S[(n-1,\theta)x^\theta] \\
& \quad \theta + \tau = p + r \\
X_{n-2} = (n-2,p+2r)x^{p+2r} + (n-2,p+2r-1)x^{p+2r-1} + \ldots + (n-2,0) & = S[(n-2,\theta)x^\theta] \\
& \quad \theta + \tau = p + 2r \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
X_\alpha = (\alpha,p+(n-\alpha)r)x^{p+(n-\alpha)r} + (\alpha,p+(n-\alpha)r-1)x^{p+(n-\alpha)r-1} + \ldots + (\alpha,0) & = S[(\alpha,\theta)x^\theta] \\
& \quad \theta + \tau = p + (n-\alpha)r \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
X_0 = (0,p+nr)x^{p+nr} + (0,p+nr-1)x^{p+nr-1} + \ldots\ldots + (0,0) & = S[(0,\theta)x^\theta] \\
& \quad \theta + \tau = p + nr
\end{array} \tag{705}$$

Man bewerkstellige jetzt die Substitution:

$$y = e^{\int \varphi dx} \tag{706}$$

in die Differentialgleichung. Ihr Resultat in Summengestalt ist unter (323) Seite 168 des II. Bandes bereits gegeben. Es ist nämlich das dort ausgedrückte $\mathfrak{X}$. Man hat mithin:

$$\mathfrak{X} = S\left[\frac{1}{\gamma!\delta!\ldots\ldots}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^\gamma\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^\delta\ldots\ldots\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}}\right] = 0 \tag{707}$$
$$\beta + 2\gamma + \ldots\ldots = n$$

Unter Q ist hier das Polynom verstanden, welches man aus demjenigen der Differentialgleichung erhält, die Differentialquotienten von y durch die gleichnamigen Potenzen von φ ersetzend, d. h. es ist:

$$Q = S[\mathfrak{X}_\alpha \varphi^\alpha] \tag{708}$$
$$\alpha + \omega = n$$

Die erste Frage, die hier entstehen kann, ist: Welche Anfangsglieder der Coefficienten können als den beiden Gleichungen, der algebraischen nämlich und der Differentialgleichung gemeinschaftlich angenommen werden. Um sie mit Leichtigkeit zu beantworten, wird es frommen, das Substitutionsresultat (707) in entwickelter Gestalt mindestens in ein Paar Anfangsgliedern hinzuzeichnen. Es ist:

$$Q + \frac{d^2Q}{d\varphi^2}\frac{\varphi'}{2!} + \frac{d^3Q}{d\varphi^3}\frac{\varphi''}{3!} + \ldots\ldots\ldots \tag{709}$$

Da nun die Function φ wegen der vorausgesetzten Ansteigung von r Einheiten nothwendig vom Grade r ist, so ist φ' vom Grade $r-1$; überdem ist offenbar $m+nr$ die Gradzahl des Q, ebenso $m+nr-2r$ die Gradzahl von $\frac{d^2Q}{d\varphi^2}$, mithin $m+nr-r-1$ die Gradzahl des zweiten Gliedes dieses Substitutionsresultates. Es gehören also volle $r+1$ Glieder in der absteigenden Entwicklung des Polynomes (707) lediglich dem Q an und nur auf das $(r+2)^{te}$ nehmen die Glieder von $\frac{d^2Q}{d\varphi^2}\frac{\varphi'}{2}$

Einfluss. Man kann also eben so viele Coefficientenschichten, d. h. deren $r+1$, der Differentialgleichung entnehmen und unmittelbar auf die Algebraische übertragen. Man muss diess aber nicht, denn es ist offenbar erlaubt, alle Coefficienten der Differentialgleichung mit einem beliebigen Polynome zu multipliziren und sodann anstatt der $r+1$ ersten Coefficientenschichten der Differentialgleichung die $r+1$ ersten Schichten des Produktes zu nehmen. Diese Regel ist nicht nur richtig, wenn r eine ganze positive Zahl ist, mit Ausnahme von $r=0$, in welchem einzigen Falle nicht $r+1=1$, sondern vielmehr zwei Coefficientenschichten gemeinschaftlich angenommen werden können, weil nämlich in diesem einzigen Falle φ' um zwei Einheiten niedriger ist, als φ; ja sie ist in gewisser Weise auch richtig, wenn r eine gebrochene positive Zahl bedeutet, nur muss dann die Regel auf folgende Weise formulirt werden: Der gemeinschaftlichen Coefficientenschichten sind so viele, als die nächste unter $r+1$ liegende ganze Zahl Einheiten in sich enthält. Wenn z. B. $r=\frac{3}{2}$ wäre, so hätte man der gemeinschaftlichen Coefficientenschichten zwei. Ist r zwischen 0 und 1 gelegen, so besteht immer nur eine einzige gemeinschaftliche Coefficientenschichte. Endlich für r unter der negativen Einheit ist gar keine mehr vorhanden.

Man kann sich die in den beiden Gleichungen gemeinschaftlichen Anfangsglieder der Coefficienten auch auf eine graphische Weise ermittelt denken und zwar denkt man sich zu diesem Behufe eine Zeichnung, aus $m+nr$ horizontalen Linien, die im gemeinsamen Abstande Eins von einander geführt werden und aus $n+1$ verticalen, in demselben Abstande Eins, bestehend. Die unterste Horizontale kann für Abscissen, die letzte Verticale zur Rechten für die Ordinatenaxe gelten. Zu jedem Durchschnittspunkte zweier solcher Linien gehört nur Ein Glied der Differentialgleichung insoferne, als die diesem Durchschnittspunkte entsprechende Abscisse die Ordnungszahl des Differentialquotienten erreicht, zu welchem dieses Glied gehörig ist, während die Ordinate dem Exponenten der Potenz von x gleichkömmt, mit welcher dieses Glied multiplizirt erscheint. Man denke sich also zu einem jeden Durchschnittspunkte das entsprechende Glied der Differentialgleichung hinzugeschrieben und gewisser Massen mit diesem Punkte identifizirt. Nun construire man ferner auf die bekannte Weise das den Coefficientenbau umspannende Polygon und schneide die einspringenden Winkel ab. Zu einer jeden Seite des so erhaltenen Polygons wird dann eine gewisse ganze oder gebrochene Repartitionszahl r gehören. Man ziehe nun zu einer jeden solchen Polygonseite in der Entfernung $r+1$, gemessen in der Richtung der Ordinatenaxe eine Parallele, so ergibt sich ein zweites Polygon mit zu jenen des ersten parallelen Seiten und es können alle Glieder, die über diesem zweiten Polygone liegen, als den beiden Gleichungen, der algebraischen nämlich und der differentialen gemeinschaftlich angesehen werden. Diese in geometrischer Sprache gegebene Regel gilt allgemein für jedes r mit der alleinigen Ausnahme: $r=0$, wo die Parallele zur höchsten Polygonseite mit im Niveau stehenden Coefficienten nicht im Abstande Eins, sondern im Abstande zwei gezogen werden muss.

Der dem r^{ten} Grade angehörige Werth von φ sei nun der folgende:

$$\varphi = [r]\, x^r + [r-1]\, x^{r-1} + [r-2]\, x^{r-2} + \ldots\ldots\ldots = S\,[[r-\rho]\, x^{r-\rho}] \tag{710}$$

und man denke sich, ihn in beide Gleichungen eingeführt, die Substitutionsresultate absteigend geordnet und die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x je für sich der Nulle gleichgesetzt; so ergeben sich Bestimmungsgleichungen, die, zu zweien und zweien zusammengestellt, zur Ermittlung der einzelnen Coefficientenschichten sowohl, wie auch der Bestandtheile von φ dienlich sind. Um ihnen eine möglichst einfache Gestalt zu verleihen, machen wir Gebrauch von den folgenden Bezeichnungen:

$$
\begin{array}{l}
[n,m][r]^n + [n-1,m+r][r]^{n-1} + [n-2,m+2r][r]^{n-2} + \ldots + [0,m+nr] = A_m \\
[n,m-1][r]^n + [n-1,m+r-1][r]^{n-1} + [n-2,m+2r-1][r]^{n-2} + \ldots + [0,m+nr-1] = A_{m-1} \\
[n,m-2][r]^n + [n-1,m+r-2][r]^{n-1} + [n-2,m+2r-2][r]^{n-2} + \ldots + [0,m+nr-2] = A_{m-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[n,\theta][r]^n + [n-1,\theta+r][r]^{n-1} + [n-2,\theta+2r][r]^{n-2} + \ldots + [0,\theta+nr] = A_\theta \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\tag{711}
$$

$$
\begin{array}{l}
(n,p)[r]^n + (n-1,p+r)[r]^{n-1} + (n-2,p+2r)[r]^{n-2} + \ldots + (0,p+nr) = \mathfrak{A}_p \\
(n,p-1)[r]^n + (n-1,p+r-1)[r]^{n-1} + (n-2,p+2r-1)[r]^{n-2} + \ldots + (0,p+nr-1) = \mathfrak{A}_{p-1} \\
(n,p-2)[r]^n + (n-1,p+r-2)[r]^{n-1} + (n-2,p+2r-2)[r]^{n-2} + \ldots + (0,p+nr-2) = \mathfrak{A}_{p-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n,\theta)[r]^n + (n-1,\theta+r)[r]^{n-1} + (n-2,\theta+2r)[r]^{n-2} + \ldots + (0,\theta+nr) = \mathfrak{A}_\theta \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\tag{712}
$$

Mit ihrer Hilfe gewinnen wir zuvörderst das erste der beiden Substitutionsresultate, das nämlich aus der Differentialgleichung hervorgehende in der bereits unter (369) Seite 187 des zweiten Bandes hingestellten Form, nämlich:

$$
\begin{array}{l}
0 = \mathrm{S}\left\{\dfrac{1}{2!^{\gamma}3!^{\delta}4!^{\varepsilon}\ldots\ldots\;\beta_2!\beta_3!\ldots\ldots\gamma_1!\gamma_2!\ldots\ldots\delta_1!\delta_2!\ldots\ldots\varepsilon_1!\varepsilon_2!\ldots\ldots} \times \right. \\
\quad \times\, r^{\gamma_1+\delta_1+\varepsilon_1+\ldots}\,(r-1)^{\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots}\,(r-2)^{\gamma_3+\delta_2+\delta_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots}\ldots\ldots \times \\
\quad \times\, [r]^{\gamma_1+\delta_1+\varepsilon_1+\ldots}\,[r-1]^{\beta_2+\gamma_2+\delta_2+\varepsilon_2+\ldots}\,[r-2]^{\beta_3+\gamma_3+\delta_3+\varepsilon_3+\ldots}\ldots\ldots \times \\
\quad \left. \times\, A_{m-\tau}^{(n-\beta+\sigma)}\,.\,x^{(r-1)\gamma_1+(r-2)(\gamma_2+\delta_1)+(r-3)(\gamma_3+\delta_2+\varepsilon_1)+\ldots\ldots+m+r\beta-\varkappa-\tau}\right\} \\
\qquad\qquad (\sigma = \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \ldots\ldots\ldots) \\
\qquad\qquad \beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + \ldots = n \\
\qquad\qquad \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + \ldots = \varkappa \\
\qquad\qquad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \ldots = \gamma \\
\qquad\qquad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \ldots = \delta \\
\qquad\qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \ldots = \varepsilon \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\tag{713}
$$

wogegen man sich das andere Substitutionsresultat, nämlich das aus der Algebraischen (704) hervorgehende, dadurch abgeleitet denken kann, dass man sämmtliche griechische Buchstaben γ, δ, ε, ...

die als Exponenten zu φ', φ'', φ''', ... gehören, sowohl mit, als auch ohne Stellenzeigern Null ersetzt und $0!$ gleich Eins annimmt; endlich A_m in $\mathfrak{A}_p$ umschreibt. Dieses letztere einfa Substitutionsresultat wird hiemit das folgende:

$$(714)\quad \begin{gathered} 0 = \mathbf{S}\left\{\frac{1}{\beta_2!\beta_3!\beta_4!\ldots\ldots}[r-1]^{\beta_2}[r-2]^{\beta_3}[r-3]^{\beta_4}\ldots\ldots\mathfrak{A}^{(\sigma)}_{p-\tau}\,x^{p+rn-\varkappa-\tau}\right\} \\ (\sigma = \beta_2+\beta_3+\beta_4+\ldots\ldots\ldots) \\ \beta_2+2\beta_3+3\beta_4+\ldots\ldots\ldots = \varkappa \end{gathered}$$

Von diesen beiden Gleichungen ist die erste nicht ganz die (369); den Unterschied wird aber scharfsichtige Leser sehr bald in dem Umstande gegründet finden, dass die (369) unter φ ein schlossenes Polynom vom r^{ten} Grade versteht, bestehend aus der bestimmten Anzahl von $r+1$ dern; hier hingegen muss φ aufgefasst werden als eine unendliche absteigende Reihe mit einer schränkten Anzahl von Coefficienten, welche Beschaffenheit sich dann offenbar auch auf die b Substitutionsresultate überträgt.

Da sich für beliebige Ansteigungszahlen r die Methode allgemein nicht mehr mit Kla fortführen lässt, so wird es jetzt erspriesslich sein, die Fälle, wo r eine ganze Zahl, oder Null wenn auch nur einige abgesondert der Betrachtung zu unterziehen. Wir nehmen also zuvörderst r an und erhalten dieser Voraussetzung entsprechend, die folgenden zwei, bereits absteigend geordn Gleichungspolynome:

$$(715)\quad \begin{gathered} 0 = \mathbf{S}\left\{\frac{1}{2!^{\gamma}3!^{\delta}4!^{\varepsilon}\ldots\ldots\beta_2!\beta_3!\ldots\ldots\gamma_2!\gamma_3!\ldots\ldots\delta_2!\delta_3!\ldots\ldots\varepsilon_2!\varepsilon_3!\ldots\ldots}\times\right. \\ \times(-1)^{\gamma_2+\delta_2+\varepsilon_2+\cdots}(-2)^{\gamma_3+\delta_2+\delta_3+\varepsilon_2+\varepsilon_3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times \\ \times[-1]^{\beta_2+\gamma_2+\delta_2+\cdots}[-2]^{\beta_3+\gamma_3+\delta_3+\cdots}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times \\ \left.\times A^{(n-\beta+\sigma)}_{m-\tau}\,.\,x^{m-[\varkappa+\tau+2\gamma_2+3(\gamma_3+\delta_3)+4(\gamma_4-\delta_3+\varepsilon_3)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots]}\right\} \\ (\sigma = \beta_2+\beta_3+\beta_4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ \beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\ldots\ldots = n \\ \beta_2+2\beta_3+3\beta_4+\ldots\ldots\ldots = \varkappa \\ \gamma_2+\gamma_3+\gamma_4+\ldots\ldots\ldots\ldots = \gamma \\ \delta_2+\delta_3+\delta_4+\ldots\ldots\ldots\ldots = \delta \\ \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\ldots\ldots\ldots\ldots = \varepsilon \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

$$(716)\quad \begin{gathered} 0 = \mathbf{S}\left\{\frac{1}{\beta_2!\beta_3!\beta_4!\ldots\ldots}[-1]^{\beta_2}[-2]^{\beta_3}[-3]^{\beta_4}\ldots\ldots\mathfrak{A}^{(\sigma)}_{p-\tau}\,x^{p-\varkappa-\tau}\right\} \\ (\sigma = \beta_2+\beta_3+\beta_4+\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ \beta_2+2\beta_3+3\beta_4+\ldots\ldots = \varkappa \end{gathered}$$

Aus der ersten dieser beiden Formeln sind die Buchstaben γ_1, δ_1, ε_1, ... darum verschwunden, der Factor $r^{\gamma_1+\delta_1+\varepsilon_1+\cdots\cdots}$ unter dem Summenzeichen vorkömmt, der, weil $r = 0$ besteht, entw

den Werth Null, oder den Werth Eins hat, und zwar Letzteres nur dann, wenn $\gamma_1=\delta_1=\varepsilon_1=\ldots=0$ ausfällt. Zerlegen wir nun jede dieser Gleichungen in mehrere, indem wir die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x, von der höchsten angefangen, je für sich gleich Null setzen, so ist zuvörderst ersichtlich, dass in der ersten von ihnen x^m die höchste Potenz von x sei, und der Voraussetzung $\varkappa = \tau = \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots\ldots = \delta_2 = \delta_3 = \ldots\ldots = \gamma = \delta = \ldots\ldots = \beta_2 = \beta_3 = = \ldots\ldots = \sigma = 0$ und $\beta = n$ entspreche. Wir erhalten hiemit als Coefficienten von x^m ein monomisches Glied, d. h. $A_m = 0$. Auf dieselbe Weise ist in der anderen dieser beiden Formeln x^p die höchste Potenz und entspricht der Voraussetzung $\varkappa = \tau = \beta_2 = \beta_3 = \ldots\ldots = \sigma = 0$. Der Coefficient ist abermals monomisch und heisst $\mathfrak{A}_p = 0$. Diess gibt ein erstes Paar von Bestimmungsgleichungen:

$$A_m = 0\,,\quad \mathfrak{A}_p = 0.$$

Um zu einem ferneren zweiten Paare zu gelangen, berechnen wir in der ersten der vorliegenden beiden Gleichungen, den Coefficienten von x^{m-1}, indem wir:

$$\varkappa + \tau + 2\gamma_2 + 3(\gamma_3 + \delta_2) + 4(\gamma_4 + \delta_3 + \varepsilon_2) + \ldots\ldots = 1$$

annehmen, eine Annahme, die jedesmal $\gamma_2 = \gamma_3 = \ldots\ldots = \delta_2 = \delta_3 = \ldots\ldots = 0$ und entweder $\varkappa = 0$, $\tau = 1$, oder $\tau = 0$, $\varkappa = 1$ voraussetzt. Der Coefficient enthält also der Glieder zwei, nämlich: $A_{m-1} + A'_m\,[-1]$. Genau auf dieselbe Weise ist aber auch der Coefficient von x^{p-1} in der zweiten Gleichung: $\mathfrak{A}_{p-1} + \mathfrak{A}'_p\,[-1]$ und hieraus folgt das gesuchte zweite Paar von Bestimmungsgleichungen:

$$A_{m-1} + A'_m\,[-1] = 0\,,\quad \mathfrak{A}_{p-1} + \mathfrak{A}'_p\,[-1] = 0.$$

Zu dem dritten Paare gelangen wir durch Berechnung der Coefficienten von x^{m-2} und x^{p-2}. Hiezu ist es nothwendig, die folgenden zwei hinzutretenden Bedingungsgleichungen gehörig zu berücksichtigen:

$$k + \tau + 2\gamma_2 + 3(\gamma_3 + \delta_2) + 4(\gamma_4 + \delta_3 + \varepsilon_2) + \ldots\ldots = 2$$
$$k + \tau = 2.$$

Der ersten von ihnen kann nur entweder durch $\varkappa + \tau = 0$ und $\gamma_2 = 1$ oder durch $\varkappa + \tau = 2$, $\gamma_2 = 0$ Genüge geleistet werden. Letzteres zerlegt sich noch überdiess in 3 Fälle, nämlich: $\varkappa = 2$, $\tau = 0$, ferner $\varkappa = 1$, $\tau = 1$ und $\varkappa = 0$, $\tau = 2$. Hiezu kommt noch zu bemerken, dass man $\varkappa = 2$ hat in zwei verschiedenen Fällen, nämlich $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$ und $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 0$. Diese aufgezählten fünf verschiedenen Fälle geben fünf verschiedene Glieder als Bestandtheile des Coefficienten von x^{m-2}:

$$\frac{1}{2}\,[-1]^2\,A''_m + [-2]\,A'_m + [-1]\,A'_{m-1} + A_{m-2} - \frac{1}{2}\,A''_m\,[-1] = 0.$$

Genau so ergibt sich der Coefficient von x^{p-2} als viergliedriges Aggregat:

$$\frac{1}{2}\,[-1]^2\,\mathfrak{A}''_p + [-2]\mathfrak{A}'_p + [-1]\,\mathfrak{A}'_{p-1} + \mathfrak{A}_{p-2} = 0.$$

So mag die Rechnung fortgesetzt werden, bis man zu einer zureichenden Anzahl von Bestim gleichungen gekommen ist, die paarweise zusammengestellt werden können. Sie sind:

(717) $A_m = 0\ ,\quad \mathfrak{A}_p = 0$

(718) $A_{m-1} + A'_m[-1] = 0\ ,\quad \mathfrak{A}_{p-1} + \mathfrak{A}'_p[-1] = 0$

(719)
$$A_{m-2} + A'_{m-1}[-1] + \frac{1}{2}A''_m[-1]^2 + A'_m[-2] - \frac{1}{2}A''_m[-1] = 0$$
$$\mathfrak{A}_{p-2} + \mathfrak{A}'_{p-1}[-1] + \frac{1}{2}\mathfrak{A}''_p[-1]^2 + \mathfrak{A}'_p[-2] = 0$$

(720)
$$A_{m-3} + A'_{m-2}[-1] + \frac{1}{2}A''_{m-1}[-1]^2 + A'_{m-1}[-2] + \frac{1}{2.3}A'''_m[-1]^3 + A''_m[-1][-2] + A'_m$$
$$-\frac{1}{2}A''_{m-1}[-1] - \frac{1}{2}A'''_m[-1]^2 - A''_m[-2] + \frac{1}{3}A'''_m[-1] = 0$$
$$\mathfrak{A}_{p-3} + \mathfrak{A}'_{p-2}[-1] + \frac{1}{2}\mathfrak{A}''_{p-1}[-1]^2 + \mathfrak{A}'_{p-1}[-2] + \frac{1}{2.3}\mathfrak{A}'''_p[-1]^3 + \mathfrak{A}''_p[-1][-2] + \mathfrak{A}'_p[-$$

(721)
$$A_{m-4} + A'_{m-3}[-1] + \frac{1}{2}A''_{m-2}[-1]^2 + A'_{m-2}[-2] + \frac{1}{2.3}A'''_{m-1}[-1]^3 + A''_{m-1}[-1][-2] + A'_{m-1}[$$
$$+ \frac{1}{2.3.4}A^{IV}_m[-1]^4 + \frac{1}{2}A'''_m[-1]^2[-2] + A''_m[-1][-3] + \frac{1}{2}A''_m[-2]^2 + A'_m[-4] +$$
$$+ \frac{1}{3}A'''_{m-1}[-1] + \frac{11}{2.3.4}A^{IV}_m[-1]^2 + A'''_m[-2] - \frac{1}{2}A''_{m-2}[-1] - \frac{1}{2!}A'''_{m-1}[-1]^2 - A''_{m-1}[$$
$$-\frac{1}{4}A^{IV}_m[-1]^3 - \frac{3}{2}A'''_m[-1][-2] - \frac{3}{2}A''_m[-3] - \frac{1}{4}A^{IV}_m[-1] = 0$$
$$\mathfrak{A}_{p-4} + \mathfrak{A}'_{p-3}[-1] + \frac{1}{2}\mathfrak{A}''_{p-2}[-1]^2 + \mathfrak{A}'_{p-2}[-2] + \frac{1}{2.3}\mathfrak{A}'''_{p-1}[-1]^3 + \mathfrak{A}''_{p-1}[-1][-2] + \mathfrak{A}'_{p-}$$
$$+ \frac{1}{2.3.4}\mathfrak{A}^{IV}_p[-1]^4 + \frac{1}{2}\mathfrak{A}'''_p[-1]^2[-2] + \mathfrak{A}''_p[-1][-3] + \frac{1}{2}\mathfrak{A}''_p[-2]^2 + \mathfrak{A}'_p[-4] = 0$$

. . . .

Diese Gleichungen sind es nun, welche einerseits die Coefficienten der algebraischen Gleichung tenweise, andererseits aber die auf einander folgenden Glieder sämmtlicher Functionen φ liefern die hier in der Gestalt einer absteigenden Reihe, d. h. in der folgenden:

$$\varphi = [0] + [-1]\,x^{-1} + [-2]\,x^{-2} + \dots\dots\dots$$

vorkommen. Die Methode, deren man sich bedient, um zu diesen Werthen zu gelangen, ist ei gemeine, für beliebige r giltige und soll hier ein für alle Mal für den speciellen Werth $r =$ einandergesetzt werden, mit der Bemerkung, dass sie sich auf dieselbe Weise und mit ganz u lichen Veränderungen auch auf andere Ansteigungszahlen übertragen lassen.

Nachdem man aus den einzelnen Coefficientenschichten der Differentialgleichung ver der Formeln (711) die in der Regel dem n^{ten} Grade in [0] angehörigen Polynome alle gebildet hat,

man das erste Paar von Bestimmungsgleichungen vor, bemerkend, dass alle diejenigen $[0]$, welche der $A_m = 0$ Genüge leisten, auch die $\mathfrak{A}_p$ erfüllen müssen. Diess geschieht nur dann, wenn die beiden Gleichungspolynome identisch dieselben sind. Man hat also identisch: $A_m = \mathfrak{A}_p$ mithin auch: $A'_m = \mathfrak{A}'_p$, $A''_m = \mathfrak{A}''_p$, ... Diess wird aber wieder der Fall sein, wenn die beiden Polynome in allen ihren Coefficienten übereinstimmen, wenn man mithin:

$$[n, m] = (n, p), \; [n-1, m] = (n-1, p), \; [n-2, m] = (n-2, p), \ldots.. [0, m] = (0. p) \quad ($$

hat. Hiemit hat man die erste Coefficientenschichte der algebraischen Gleichung, die mit der ersten der differentialen übereinstimmt; zugleich aber gibt die

$$A_m = [n, m][0]^n + [n-1, m][0]^{n-1} + [n-2, m][0]^{n-2} + \ldots.. + [0, m] = 0, \quad ($$

die Werthe von $[0]$ in der Regel n an der Zahl, nie mehr, manchmal aber weniger und noch öfter weniger von einander verschiedene und zwar dann, wenn entweder die Anfangscoefficienten $[n, m]$, $[n-1, m]$, ... in gewisser Anzahl verschwinden, oder wenn gleiche Wurzeln vorhanden sind, z. B. gleiche Wurzeln Null, die jedesmal vorkommen, wenn in der Differentialgleichung auch Abfälle gegen den letzten Coefficienten vorhanden sind. Dem Rechner steht hier noch die Wahl frei, ob er die algebraische Gleichung mit der Gradzahl n oder auch mit einer niederen zu berechnen wünscht, welche nur diejenigen φ zu Wurzeln hat, die der höchsten horizontalen Polygonseite entsprechen; mindestens sind es vorderhand nur so viele von Null verschiedene Werthe von φ, deren erste Glieder aus der $A_m = 0$ hervorgehen. Sie seien s an der Zahl.

Nun wende man sich an das zweite Paar von Bestimmungsgleichungen, und ziehe sie von einander ab, nehme dabei Rücksicht darauf, dass $A'_m = \mathfrak{A}'_p$ ist, so erhält man $A_{m-1} = \mathfrak{A}_{p-1}$, und sieht, dass man auch die zweiten Coefficientenschichten als identisch dieselben annehmen kann, aber nicht muss, denn es kann auch $\mathfrak{A}_{p-1} = A_{m-1} + CA_m$ angenommen werden, unter C eine noch unbestimmte Constante verstanden. Hiemit wird auch der erste Coefficient von $\mathfrak{A}_{p-1}$ unbestimmt und kann in der Folge dazu verwendet werden, um die geschlossene Beschaffenheit der algebraischen Gleichung herbeizuführen. Dieses Aufsparen von unbestimmten Constanten erweist sich aber nach einiger Ueberlegung als eine Multiplication der algebraischen Gleichung mit einem unbestimmten, absteigend geordneten Polynome, und da man eine solche Multiplication nach Belieben in jedem Stadium der Rechnung und auch ganz am Ende vornehmen kann, so ist nichts verloren, wenn man den ersten Coefficienten der algebraischen Gleichung ganz willkürlich aus denjenigen Factoren zusammensetzt, von welchen man vermuthet, dass sie demselben zugehören werde, oder auch, wenn man will, ihn einen monomischen Ausdruck sein lässt. Man hat also, wie gesagt. noch gar keinen Vortheil aufgegeben, wenn man auch die zweite Coefficientenschichte ungeändert von der Differentialgleichung auf die algebraische überträgt, es sei denn, dass man die algebraische Gleichung nicht in der Gradzahl n, die zugleich die Ordnungszahl der Differentialgleichung ist, zu haben wünschte, sondern in einer niedereren Gradzahl s,

gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Wurzeln der $A_m = 0$. In diesem Falle nämlich kan man $\mathfrak{A}_{p-1}$ gleich einem Polynome vom Grade $s-1$ mit unbestimmten Coefficienten voraussetzen, sodann aber aus der $A_{m-1} - \mathfrak{A}_{p-1} = 0$ vermittelst der $A_m = 0$ alle höheren Potenzen von $[0]$, angefang von der s^{ten} eliminiren, endlich die unbestimmten Coefficienten des $\mathfrak{A}_{p-1}$ so wählen, dass das na geschehener Elimination s-gliedrig gewordene $A_{m-1} - \mathfrak{A}_{p-1}$ Glied für Glied identisch in Null übergel Hat man nun auf diese oder die andere Weise die zweite Coefficientenschichte der algebraischen Gle chung erhalten, so bekömmt man dazu den Coefficienten $[-1]$ des zweiten Gliedes von φ aus d ersten der Bestimmungsgleichungen (718), nämlich:

$$[-1] = -\frac{A_{m-1}}{A'_m} \tag{724}$$

und zwar als Function von $[0]$. Da aber dieses im Allgemeinen n-werthig, oder mindestens s-werth ist, so wird auch $[-1]$ ebenso viele aus der vorigen Formel hervorgehende Werthe besitzen. M hätte also alle aus der Auflösung der Gleichung $A_m = 0$ hervorgehenden Werthe von $[0]$ in die Formel zu substituiren, um daraus eine in der Regel ebenso grosse Anzahl von Werthen für $[-1]$ gewinnen. Sind nun sämmtliche $[0]$ einfache und rationale Ausdrücke, so hat die Substitution kei Schwierigkeit. Es ist diess aber nicht immer der Fall und man ist oft genöthigt, um die Substituti von Irrationalgrössen, wenn auch nicht zu vermeiden, so doch mindestens zu erleichtern, den folgend Weg einzuschlagen: Man multiplizirt unter der Voraussetzung, dass A_m vom Grade s, mithin A'_m vo Grade $s-1$ nach $[0]$ ist, Zähler und Nenner des gebrochenen Werthes von $[-1]$ mit dem folge den Polynome ebenfalls vom Grade $s-1$ und mit unbestimmten Coefficienten:

$$M = q_{s-1}[0]^{s-1} + q_{s-2}[0]^{s-2} + \ldots\ldots + q_0 \tag{725}$$

sodann eliminire man zuvörderst aus dem Nenner alle höheren Potenzen von $[0]$ von der s^{ten} an fangen vermittelst der $A_m = 0$, wobei man mit lauter rationalen Formen zu thun hat und zu ein anderen Nenner gelangt, der höchstens vom Grade $s-1$ ist, und in seinen Coefficienten s an Zahl annoch ebenso viele unbestimmte Constanten $q_0, q_1, \ldots\ldots q_{s-1}$ in linearer Form enthält. Di Constanten wählt man nun so, dass die Coefficienten von $[0]$, $[0]^2$, ... $[0]^{s-1}$ verschwinden, m hin aus dem Nenner jede Spur des irrationalen $[0]$ herausfällt. Nun hat man noch aus dem mit P m tiplizirten Zähler alle höheren Potenzen von $[0]$, angefangen von der s^{ten}, herauszuschaffen und wird zu dem einfachsten Ausdrucke für $[-1]$ gelangen, der nach $[0]$ ungebrochen und höchstens v Grade $s-1$ sein wird, mithin von der folgenden Form:

$$[-1] = B + B_1[0] + B_2[0]^2 \ldots\ldots + B_{s-1}[0]^{s-1} \tag{726}$$

Hier hat man sich nun freilich noch die irrationalen Werthe von $[0]$ substituirt zu denken, brau diess aber nicht wirklich zu thun, sondern kann die Rechnung ungehindert mit dem gewonnenen Wert von $[-1]$ fortsetzen, ohne irgendwie auf Irrationalgrössen zu stossen. Wäre die $A_m = 0$ nicht mit

von der Nulle verschiedenen, sondern mit n Wurzeln versehen, so hätte man sich hier nur $s = n$ zu denken.

Nachdem auf diese Weise zwei Coefficientenschichten und gleichzeitig zwei Glieder des φ aus der Rechnung hervorgegangen sind, geht man zu dem dritten Paare von Bestimmungsgleichungen über, zieht sie von einander ab, und bekömmt mit Rücksicht auf $A'_m = \mathfrak{A}'_p$, $A''_m = \mathfrak{A}''_p$, ...

$$A_{m-2} - \mathfrak{A}_{p-2} + (A'_{m-1} - \mathfrak{A}'_{p-1})\,[-1] - \frac{1}{2}\,A''_m\,[-1] = 0. \tag{727}$$

Hier hat man nun zuvörderst anstatt $[-1]$ die unmittelbar vorher erzielte Form (724) zu substituiren, dann aber vermittelst der $A_m = 0$ die höheren Potenzen von $[0]$, von der n^{ten} oder von der s^{ten} angefangen, zu eliminiren, je nachdem die $A_m = 0$ von der Nulle verschiedene Wurzeln n oder s an der Zahl besitzt; nach geschehener Elimination wird ein Ausdruck vom Grade $n-1$ oder $s-1$ nach $[0]$ vorliegen und man wird die in $\mathfrak{A}_{p-2}$ vorhandenen s oder auch mehr, höchstens n Constanten so zu wählen haben, dass das erhaltene Substitutions- und Eliminationsresultat Glied um Glied der Nulle gleich wird. Der Sinn des Verfahrens ist der oft angeführte. Die durch Subtraction erhaltene (727) nämlich soll identisch werden für alle die s Werthe von $[0]$, welche der $A_m = 0$ Genüge leisten. Hat man sie nun durch Elimination der höheren Potenzen, angefangen von der s^{ten}, zu der Gradzahl $s-1$ herabgebracht, so lässt sie offenbar nur höchstens $s-1$ identisch machende Werthe, d. h. Wurzeln zu, es sei denn, dass sie überhaupt für jedes $[0]$ identisch wird, indem sie in s Gleichungen zerfällt.

Hierauf folgt die Berechnung des dritten Gliedes von φ, d. h. des Coefficienten von $[-2]$ aus der ersten der Bestimmungsgleichungen (719) und zwar zunächst in folgender Gestalt:

$$[-2] = -\frac{1}{A'_m}\left[A_{m-2} + A'_{m-1}\,[-1] + \frac{1}{2}\,A''_m\,[-1]^2 - \frac{1}{2}\,A''_m\,[-1].\right] \tag{728}$$

Da hier genau derselbe Nenner A'_m vorkommt, wie im Werthe von $[-1]$, so lässt man auch diesem Ausdrucke dieselbe Behandlung angedeihen. Nach geschehener Substitution nämlich des für $[-1]$ ermittelten Werthes (726) multiplizirt man Zähler und Nenner mit genau demselben Polynome M, dessen Coefficienten q_0, q_1, ... q_{s-1} früher berechnet worden sind, wodurch sich der Nenner wieder in eine Constante verwandelt; dann schafft man aus dem Zähler vermittelst der $A_m = 0$ alle höheren Potenzen von $[0]$ heraus und bringt hiemit auch den Werth von $[-2]$ auf dieselbe Form (726), die auch seinem Vorgänger $[-1]$ angehört, rational nämlich, ganz und vom Grade $s-1$. Und in dieser Weise fährt man in der Rechnung fort, immer beschäftigt mit rationalen Formen und Schichte um Schichte der algebraischen Gleichung und zugleich Glied um Glied des φ gewinnend. Es ist sehr leicht, einzusehen, dass ein solcher Calcul bald sehr einfach, bald wieder sehr verwickelt ausfallen wird, und zwar hängt diess wesentlich von der Gleichung $A_m = 0$ ab. Da man nun an einer beliebigen Seite des den Coefficientenbau umspannenden Polygones die Rechnung beginnen kann, so hat man bei der Wahl derselben die Gleichung $A_m = 0$ vorzüglich zu berücksichtigen. Wiewohl diese Auseinandersetzung auf die Ansteigungszahl Null, oder mit anderen Worten, auf die höchste Polygonseite Bezug nimmt, so

ist doch das Verfahren ein allgemeines für beliebige Ansteigungszahlen r giltiges. Man hat nur etwas anderen Gleichungen zu thun, verfährt jedoch mit ihnen immer auf dieselbe Weise.

Hätte man nämlich $r = 1$, so wäre auch die Form des φ eine andere, nämlich:

$$\varphi = [1]\, x + [0] + [-1]\, x^{-1} + [-2]\, x^{-2} + \ldots\ldots$$

und die beiden Substitutionsresultate dieses φ in die Differentialgleichung und in die algebraische aus der allgemeinen abzuleiten für den speciellen Werth $r = 1$. Sie enthalten abermals eine gr Anzahl von verschiedenen Gliedern, die man wegzulassen berechtigt ist. Weil unter dem Summen chen der Factor $(r-1)^{\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\cdots}$ stets entweder Null, oder Eins ist, letzteres aber nur d wenn alle nur ganzer positiver oder verschwindender Werthe fähigen Bestandtheile seines Expone übergehen in Null. Man wird also: $\delta_1 = \varepsilon_1 = \ldots\ldots = 0$ und $\gamma_2 = \delta_2 = \varepsilon_2 = \ldots\ldots$ haben, wonach die beiden Substitutionsresultate in Summengestalt die folgenden sind:

$$(729)\quad \begin{array}{l} 0 = \mathrm{S}\left\{\dfrac{1}{2!^{\gamma}3!^{\delta}4!^{\varepsilon}\ldots\ldots\beta_2!\beta_3!\ldots\ldots\gamma_1!\gamma_3!\gamma_4!\ldots\ldots\delta_3!\delta_4!\ldots\ldots\varepsilon_3!\varepsilon_4!\ldots\ldots} \times\right. \\ \quad\times(-1)^{\gamma_3+\delta_3+\varepsilon_3+\cdots\cdots}(-2)^{\gamma_4+\delta_3+\delta_4+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\cdots\cdots}\ldots\ldots\ldots\ldots\times \\ \quad\times[1]^{\gamma_1}[0]^{\beta_2}[-1]^{\beta_3+\gamma_3+\delta_3+\varepsilon_3+\cdots\cdots}\ldots\ldots\ldots\ldots\times \\ \quad\left.\times A^{(n-\beta+\sigma)}_{m-\cdot}\, x^{m+\beta-[2\gamma_3+3(\gamma_4+\delta_3)+\cdots\cdots+x+\tau]}\ldots\ldots\ldots\ldots\right\} \\ \qquad(\sigma = \beta_2+\beta_3+\beta_4+\ldots\ldots\ldots) \\ \qquad\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\ldots\ldots = n \\ \qquad\beta_2+2\beta_3+3\beta_4+\ldots\ldots = x \\ \qquad\gamma_1+\gamma_3+\gamma_4+\ldots\ldots = \gamma \\ \qquad\quad\delta_3+\delta_4+\ldots\ldots = \delta \\ \qquad\quad\varepsilon_3+\varepsilon_4+\ldots\ldots = \varepsilon \\ \qquad\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$(730)\quad \begin{array}{l} 0 = \mathrm{S}\left\{\dfrac{1}{\beta_2!\beta_3!\beta_4!\ldots\ldots}[0]^{\beta_2}[-1]^{\beta_3}[-2]^{\beta_4}\ldots\ldots\mathfrak{A}^{(\sigma)}_{p-\cdot}\, x^{p+n-x-\tau}\right\} \\ \qquad(\sigma = \beta_2+\beta_3+\beta_4+\ldots\ldots\ldots) \\ \qquad\beta_2+2\beta_3+3\beta_4+4\beta_5+\ldots\ldots = x \end{array}$$

Stellt man sich diese beiden Summen absteigend geordnet vor, so ist x^{m+n} die höchste Potenz vo in der ersten von ihnen und x^{p+n} die höchste in der zweiten, und man wird auch hier die versc denen Glieder der absteigenden Entwicklung erhalten, indem man dem im Exponenten von x ersc nenden Polynome

$$\beta - [2\gamma_3 + 3(\gamma_4 + \delta_3) + \ldots\ldots\ldots + x + \tau]$$

der Reihe nach die Werthe: n, $n-1$, $n-2$, ... ertheilt und sämmtliche Auflösungen in zen Zahlen der so erhaltenen und der den beiden Summen angehängten Bestimmungsgleichungen s endlich die, diesen Auflösungen entsprechenden Summenglieder zu einem Aggregate vereinigt. Da

Rechnungen keine Schwierigkeiten bieten, so wird es immer ein Leichtes sein, zu den paarweise zusammengestellten Bestimmungsgleichungen zu gelangen, und erst die Auflösung dieser Bestimmungsgleichungen wird in der Regel mit dem grösseren Aufwande an Rechnungen verknüpft sein. Es scheint auch nicht nöthig, den ganzen Vorgang mit einer grösseren Anzahl von Beispielen zu erläutern. Die Methode ist so einfach, dass ein halbwegs geübter Rechner kaum auf erhebliche Schwierigkeiten stossen wird.

§. 15.

Auffindung der algebraischen Gleichung ohne absteigende Entwicklung der Function φ.

Die in den vorhergehenden Paragraphen auseinandergesetzte Integrationsmethode bietet nicht nur die Coefficienten der algebraischen Gleichung schichtenweise, sondern auch Glied um Glied die absteigende Entwicklung ihrer mit φ bezeichneten Wurzeln und zwar sind die zu letzterem Zwecke nothwendigen Rechnungsentwicklungen meistentheils von nicht geringem Umfange. Es kann jedoch mitunter wünschenswerth erscheinen, bloss die algebraische Gleichung ohne ihren absteigend entwickelten Wurzeln zu besitzen, entweder weil man dieselbe in irgend einer anderen Weise aufzulösen, oder weil man sie ohne vorgängiger Auflösung vermittelst der dafür bestehenden Methoden zu discutiren wünscht. Es gibt nun ein zu diesem Zwecke dienliches Verfahren, das noch überdiess den Vortheil gewährt, die Coefficienten der gesuchten Gleichung nicht in einzelnen Schichten, sondern eine bestimmte Anzahl solcher Schichten auf Einmal zu bieten und zwar ist diese Anzahl bei jeder Wiederholung des Verfahrens dieselbe, in dieser Beziehung unähnlich der Annäherungsmethode Fourier's, die für algebraische Zahlengleichungen eine bei jeder Wiederholung wachsende Anzahl von Decimalstellen liefert. Der gegenwärtige Paragraph soll sich mit der Auseinandersetzung dieser Methode beschäftigen, die auf den folgenden Betrachtungen beruht.

Wenn eine Differentialgleichung gegeben ist, und es wird zu gleicher Zeit eine bestimmte algebraische genannt, welche dieser Differentialen entsprechen soll, oder von welcher man vermuthet, dass sie eben entsprechen könnte, so kann man diess immer auf eine zwar mehr oder weniger mühsame, aber doch in den Grundzügen einfache und sich stets gleichbleibende Weise erproben, die hier zuvörderst in ein Paar speciellen Beispielen, dann aber allgemein vorgetragen werden soll, weil sie den in Rede stehenden Integrationsmethoden zu Grunde liegt.

Als erstes erkiesen wir die Differentialgleichung der zweiten Ordnung, die unter (68) Seite 194 des ersten Bandes vorkömmt und folgendermassen aussieht:

$$\begin{aligned} L(M^2 - 4LN)\, y'' + [M(M^2 - 4LN) - M(M'L - L'M) + 2L(N'L - L'N)]\, y' + \\ + [N(M^2 - 4LN) + M(N'L - L'N) - 2N(M'L - L'M)]\, y = 0. \end{aligned}$$

Gesetzt nun, man stellt die Vermuthung auf, dass diese Differentialgleichung der folgenden algebraischen:

$$L\varphi^2 + M\varphi + N = 0$$

angehören könnte, so leitet man, um sich von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser Vermuth zu überzeugen, das folgende Verfahren ein: Man führt zuvörderst in die Differentialgleichung

$$y = e^{\int \varphi dx} \tag{733}$$

ein. Das Ergebniss ist:

$$\begin{aligned} L(M^2 - 4LN)(\varphi^2 + \varphi') + [M(M^2 - 4LN) - M(M'L - L'M) + 2L(N'L - L'N)]\,\varphi \\ + [N(M^2 - 4LN) + M(N'L - L'N) - 2N(M'L - L'M)] = 0. \end{aligned} \tag{734}$$

Wäre nun in der That die algebraische Gleichung (732) der Differentialgleichung (731) zugehörig müsste einerlei φ den beiden, oder was dasselbe ist, der (732) und (734) Genüge leisten. Es k daher auch, wenn man aus der algebraischen (732) auf dem Wege des Differenzirens φ' ableitete, w bekanntlich ein rationaler Ausdruck in φ gewonnen wird, dieser, anstatt φ' in die Gleichung (734) geführt, nur zu einem Ergebnisse führen, welches der algebraischen (732) nicht widersprechen d also entweder die algebraische Gleichung selbst ist, oder eine daraus abgeleitete und jedes Mal algebraische Gleichung selbst sein muss, wenn man dafür sorgt, dass die Form des Resutates die (732), d. h. einer algebraischen Gleichung des zweiten Grades in φ wird. Diess thut man nun folgende Weise: Die oft genannte Algebraische (732) liefert, nach allen x differenzirt und dann φ' aufgelöst, zunächst den folgenden Werth:

$$\varphi' = \frac{L'\varphi^2 + M'\varphi + N'}{2L\varphi + M} \tag{735}$$

Nun suchen wir vor allem anderen das im Nenner vorhandene φ dadurch wegzuschaffen, dass Zähler und Nenner des gebrochenen φ multipliziren mit $2L\varphi + M$ und dann das Quadrat und dritte Potenz von φ vermittelst der (732) eliminiren. Wir erhalten so:

$$(M^2 - 4NL)\,\varphi' = 2LN'\varphi + MN' - 2NM' \tag{736}$$

Wird nun dieser Werth von φ wirklich in die (734) substituirt, so verwandelt sie sich allsogleicl die Algebraische (732), nur mit $M^2 - 4LN$ multiplizirt. Mithin sind die beiden der Betracht unterzogenen Gleichungen (731) und (732) wirklich zusammengehörig.

Als zweites Beispiel werde die Differentialgleichung der vierten Ordnung erkiesen, die unter (307) Seite 256 des I. Bandes vorfindet:

$$N^3.y^{IV} - 6N^2N'.y''' + (15NN'^2 - 4N^2N'')y'' + (10NN'N'' - N^2N''' - 15N'^3)y' - N^7.y = 0 \tag{737}$$

Gesetzt nun, der Coefficientenbau errege bei dem Rechner die Vermuthung, dass die binomische al braische Gleichung:

$$\varphi^4 - N^4 = 0 \tag{738}$$

zu dieser Differentialen gehörig sein könnte, so lässt sich diess wieder auf dieselbe Weise erproben: beginnt nämlich abermals mit der Substitution (733) und erhält aus der vorgelegten Differentialgleichu

$$\begin{aligned} N^3.(\varphi^4 + 6\varphi^2\varphi' + 4\varphi\varphi'' + 3\varphi'^2 + \varphi''') - 6N^2N'(\varphi^3 + 3\varphi\varphi' + \varphi'') + \\ + (15NN'^2 - 4N^2N'')(\varphi^2 + \varphi') + (10NN'N'' - N^2N''' - 15N'^3)\,\varphi - N^7 = 0. \end{aligned} \tag{739}$$

Dieser und der binomischen (738) soll nun einerlei φ Genüge leisten. Sie wird sich daher, wenn man auf dem Wege des wiederholten Differenzirens aus der Algebraischen (738) φ', φ'', φ''' sucht und die gefundenen Werthe, die jederzeit rational durch φ darstellbar sind, hineinsubstituirt, in eine von dieser Algebraischen nicht verschiedene verwandeln müssen. Nun hat man aber:

$$\varphi^3\varphi' = N^3N'$$

oder mit φ multiplizirend und anstatt φ^4 den Werth N^4 setzend:

$$\varphi' = \frac{N'\varphi}{N}$$

durch abermaliges Differenziren und Einführen des gewonnenen Werthes anstatt φ', gewinnt man:

$$\varphi'' = \frac{N''}{N}\varphi\,,\quad \varphi''' = \frac{N'''}{N}\varphi.$$

Diese Werthe, eingeführt in die (739), reduziren nun dieselbe auf die mit N^3 multiplizirte (738), mithin stellt sich die Zusammengehörigkeit der in Rede stehenden zwei Gleichungen als erwiesen heraus.

Dieses Verfahren lässt sich nun in Anwendung bringen bei einer jeden Differentialgleichung von beliebiger Ordnung n und mit wie immer gebauten Coefficienten, wenn man die algebraische hat, die zu derselben gehören soll; allein die Werthe von φ'. φ'', ... $\varphi^{(n-1)}$, die zu diesem Zwecke auf dem Wege successiver Differentiationen berechnet werden müssen und zwar nicht nur in rationalen Ausdrücken nach φ, sondern auch in ganzen solchen nach eben denselben φ, in denen höhere als die $(n - 1)^{\text{ste}}$ Potenz nicht vorkommen, können mitunter in unabsehbare Rechnungen verwickeln, welche nur dann wesentlich abgekürzt zu werden vermögen, wenn, wie in den betrachteten zwei Beispielen, die zu Grunde liegende algebraische Gleichung entweder ihrer Form, oder ihrer Gradzahl nach zu den sehr einfachen gehörig ist. Da indessen die Schwierigkeiten des Calculs als einer allgemeinen Methode keinen Eintrag thuend angesehen werden und man namentlich immer die Integration einer Differentialgleichung als beendet ansieht, wenn man sie auf Rechnungsoperationen niedrigerer Ordnung, z. B. Auflösung algebraischer Gleichungen, Quadraturen u. s. w. zurückgeführt hat, so legen auch wir das hier auseinandergesetzte Verfahren, die Zusammengehörigkeit zweier Gleichungen zu erproben, als ein allgemein durchführbares zu Grunde, mit der Bemerkung jedoch, dass man nur die Differentialgleichung in der Regel vollständig kennt, von der ihr entsprechenden algebraischen hingegen nur eine sehr unvollkommene Kenntniss, gewöhnlich die einer aus einigen Schichten bestehenden Coefficientengruppe hat, daher es sich gegenwärtig darum handelt, diese unvollständige Kenntniss wo möglich durch eine Reihe zweckdienlicher Rechnungsoperationen allmälig zu ergänzen. Wir legen uns, um diess zu leisten, die Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung vor in Summengestalt, nämlich:

$$\underset{\alpha+\omega=n}{S}\left[\mathfrak{X}_\omega y^{(\alpha)}\right] = 0 \tag{740}$$

beschreiben, wie gewöhnlich, das normale, den Coefficientenbau umspannende Polygon, ermitteln alle Ansteigungszahlen r, die den einzelnen Polygonseiten eigen sind, und zwar alles diess mit Hilfe der im vorigen Paragraphe erwähnten, aus zwei aufeinander senkrechten Systemen paralleler Linien im Abstande Eins bestehenden Zeichnung. Wir führen ferner zu jeder Polygonseite in dem Abstande $r+1$, gemessen in der Richtung der Ordinatenaxe eine Parallele und erhalten dadurch ein zweites Polygon, ober welchem sämmtliche Durchschnittspunkte und entsprechende Glieder des differentialen Gleichungspolynomes liegen, die man auch der gesuchten algebraischen Gleichung zugehörig annehmen kann. Nach vollbrachter Substitution nun der Potenzen von φ anstatt der gleichnamigen Differentialquotienten in y mag sich eine algebraische Gleichung:

$$R = 0$$

zusammengesetzt lediglich aus den erwähnten Gliedern, zwischen den beiden Polygonen ergeben. Wenn sie nicht die gesuchte algebraische Gleichung selbst ist, so hat sie doch wenigstens mit eben derselben die Anfangsglieder der Coefficienten, mithin auch gewisse Anfangsglieder ihrer mit φ bezeichneten Wurzeln gemeinschaftlich, und es handelt sich zunächst darum, die Anzahl dieser Anfangsglieder zu vermehren. Diess geschieht nun nicht einzeln Glied für Glied, und auch nicht in Schichten, sondern in Gruppen von mehreren Schichten, so zwar, dass man aus der Gleichung $R=0$ durch einen einzigen zusammenhängenden Rechnungsact eine andere:

$$R + S = 0$$

ableitet, so zwar, dass R und S keine gemeinschaftlichen Glieder und auch keine mit denselben Potenzen und Potenzprodukten von x und φ besitzen. Durch einen zweiten Rechnungsact dieser Art wird nun aus der $R + S = 0$ eine dritte Gleichung abgeleitet:

$$R + S + T = 0$$

die mit der gesuchten Algebraischen in noch vollkommenerer Uebereinstimmung steht, als die zweite. Hieraus gewinnt man dann ebenso eine vierte:

$$R + S + T + U = 0.$$

Es soll hier zunächst gezeigt werden, aus welchen Gliedern, d. h. mit welchen Potenzen und Potenzprodukten von x und φ versehen die successiven Bestandtheile des algebraischen Gleichungspolynomes S, T, U, ... zusammengefügt sind, sodann aber, wie sie der Reihe nach gewonnen werden.

Um über die Anzahl und Beschaffenheit der zu S gehörigen Glieder Aufschluss zu erhalten, denn um R frägt es sich nicht mehr, es besteht nämlich aus den in einer gewissen Polygonzone (so wollen wir den Zwischenraum zwischen zwei Polygonen von zu einander parallelen Seiten der Kürze wegen nennen) enthaltenen Gliedern des Differentialgleichungspolynomes selbst, nachdem man anstatt der successiven Differentialquotienten von y die gleichnamigen Potenzen von φ eingeführt hat. Um also das Polynom S seiner Ausdehnung nach zu kennen, wenden wir uns abermals an die erwähnte quar-

rirte Zeichnung mit den bereits verzeichneten zwei Polygonen von parallelen Contouren, die eine erste Zone einschliessen, und bilden eine zweite Zone dadurch, dass wir ein drittes Polygon unter den zwei ersten verzeichnen, dessen Seiten parallel zu den Seiten des zweiten Polygones geführt werden, jedoch in verschiedenen Entfernungen, wie auch bei der ersten Zone. Die Entfernung ist nämlich bei einer Polygonseite, der die Ansteigungszahl r angehört, stets $r + 1$, was auch r bedeuten mag. Nicht einmal der Fall $r = 0$ ist ausgeschlossen, der bei der Bildung der ersten Polygonzone eine Ausnahme bildet, indem man an dieser Polygonseite um eine Coefficientenschichte weiter zu gehen berechtigt ist. Durch das zweite und das dritte dieser Polygone entsteht nun eine Polygonzone und es gehören die Durchschnittspunkte der in der Zeichnung vorhandenen horizontalen und vertikalen Linien, welche in diese zweite Zone fallen, d. h. welche sich ober dem dritten Polygone und entweder auf oder unter dem zweiten befinden, sämmtlich zu S in dem Sinne, dass S aus eben so vielen Gliedern zusammengesetzt sein kann, aber nicht muss, als sich derlei Durchschnittspunkte in der dritten Zone vorfinden, alle von der Form $Ax^s\varphi^t$. Zu jedem Punkte gehört ein eigenes s und ein eigenes t, das s gleich der Ordinate, das t aber gleich der Abscisse des betreffenden Durchschnittspunktes. Es ist, um unnütze Rechnungen zu vermeiden, von Vortheil, mindestens die Zahlen s und t hinzuzeichnen zu den Punkten, zu welchen sie gehören, damit man nicht veranlasst werde, mehr Glieder zu berechnen, als zu S wirklich gehörig sind. Die sämmtlichen Coefficienten A müssen sich aus der Rechnung selbst ergeben.

Um über die Zusammensetzung des nächstfolgenden Bestandtheiles T in Vorhinein Aufschluss zu erhalten, bildet man genau auf dieselbe Art die ihm entsprechende Polygonzone, indem man zu den drei bereits verzeichneten Polygonen noch ein viertes construirt mit parallelen Seiten, befindlich im Abstande von je $r + 1$ Einheiten. Alle Punkte ober der vierten Contour und auf oder unter der dritten gehören dann zu Gliedern des T. Und so geht es fort, wenn es nöthig werden sollte, noch mehrere Bestandtheile U, V, W, ... des algebraischen Gleichungspolynomes der Rechnung zu unterwerfen. Es wird nämlich einem jeden derselben eine in der eben beschriebenen Weise erhaltene Zone angehören. Dass diese Gliederung des algebraischen Gleichungspolynomes zweckmässig sei, soll sich in der Folge ergeben aus der Art, nach welcher S, T, U, ... der Berechnung unterworfen werden.

Um nun der Werthe von S, T, U, ... wirklich habhaft zu werden, führen wir die Substitution (733) bei der vorgelegten Differentialgleichung wirklich durch. Sie ist im §. 9 der Transformationslehre umständlich abgehandelt und es wurde allda zur Vereinfachung des Resultates ein gewisses Polynom mit Q bezeichnet, welches man aus jenem der Differentialgleichung erhält, die Differentialquotienten von y durch die gleichnamigen Potenzen von φ ersetzend, d. h. es ist:

$$Q = \underset{\alpha + \omega = n}{S} \left[\mathfrak{X}_\alpha \varphi^\alpha\right] \tag{741}$$

und eben die Anfangsglieder dieses Q sind es, die auch in R vorhanden sind, in einer Zahl und Beschaffenheit, wie sie den Durchschnittspunkten in der ersten Polygonzone angehört. In Function die-

s Q nun und seiner Differentialquotienten ergibt sich das Resultat der Substitution (733):

$$0 = \mathrm{S}\left[\frac{1}{\gamma!\delta!\ldots\ldots}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^{\gamma}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^{\delta}\ldots\ldots\frac{d^{n-\beta}Q}{d\varphi^{n-\beta}}\right]$$

$$\beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots\ldots\ldots = n$$

Die Aufstellung desselben in entwickelter Gestalt ist erleichtert worden durch eine Tabelle (244) Seite 143 und folgenden, die alle ganzen Auflösungen der unten stehenden Beziehungsgleichung, d. h alle ganzen und positiven Werthe von β, γ, δ, ... in sich enthält, die ihr Genüge leisten. Hievor Gebrauch machend, gewinnt man leicht:

$$\begin{aligned}
0 = {} & Q + \\
& + \frac{\varphi'}{2!}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} + \\
& + \frac{\varphi''}{3!}\frac{d^3Q}{d\varphi^3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^2\frac{d^4Q}{d\varphi^4} + \\
(743) \quad & + \frac{\varphi'''}{4!}\frac{d^4Q}{d\varphi^4} + \frac{\varphi'}{2!}\frac{\varphi''}{3!}\frac{d^5Q}{d\varphi^5} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^3\frac{d^6Q}{d\varphi^6} + \\
& + \frac{\varphi^{IV}}{5!}\frac{d^5Q}{d\varphi^5} + \left[\frac{\varphi'\varphi'''}{2!4!} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^2\right]\frac{d^6Q}{d\varphi^6} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^2\frac{\varphi''}{3!}\frac{d^7Q}{d\varphi^7} + \frac{1}{4!}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^4\frac{d^8Q}{d\varphi^8} \\
& + \frac{\varphi^{V}}{6!}\frac{d^6Q}{d\varphi^6} + \left[\frac{\varphi'}{2!}\frac{\varphi^{IV}}{5!} + \frac{\varphi''}{3!}\frac{\varphi'''}{4!}\right]\frac{d^7Q}{d\varphi^7} + \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^2\left(\frac{\varphi'''}{4!}\right) + \frac{\varphi'}{2!}\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^2\right]\frac{d^8Q}{d\varphi^8} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^3\frac{\varphi''}{3!}\frac{d^9Q}{d\varphi^9} + \frac{1}{5!}\frac{\varphi'^5}{6!}\frac{d^{10}Q}{d\varphi^{10}} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die Bestandtheile finden sich hier bereits in eine gewisse Rangordnung gestellt, so zwar, dass eine jede Zeile verwandte Glieder in sich begreift, die zu einer und derselben Ordnungszahl, oder beziehlich zu einer und derselben Polygonzone gehörig sind. Um den präcisen Sinn dieser Eintheilung einzusehen, denke man sich anstatt φ einen der Werthe des r^{ten} Grades, die der Polygonseite mit der Ansteigungszahl r angehören, nämlich:

$$\varphi = [r]\, x^r + [r-1]\, x^{r-1} + [r-2]\, x^{r-2} + \ldots\ldots\ldots$$

substituirt, so wissen wir von dem Erfolge dieser Substitution das Nachstehende: Erstens, die Glieder in Q sowohl, wie auch in der Differentialgleichung, die der Polygonseite mit der Ansteigungszahl angehören, werden dadurch die vorherrschenden in der Gradzahl nach x. Zweitens, der zwei Differentialquotient von Q nach φ genommen, den man in der zweiten Zeile der eben aufgestellt Gleichung (743) sieht, ist nach φ um zwei Einheiten, mithin nach x um $2r$ Einheiten niedriger als Da nun φ' vom Grade $r-1$ ist, so stellt diese zweite Zeile unseres Substitutionsresultates jedesr ein Polynom vor, welches um $r+1$ Einheiten niedriger ist, als die nach x eingeleitete absteige Entwicklung des Q. Hievon macht der Fall $r = 0$ die alleinige Ausnahme, bei welchem Q um Einheiten höher ausfällt, als das unter ihm stehende Produkt. Man überzeugt sich leicht nach ei

Ueberlegung, dass es mit den folgenden Zeilen beziehlich ihrer Vorgänger dieselbe Bewandtniss habe. Der zweitheilige Ausdruck nämlich in der dritten Zeile ist, absteigend nach x entwickelt gedacht, abermals um $r+1$ Einheiten niedriger, als der in der zweiten Zeile sich befindende und diess zwar ohne Ausnahme; die vierte Zeile wieder um $r+1$ Einheiten niedriger, als die dritte u. s. w. Diese Abstufungen, die für grosse r beträchtlicher sind, als für kleine, entsprechen genau den Abständen der Polygone von einander an den verschiedenen Seiten derselben.

Hätte man nun den genauen Werth von φ, und substituirte man denselben sammt den daraus abgeleiteten: φ', φ'', ... in die Gleichung (742), so könnte sich nichts Anderes ergeben, als eine identische Gleichung. Hat man das vollständige vielwerthige φ und führt nur die Substitution von φ', φ'', ... durch, so wird eine Gleichung in φ zu Tage kommen, die sich von der algebraischen, aus der eben das vielwerthige φ gezogen worden ist, nicht wesentlich unterscheidet. Hätte man endlich die algebraische Gleichung in φ selbst, die zu der vorgelegten Differentialgleichung gehörig ist, so könnte man mittelst derselben φ', φ'', ... rational durch φ ausdrücken und es würde sich dann bei einer Behandlung, wie diejenige, die wir den vorangeschickten zwei einfachen Beispielen angedeihen liessen, wieder kein anderes Ergebniss herausstellen, als die algebraische Gleichung in φ selbst, nur noch multiplizirt vielleicht mit einem Factor, der nur x und kein φ mehr enthält. Erwägen wir nun, was das Ergebniss einer solchen Substitution von φ', φ'', ... wäre, wenn man nicht die ganze algebraische Gleichung in φ, sondern nur die obersten Coefficientenschichten derselben, etwa $r+1$ an der Zahl an jeder Polygonseite besässe, so wie diess gegenwärtig bei der $R=0$, in deren Besitze wir uns befinden, wirklich der Fall ist. Da mithin bei der Bestimmung der successiven Glieder von φ die einzelnen Coefficientenschichten der algebraischen Gleichung eingehen, so zwar, dass das erste Glied von φ lediglich durch die erste Coefficientenschichte, das zweite durch die erste und zweite Schichte, das dritte durch die erste, zweite und dritte Schichte gegeben wird u. s. w.; so dienen offenbar $r+1$ richtige Coefficientenschichten zur Bestimmung von $r+1$ Gliedern des φ, mithin auch zur Bestimmung von eben so vielen Gliedern des φ', φ'', ...

Diess vorausgesetzt, machen wir von der bereits ermittelten, aber unvollständigen Algebraischen $R=0$ den folgenden Gebrauch: Wir differenziren sie wiederholt nach allen x, sowohl nach den explicit darin vorhandenen, als nach dem in φ enthaltenen und erhalten die folgende Reihe von Gleichungen, in welchen der Kürze wegen und zur Vermeidung gebrochener Formen:

$$\frac{dR}{dx} = R', \quad \frac{dR}{d\varphi} = R_{,}, \quad \frac{d^2R}{dx^2} = R'', \; .....$$

und allgemein:

$$\frac{d^{s+t}R}{dx^s d\varphi^t} = R^{(s)}_{(t)}$$

gesetzt worden ist. Sie sind:

$$\begin{aligned}
&R = 0\\
&R' + R_{,}\varphi' = 0\\
&R'' + 2R'_{,}\varphi' + R_{,,}\varphi'^{2} + R_{,}\varphi'' = 0 \qquad (744)\\
&R''' + 3R'_{,}\varphi' + 3R'_{,,}\varphi'^{2} + R_{,,,}\varphi'^{3} + 3R'_{,}\varphi'' + 3R_{,,}\varphi'\varphi'' + R_{,}\varphi''' = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und es ergibt sich aus ihnen:

$$\begin{aligned}
&\varphi' = -\frac{R'}{R_{,}}\\
&\varphi'' = -\frac{1}{R_{,}^{3}}\left[R''R_{,}^{2} - 2R'_{,}R'R_{,} + R_{,,}R'^{2}\right]\\
&\varphi''' = -\frac{1}{R_{,}^{5}}\left[R'''R_{,}^{4} - 3R''_{,}R'R_{,}^{3} + 3R'_{,,}R'^{2}R_{,}^{2} - R_{,,,}R'^{3}R_{,} - 3R''R'_{,}R_{,}^{3} + \right. \qquad (745)\\
&\qquad\left. + 3R''R_{,,}R'R_{,}^{2} + 6R'^{2}_{,}R'R_{,}^{2} - 9R'_{,}R_{,,}R'^{2}R_{,} + 3R_{,,}^{2}R'^{3}\right]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die Unvollständigkeit der Gleichung $R = 0$, die der Voraussetzung nach nur richtig ist in den $r + 1$ obersten Coefficientenschichten, trägt sich nun in derselben Weise auch auf alle Glieder über, aus welchen die vorliegenden Formeln für $\varphi', \varphi'', \ldots\ldots$ zusammengesetzt sind, mithin auch auf die $\varphi', \varphi'', \varphi''' \ldots\ldots$ selbst in den vorliegenden sowohl, wie auch in den daraus abgeleiteten Formeln, mithin auch bei denjenigen, die sich etwa bei der folgenden allgemeinen Behandlung ergeben. Man erkiese:

$$M = q_{n-1}\varphi^{n-1} + q_{n-2}\varphi^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + q_{1}\varphi + q_{0} \qquad (746)$$

unter $q_0, q_1, \ldots\ldots q_{n-1}$ vorderhand noch unbestimmte Functionen von x verstanden, und multiplizire jetzt Zähler und Nenner des Bruches für φ' mit M, so dass sich

$$\varphi' = -\frac{R'M}{R_{,}M} \qquad (747)$$

ergibt. Da nun:

$$R_{,} = n\mathfrak{X}_{n}\varphi^{n-1} + (n-1)\,\mathfrak{X}_{n-1}\varphi^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_{1} \qquad (748)$$

besteht, so ist offenbar das Produkt $MR_{,}$ vom Grade $2n - 2$ nach φ, lässt sich aber in dieser seiner Gradzahl bis auf $n - 1$ herabbringen dadurch, dass man alle höheren Potenzen von φ, angefangen von φ^{n}, vermittelst der $R = 0$ eliminirt. Gesetzt, diess wäre geschehen, so liegt als Ergebniss ein Polynom vom Grade $n - 1$ für $MR_{,}$ vor mit den annoch unbestimmten $q_0, q_1, \ldots\ldots q_{n-1}$ in den Coefficienten und man wird diese unbestimmten Grössen jederzeit so wählen können, dass in dem Produkte $MR_{,}$ sämmtliche mit φ verbundenen Glieder $n - 1$ an der Zahl verschwinden und nur ein einziges von φ freies, lediglich x enthaltendes übrig bleibt, wobei noch leicht einzusehen ist, dass die zur Bestimmung von $q_0, q_1, \ldots\ldots q_{n-1}$ dienenden Gleichungen von linearer Form und ohne einem von diesen Unbekannten freien Gliede, mithin so gestaltet sind, dass ihnen durch algebraische und

ganze Functionen von x Genüge geleistet werden kann. Nachdem nun auf diese, oder eine andere äquivalente Weise aus dem Nenner jede Spur von φ eliminirt worden ist, thun wir dasselbe auch mit dem Zähler. Auch aus diesem werden die höheren Potenzen von φ, angefangen von φ^n mittelst der $R = 0$ herausgeschafft, wodurch sich ein neuer Zähler in φ vom Grade $n - 1$ ergibt, mithin ein Werth von φ', der die folgende Gestalt trägt:

$$\varphi' = \frac{1}{N}\left[Z_{n-1}\varphi^{n-1} + Z_{n-2}\varphi^{n-2} + \dots\dots\dots + Z_1\varphi + Z_0\right] \tag{749}$$

und auch dieses φ' ist gerade so, wie das R nur in den obersten $r + 1$ Schichten richtig. Wenn man daher das eingeklammerte Polynom des $n - 1^{\text{sten}}$ Grades mit dem üblichen Polygone umspannt, sodann aber die Quotienten:

$$\frac{Z_{n-1}}{N}, \frac{Z_{n-2}}{N}, \dots\dots\dots \frac{Z_1}{N}, \frac{Z_0}{N}$$

durch wirkliches Dividiren entwickelt, jedoch an jeder Polygonseite mit nur $r + 1$ Anfangsgliedern höchstens, so hat man einen Werth von φ', insoferne als er aus der $R = 0$ in lauter richtigen Anfangsgliedern abgeleitet werden kann.

Kehren wir nun zurück zur Gleichung (743), so wird sich von ihrem Polynome dasselbe sagen lassen. Hätten wir nämlich die genaue algebraische Gleichung in φ im Besitze und leiteten wir daraus auf die angedeutete Weise mittelst ähnlicher Formeln, wie die (745) sind, φ', φ'', φ''', ... ab, so müsste nach vollbrachter Substitution und Elimination höherer Potenzen von φ die exacte algebraische abermals zu Tage kommen, nur höchstens noch mit einem, bloss x enthaltenden Factor multiplizirt. Da wir aber die exacte Algebraische in φ nicht besitzen, sondern nur die $R = 0$, die mit derselben in $r + 1$ ersten Coefficientenschichten übereinstimmt, so wird zwar im Substitutionsresultate (743) der erste Bestandtheil, Q nämlich, als ganz zum gesuchten Polynome der algebraischen Gleichung gehörig angesehen werden können, die übrigen reihenweise aufeinanderfolgenden Bestandtheile jedoch werden mit den aus der unvollständigen $R = 0$ gezogenen φ', φ'', ... nur je in $r + 1$ Schichten als verlässlich und wirklich zur Algebraischen gehörig angesehen werden können. Diese chichtenweise untereinander geschriebenen Bestandtheile sind aber, absteigend nach x entwickelt gedacht, verschiedenen Ordnungen angehörig. Ist Q von der Ordnung k, so sind die darauffolgenden Bestandtheile beziehlich den Ordnungen $k - r - 1$, $k - 2r - 2$, $k - 3r - 3$, ... angehörig. Nimmt man daher aus Q die ersten Gliederschichten $2r + 2$ an der Zahl, die sämmtlich exact sind, weil das ganze Q exact ist, aus dem nächstfolgenden:

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}\varphi'$$

die verlässlichen $r + 1$ ersten Schichten der Glieder und lässt die übrigen Bestandtheile vorderhand noch weg, weil sie ohnehin von niedrigeren Ordnungen sind und weder auf die $2r + 2$ Anfangsglieder des φ, noch auf die $2r + 2$ ersten Coefficientenschichten der algebraischen Gleichung einen Einfluss

üben können, so ergibt sich offenbar ein zweites vollständigeres algebraisches Gleichungspolynom mit den Potenzen und Potenzprodukten von φ und x, die den Punkten der zwei obersten Polygonzonen angehörig sind, und man hat bei diesem Verfahren den Vortheil, von etwa vorhandenen gebrochenen Ansteigungszahlen r in gar keiner Weise beirrt zu werden und auch kein Glied zwei Mal zu rechnen, wenn man sich in der eben angedeuteten Weise benimmt, nämlich: man setzt in $\frac{1}{2!}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}\varphi'$, was hier in der üblichen Bezeichnungsweise durch $\frac{1}{2}Q''\varphi'$ gegeben werden mag, anstatt φ' seinen angenäherten Werth $-\frac{R'}{R_,}$, multiplizirt sodann Zähler und Nenner mit dem Polynome M, wodurch die φ aus dem Nenner wegfallen, eliminirt ferner aus dem Zähler alle höheren Potenzen von φ, angefangen von φ^n, dividirt jedes Glied des so erhaltenen Zählers durch den Nenner, der eine reine Function des x ohne φ ist, jedoch nur in denjenigen Gliedern des Quotienten, die zur zweiten Polygonzone gehörig sind, und fügt das Ergebniss zu den der ersten und zweiten Polygonzone angehörigen Gliedern des Q. Die neue angenähertere algebraische Gleichung, zu welcher man auf diese Weise gelangt, möge hingeschrieben werden, wie folgt:

$$R + S = \left[Q - \frac{1}{2}Q''\frac{R'}{R_,}\right]_2 = 0. \tag{750}$$

Der zur Klammer hinzugefügte Stellenzeiger 2 möge hier andeuten, dass nicht das vollständige eingeklammerte Polynom, sondern lediglich die zu den zwei ersten Polygonzonen gehörigen Glieder desselben unter $R + S$ zu verstehen seien.

Der erste Approximationsact wäre hiemit abgeschlossen und liefert zwar auch noch nicht die vollständige algebraische Gleichung in φ; man weiss sogar nicht einmal, ob eine solche geschlossen wirklich vorhanden sei; allein die neugewonnene $R + S = 0$ stimmt doch mit der gesuchten, wenn sie überhaupt vorhanden ist, an jeder Polygonseite in $2r + 2$ Coefficientenschichten überein und man vermag sich vermittelst derselben eine dritte zu verschaffen:

$$R + S + T = 0$$

die abermals um eine ganze Polygonzone weiter geht. Man bekömmt nämlich zuvörderst einen angenäherten Werth der φ' aus der ersten der Gleichungen (745), indem man in derselben R durch $R + S$ ersetzt, nämlich:

$$\varphi' = -\frac{R' + S'}{R_, + S_,}. \tag{751}$$

Der zweite Bestandtheil des Polynomes (743) geht hiedurch über in:

$$\frac{\varphi'}{2!}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -\frac{1}{2}Q''\frac{R' + S'}{R_, + S_,} \tag{752}$$

und ist bis auf Glieder der zweiten und dritten Zone exact. Jetzt muss ein neuer Multiplicator M für Zähler und Nenner aufgesucht werden, der zur Elimination des φ aus dem letzteren tauglich ist; sodann werden die höheren Potenzen des φ mittelst der $R + S = 0$ aus dem Zähler weggeschafft und

die Division der einzelnen Glieder dieses Zählers durch den nur x enthaltenden Nenner bis auf Glieder der zweiten und dritten Polygonzone des Quotienten durchgeführt. Jetzt geht man über zu dem dritten Bestandtheile des Polynomes (743), nämlich:

$$\frac{\varphi''}{3!}\frac{d^3Q}{d\varphi^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^2\frac{d^4Q}{d\varphi^4}=\frac{\varphi''}{3!}Q_{\prime\prime\prime}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^2 Q_{IV}. \tag{753}$$

Nachdem dieser seiner Ordnungszahl nach nur Glieder liefern kann, die zur dritten und zu den folgenden Polygonzonen gehörig sind, so wäre es überflüssig, in demselben ein genaueres φ' und φ'' zu substituiren, als das aus dem ersten Approximationsacte abgeleitete, gegeben durch die beiden ersten der Gleichungen (745). Man erhält durch eine solche Substitution:

$$\frac{1}{24R_{\prime}^3}\left\{-4Q_{\prime\prime\prime}(R''R_{\prime}^2-2R_{\prime}'R'R_{\prime}+R_{\prime\prime}R'^2)+3Q_{IV}R'^2R_{\prime}\right\} \tag{754}$$

Eliminirt man wieder aus dem Nenner jede Spur von φ, was z. B. durch Multiplication mit M^3 geschehen kann, aus dem Zähler aber alle höheren Potenzen dieses φ und dividirt dann denselben Glied für Glied durch den nur x enthaltenden Nenner, in den Quotienten lediglich Glieder der dritten Polygonzone aufnehmend, und so lässt sich endlich aus den Bestandtheilen des Q erster, zweiter und dritter Zone aus den berechneten Bestandtheilen des Ausdruckes (752) zweiter und dritter Zone und aus den ermittelten Bestandtheilen der (754) dritter Zone ein neues, noch angenäherteres Gleichungspolynom zusammenstellen, nämlich:

$$0=R+S+T=\left[Q+\frac{1}{2}Q_{\prime\prime}\frac{R'+S'}{R_{\prime}+S_{\prime}}-\frac{1}{6}\frac{Q_{\prime\prime\prime}}{R_{\prime}^3}(R''R_{\prime}^2-2R_{\prime}'R'R_{\prime}+R_{\prime\prime}R'^2)+\frac{1}{8}\frac{Q_{IV}}{R_{\prime}^3}R'^3\right]_3 \tag{755}$$

Der der Klammer angefügte Stellenzeiger 3 will hier wieder nur andeuten, dass nicht das ganze eingeschlossene Polynom, sondern nur seine zu den drei ersten Polygonzonen gehörenden Glieder unter $R+S+T$ gemeint seien.

Auf diese zweite Annäherung kann man, wenn es nothwendig sein sollte, eine dritte, dann eine vierte u. s. w. folgen lassen, und gewinnt damit die Glieder der algebraischen Gleichung zonenweise. Es ist offenbar nicht immer nothwendig, ja es erscheint vielmehr als ein sehr specieller Fall, der sich selten ereignen wird, dass man durch eine solche Reihe von Approximationen zu einem geschlossenen, mithin von selbst abbrechenden Gleichungspolynome geführt wird. Selbst dann, wenn ein solches wirklich vorhanden ist, kann man es auf diesem Wege immer noch verfehlen, weil man bei der ganzen Rechnung von der stillschweigenden Voraussetzung ausgeht, dass der erste Coefficient der gesuchten algebraischen Gleichung, der von φ^n nämlich, mit dem ersten Coefficienten der Differentialgleichung, d. h. $\mathfrak{X}_n$ identisch übereinstimme. Wir wissen aber, dass dieser erste Coefficient der Algebraischen auch andere Factoren, oder dieselben in einer anderen Anzahl enthalten könne, als der erste Coefficient der Differentialgleichung. Es lässt sich daher der Fall nicht nur denken, sondern er wird auch in der Regel vorkommen, dass man auf dem eingeschlagenen Wege nicht die algebraische Glei-

chung in ihrer einfachsten Gestalt, sondern noch multiplizirt mit gewissen Factoren und durch gewisse andere dividirt erhalten wird. Dadurch wird es geschehen, dass während der erste Coefficient der Algebraischen $\mathfrak{X}_n$ geschlossen bleibt, die folgenden aufgelöst werden in unendliche recurrirende Reihen. Da indessen die etwa vorhandene geschlossene Form in einem solchen Falle durch Multiplication mit einem bestimmten ganzen Polynome in x sich wieder herstellen lassen muss, so vermag man das Aufsuchen der geschlossenen Form der algebraischen Gleichung von dem eben beschriebenen Approximationsverfahren zu sondern. Man denkt sich nämlich das gefundene Gleichungspolynom mit einer ganzen Function von x von unbestimmter Gradzahl h, etwa mit

$$x^h + \mathfrak{A}_1 x^{h-1} + \mathfrak{A}_2 x^{h-2} + \dots\dots\dots + \mathfrak{A}_h$$

wo $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots\dots \mathfrak{A}_h$ noch unbestimmte Coefficienten bedeuten, multiplizirt, und verwendet dann diese Coefficienten so, dass im Produkte die Coefficienten in Schichten, von irgend einer derselben angefangen, verschwinden. Noch besser eignet sich zu diesem Zwecke eine unbegrenzte absteigende Reihe, die mit Eins anheben kann, wie:

$$1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \dots\dots\dots$$

weil die Multiplication mit einer solchen Multiplication und Division zugleich andeuten kann, Rechnungsoperationen, die das algebraische Gleichungspolynom nicht nur geschlossen zu machen, sondern auch auf die einfachste Gestalt zurückzuführen geeignet sind.

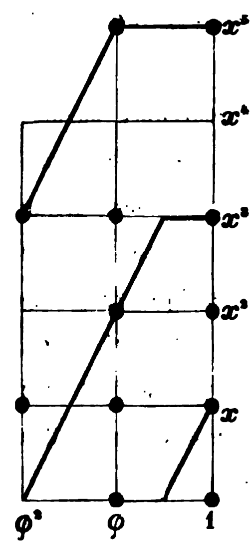
Es soll aber hiemit nicht gesagt sein, dass man eine solche Untersuchung immer nur erst nach durchgeführter Integration vornehmen könne. In jedem beliebigen Stadium der Rechnung ist es erlaubt, die gewonnene algebraische Gleichung mit einem nur x enthaltenden Factor zu multipliziren oder zu dividiren. Es kann diess geschehen gleich mit der $R = 0$ oder mit der $R + S = 0$, oder auch mit der $R + S + T = 0$, wenn sich irgend eine Veranlassung dazu bietet, d. h. um entweder die Rechnung abzukürzen, oder eine gewisse vortheilhafte Form der gesuchten algebraischen festzuhalten, z. B. die binomische. Nur so viel soll hier klar erhellen, dass das Forschen nach geschlossenen Formen etwas vom Integrationsgeschäfte Gesondertes sei.

Das Forschen nach der geschlossenen Form der algebraischen Gleichung kann also eingeleitet werden, wenn sämmtliche Gliederzonen, aus denen Q besteht, erschöpft und bereits in die Rechnung eingegangen sind. Man ist aber auch sehr oft berechtigt, es früher eintreten zu lassen, wenn die vorgängige Untersuchung namentlich Zerlegung des ersten Coefficienten $\mathfrak{X}_n$ in Factoren und Ermittlung der ihnen zugehörigen Exponenten k vermöge ihres Vorkommens in den characteristischen Gruppen einfacher Brüche, die im Verhältnisse der natürlichen Zahlen stehen, gezeigt hat, dass mit überwiegender Wahrscheinlichkeit nur eine geringe Anzahl von Factoren des $\mathfrak{X}_n$ sich auch auf den Coefficienten der algebraischen Gleichung übertragen. Bildet man nun aus denjenigen, die wirklich in den Anfangscoefficienten beider Gleichungen nothwendigerweise vorhanden sein müssen, ein Produkt, und ist dieses vom Grade s; so ist man zur Untersuchung berechtigt, ob nicht bereits vielleicht die

$s+2^{te}$ Coefficientenschichte mit den folgenden zum Verschwinden gebracht werden könne. Noch früher die Untersuchung zu beginnen, wäre vergebens.

Das auf diese Weise erkundete Verschwinden von ein Paar Coefficientenschichten begründet aber die geschlossene Beschaffenheit der Gleichung noch keineswegs; man muss vielmehr, um sich hierüber die volle Gewissheit zu verschaffen, die erhaltene Gleichung in φ, die man für eine geschlossene hält, zur Bestimmung von φ', φ'', ... auf die vorhin umständlich auseinandergesetzte Weise, jedoch genau und nicht mehr, wie dort, in Zonentheilen benützend, die erhaltenen Werthe in die vollständige Gleichung (743) einführen und sodann nachsehen, ob sie sich wieder in die der Probe unterworfene Algebraische in φ zurückverwandle. Ein Paar Beispiele mögen dieses Verfahren erläutern. Das erste sei das unter (700) Seite 514 angeführte, nämlich:

$$x(x^2-3a^2)y''+\left[2x^5-8a^2x^3-2x^2+6a^4x+3a^2\right]y'+\left[a^2x^5-2a^4x^3-a^2x^2-3a^6x-3a^4\right]y=0 \quad (756)$$



Den drei Coefficienten entsprechen drei Ordinaten, der Gradzahl fünf der Coefficienten aber sechs horizontale Linien im Abstande gleich Eins, der ganzen Differentialgleichung mithin folgende Zeichnung:

Zu den Durchschnittspuncten der Linien sind hier zugleich die Glieder des Gleichungspolynomes angefügt, nachdem y, y' und y'' in 1, φ und φ^2 verwandelt worden, wodurch Q gebildet wird, und es gehören zur ersten und höchsten Polygonzone die folgenden:

$$R=(x^3-3a^2x)\,\varphi^2+(2x^5-8a^2x^3)\,\varphi+a^2x^5 \quad (757)$$

Wir nehmen also in erster Annäherung:

$$R=0$$

als algebraische Gleichung an. Es wird zudem im gegenwärtigen Falle sein:

$$Q=(x^3-3a^2x)\,\varphi^2+(2x^5-8a^2x^3-2x^2+6a^4x+3a^2)\,\varphi+a^2x^5-2a^4x^3-a^2x^2-3a^6x-3a^4 \quad (758)$$

$$Q_{\prime\prime}=\frac{d^2Q}{d\varphi^2}=2\,(x^3-3a^2x)$$

Nun erhalten wir aus der $R=0$:

$$\varphi'=-\frac{R'}{R_{\prime}}=-\frac{(3x^2-3a^2)\,\varphi^2+(10x^4-24a^2x^2)\,\varphi+5a^2x^4}{(2x^3-6a^2x)\,\varphi+2x^5-8a^2x^3} \quad (759)$$

oder nach geschehener Multiplication von Zähler und Nenner mit dem letzteren und Elimination aller höheren Potenzen von φ von der zweiten angefangen und gleich multiplizirt mit $\frac{1}{2}Q_{\prime\prime}$:

$$\frac{1}{2}Q_{\prime\prime}\varphi'=-\frac{1}{2}Q_{\prime\prime}\frac{R'}{R_{\prime}}=\frac{\left[8x^{12}-84a^2x^{10}+324a^4x^8-456a^6x^6\right]\varphi+4a^2x^{12}-8a^4x^{10}}{4x^{10}-36a^2x^8+76a^4x^6} \quad (760)$$

Jetzt wird ein jedes der beiden Glieder des Zählers dividirt durch den Nenner, jedoch nur in solchen Gliedern des Quotienten, die in der zweiten Polygonzone Platz finden. Die erste Division hat daher ausgeführt zu werden in drei Gliedern, denjenigen nämlich mit x^2, x^1, x^0, weil diese noch in die zweite Polygonzone fallen; die zweite Division aber nur in zwei Gliedern, nämlich mit x^2 und x; ein Glied mit x^0 ist nicht hinzuzufügen, weil es zur zweiten Polygonzone nicht gehört. Diese beiden so erzielten Quotienten geben:

$$\left[-\frac{1}{2}\,Q_{\prime\prime}\,\frac{R'}{R_{\prime}}\right]_2 = (2x^2 - 3a^2)\,\varphi + a^2x^2 \tag{761}$$

Dieses, hinzugefügt zu denjenigen Gliedern von Q, die der ersten und zweiten Polygonzone angehörig sind, ergibt die algebraische Gleichung in zweiter Annäherung, nämlich:

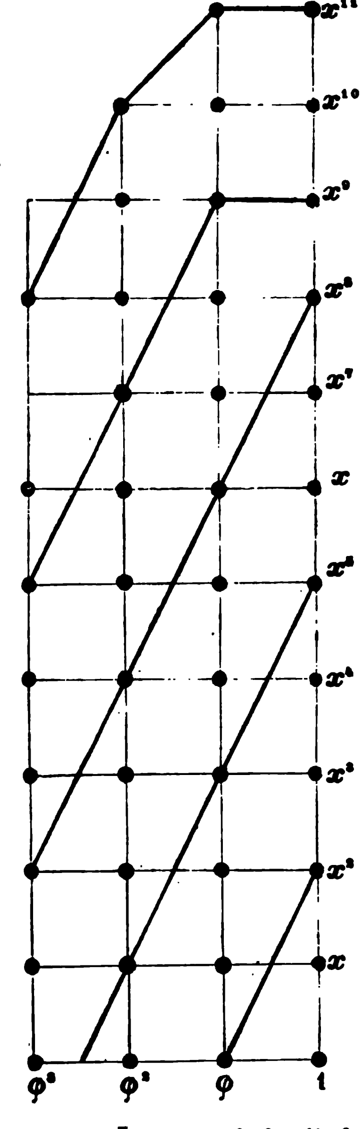
$$\left[Q - \frac{1}{2}\,Q_{\prime\prime}\,\frac{R'}{R_{\prime}}\right]_2 = (x^3 - 3a^2x)\,\varphi^2 + (2x^5 - 8a^2x^3 + 6a^4x)\,\varphi + a^2x^5 - 2a^4x^3 - 3a^6x = 0. \tag{762}$$

Sie ist bereits die gesuchte, denn wenn man zu einer ferneren dritten Annäherung schreitet, zu diesem Zwecke auf dem betretenen Wege φ' sucht und dasselbe in die (743) substituirt, so erhält man ganz genau die vorliegende algebraische Gleichung. Es ist jetzt nur noch die Frage, ob man sie in ihrer einfachsten Gestalt gewonnen habe und ob sie nicht vielmehr abgekürzt zu werden vermöge durch einen blos x enthaltenden Factor, der allen Coefficienten eigenthümlich ist. Um diess zu untersuchen, mag man hier den ersten Coefficienten zerlegen in zwei Factoren, nämlich in x und $x^2 - 3a^2$. Von ihnen ist der erste allenthalben ersichtlich und auch die Anwesenheit des zweiten gibt sich dadurch kund, dass für $x^2 = 3a^2$ alle Coefficienten verschwinden. Wir dividiren also durch den ersten Coefficienten und erhalten hiermit die Gleichung in φ in ihrer einfachsten Gestalt:

$$\varphi^2 + (2x^2 - 2a^2)\,\varphi + a^2x^2 + a^4 = 0. \tag{763}$$

Als zweites Beispiel nehmen wir die folgende ziemlich complicirt aussehende Differentialgleichung der dritten Ordnung:

$$\begin{aligned}
&[2x^8 - 16a^2x^6 + (4a^3 - 1)\,x^5 + (42a^4 + a)\,x^4 - (24a^5 - 3a^2)\,x^3 - (36a^6 + 9a^3)\,x^2 + 36a^7x + 18a^5]\,y''' + \\
&+ [4x^{10} - 2ax^9 - 34a^2x^8 + (24a^3 - 12)\,x^7 + (96a^4 + 3a)\,x^6 - (94a^5 - 72a^2)\,x^5 - (90a^6 + 30a^3 - 2)\,x^4 + \\
&+ (132a^7 - 126a^4 - a)\,x^3 + (81a^5 - 9a^2)\,x^2 - (36a^9 - 54a^6)\,x - 54a^7]\,y'' + \\
&+ [-4ax^{11} + 6a^2x^{10} + (36a^3 - 4)\,x^9 - (58a^4 - 6a)\,x^8 - (104a^5 - 17a^2)\,x^7 + (198a^6 - 15a^3 + 12)\,x^6 + \\
&+ (80a^7 + 4a)\,x^5 - (270a^8 + 76a^5 + 71a^2)\,x^4 + (60a^9 - 45a^6 - 60a^3 - 2)\,x^3 + (108a^{10} + 207a^7 + 117a^4)\,x^2 - \\
&- (36a^{11} - 144a^8 - 9a^2)\,x - (18a^9 + 54a^6 - 18a^3)]\,y' + \\
&+ [-2a^3x^{11} + 2a^4x^{10} + (14a^5 - 2a^2)\,x^9 - (18a^6 - 3a^3)\,x^8 - (22a^7 + 2a^4)\,x^7 + (40a^8 + 3a^5 + 6a^2)\,x^6 + \\
&- (26a^9 - 64a^6 - 2a^3)\,x^5 - (6a^{10} + 81a^7 - 18a^4)\,x^4 + (48a^{11} - 102a^8 - 32a^5 - a^2)\,x^3 - (72a^{12} - 117a^9 + 126a^6)\,x^2 + \\
&+ (36a^{13} - 54a^{10} + 90a^7 - 9a^4)\,x + 54a^{11} + 54a^8 + 18a^5]\,y = 0
\end{aligned} \tag{764}$$



Ihr entspricht die nebenstehende carrirte Zeichnung mit fünf darauf ersichtlichen Polygonzonen:

Die Glieder von Q, deren Aggregat zugleich der erste angenäherte Werth des algebraischen Gleichungspolynomes ist und gleich R, geben nun, entnommen der ersten Polygonzone:

$$R = (2x^8 - 16a^2x^6)\,\varphi^3 + (4x^{10} - 2ax^9 - 34a^2x^8)\,\varphi^2 \\ - (4ax^{11} - 6a^3x^{10})\,\varphi - 2a^3x^{11} + 2a^4x^{10} = 0 \tag{765}$$

Um etwas Abwechslung in die Rechnung zu bringen und zugleich zu zeigen, was man sich hier alles erlauben kann, mag bemerkt werden, dass man anstatt der $R=0$ auch die folgende andere schreiben kann, die aus ihr hervorgeht durch Division mittelst des ersten Coefficienten, durchgeführt in drei Gliedern des Quotienten bei dem zweiten derselben und in nur zweien bei den übrigen:

$$R = \varphi^3 + (2x^2 - ax - a^2)\,\varphi^2 \\ - (2ax^3 - 3a^3x^2)\,\varphi - a^3x^3 + a^4x^2 = 0 \tag{766}$$

Hiezu ist noch:

$$Q_{,,} = 6\left[2x^8 - 16a^2x^6 + (4a^3-1)x^5 + (42a^4+a)x^4 - (24a^5-3a^2)x^3 - (36a^6+9a^3)x^2 + 36a^7x + 18a^8\right]\varphi + \\ + 2\left[4x^{10} - 2ax^9 - 34a^2x^8 + (24a^3 - 12)x^7 + (96a^4 + 3a)\,x^6 - (94a^5 - 72a^2)\,x^5 - \right. \\ \left. - (90a^6 + 30a^3 - 2)x^4 + (132a^7 - 126a^4 - a)x^3 + (81a^8 - 9a^5)x^2 - (36a^9 - 54a^6)x - 54a^7\right] \tag{767}$$

$$Q_{,,,} = 6\left[2x^8 - 16a^2x^6 + (4a^3-1)\,x^5 + (42a^4+a)\,x^4 - (24a^5 - 3a^2)\,x^3 - (36a^6+9a^3)\,x^2 + 36a^7x + 18a^8\right]$$

Nun berechnen wir φ' aus der $R=0$ und erhalten zunächst:

$$\varphi' = -\frac{R'}{R_,} = -\frac{\varphi^3 + (4x - a)\,\varphi^2 - (6ax^2 - 6a^3x)\,\varphi - 3a^3x^2 + 2a^4x}{3\varphi^2 + 2\,(2x^2 - ax - a^2)\,\varphi - 2ax^3 + 3a^3x^2} \tag{768}$$

Um jetzt zur Elimination von φ schreiten zu können, und zwar zunächst aus dem Nenner dieses Ausdruckes, verschaffen wir uns zuvörderst allgemeine Formeln für den Werth des Multiplicators, mit welchem man zu diesem Zwecke Zähler und Nenner dieses Bruches zu multipliciren hat. Es sei desshalb ganz allgemein:

$$R = A\varphi^3 + B\varphi^2 + C\varphi + D$$
$$R_{,} = 3A\varphi^2 + 2B\varphi + C$$

und der gesuchte Multiplicator

$$M = q_2\varphi^2 + q_1\varphi + q_0$$

Bilden wir jetzt das Produkt MR, und eliminiren aus demselben vermittelst der $R=0$, φ^4 und φ^3, so dass nur φ^2 und φ in demselben zurückbleiben, und setzen die Coefficienten dieser noch übrigen Potenzen von φ der Nulle gleich, so ergeben sich zur Bestimmung von q_2, q_1, q_0 die folgenden zwei Gleichungen:

$$(B^2 - 2AC)\, q_2 - ABq_1 + 3A^2q_0 = 0$$
$$(BC - 3AD)\, q_2 - 2ACq_1 + 2\, ABq_0 = 0$$

Sie bestimmen eigentlich $\frac{q_2}{q_0}$ und $\frac{q_1}{q_0}$; es kann ihnen jedoch durch ungebrochene Werthe von q_2, q_1, q_0 Genüge geleistet werden, und diese sind:

$$q_2 = 2A^2B^2 - 6A^3C,\ q_1 = 2AB^3 - 7A^2BC + 9A^3D,$$
$$q_0 = AB^2C - 4A^2C^2 + 3A^3BD \tag{769}$$

und es geht mit ihnen das Produkt MR über in den folgenden Ausdruck, der kein φ mehr enthält:

$$MR_1 = BDq_2 - 3ADq_1 + ACq_0 = -4A^3B^3D + 18A^3BCD - 27A^4D^2 + A^2B^2C^2 - 4A^3C^3$$

Jetzt kehren wir zurück zum Werthe (768) von φ', multipliziren denselben noch mit $\frac{1}{2}Q_{,,}$, das wir aus der Formel (767) nehmen, multipliziren sodann Zähler und Nenner mit M und eliminiren endlich alle höheren Potenzen von φ, angefangen von φ^3, bemerkend, dass im vorliegenden Falle

$$A = 1,\ B = 2x^2 - ax - a^2,\ C = -2ax^3 + 3a^2x^2,\ D = -a^3x^3 + a^4x^2$$

bestehe. Diese Rechnung braucht im Nenner sowohl, wie auch in den drei mit φ^2, φ, 1 verbundenen Gliedern des Zählers in höchstens drei von Null verschiedenen Anfangsgliedern durchgeführt zu werden und gibt in dieser Weise:

$$-\frac{1}{2}Q_{,,}\frac{R'}{R_{,}} = \frac{(-320a^2x^{17} + 1190a^4x^{15})\,\varphi^2 + (64a^2x^{19} - 64a^3x^{18} - 800a^4x^{17})\,\varphi + 32a^4x^{19}}{16a^2x^{10} - 112a^4x^8} \tag{770}$$

Nun geben die drei Bestandtheile des Zählers, je durch den Nenner dividirt und zwar, wie es die zweite Polygonzone verlangt, das Glied mit φ^2 und φ in drei Stellen des Quotienten, das dritte aber

nur in einer einzigen, die der zweiten Polygonzone angehörigen Anfangsglieder des hier berechneten $\frac{1}{2} Q_{\prime\prime} \frac{R'}{R_{\prime}}$. Wir haben ihr Aggregat bezeichnet mit:

$$\left[-\frac{1}{2} Q_{\prime\prime} \frac{R'}{R_{\prime}}\right]_2 = -(20x^7 + 66a^2x^5)\varphi^2 + (4x^9 - 4ax^8 - 22a^2x^7)\varphi + 2a^2x^9 \qquad (771)$$

Hiezu muss jetzt addirt werden das zweien Polygonzonen angehörige $[Q]_2$, welches ist:

$$\begin{aligned}[Q]_2 = & \left\{2x^8 - 16a^2x^6 + (4a^3 - 1)x^5 + (42a^4 + a)x^4 + (-24a^5 + 3a^2)x^3\right\}\varphi^3 + \qquad (772)\\ & + \left\{4x^{10} - 2ax^9 - 34a^2x^8 + (24a^3 - 12)x^7 + (96a^4 + 3a)x^6 - (94a^5 - 72a^2)x^5\right\}\varphi^2 + \\ & + \left\{-4ax^{11} + 6a^2x^{10} + (36a^3 - 4)x^9 - (58a^4 - 6a)x^8 - (104a^5 - 17a^2)x^7\right\}\varphi - \\ & - 2a^3x^{11} + 2a^4x^{10} + (14a^5 - 2a^2)x^9\end{aligned}$$

Die Summe ist:

$$\begin{aligned}\left[Q - \frac{1}{2} Q_{\prime\prime} \frac{R'}{R_{\prime}}\right]_2 = & \left[2x^8 - 16a^2x^6 + (4a^3 - 1)x^5 + (42a^4 + a)x^4 - (24a^5 - 3a^2)x^3\right]\varphi^3 + \\ & + \left[4x^{10} - 2ax^9 - 34a^2x^8 + (24a^3 - 32)x^7 + (96a^4 + 3a)x^6 - (94a^5 - 6a^2)x^5\right]\varphi^2 + \\ & + \left[-4ax^{11} + 6a^2x^{10} + 36a^3x^9 - (58a^4 - 2a)x^8 - (104a^5 + 5a^2)x^7\right]\varphi - \\ & - 2a^3x^{11} + 2a^4x^{10} + 14a^5x^9\end{aligned}$$

und kann genommen werden für $R + S$. Allein man kann auch hier wieder anstatt derselben den Quotienten nehmen, der sich ergibt, wenn man diese Summe durch den Coefficienten ihres ersten Gliedes dividirt. Thut man diess, so gelangt man zur folgenden algebraischen Gleichung in zweiter Annäherung:

$$0 = R + S = \varphi^3 + \varphi^2(2x^2 - ax - a^2) + \varphi(-2ax^3 + 3a^2x^2 + 2a^3x - a^4) - a^3x^3 + a^4x^2 - a^5x \qquad (773)$$

Die grosse Anzahl der bei dieser Rechnung bereits verschwindenden letzten Glieder der Coefficienten von φ^2 und φ deutet bereits hin auf eine Gleichung mit geschlossenen Coefficienten. In der That beweist die nächste Approximation, auf dieselbe Weise durchgeführt, indem man von der algebraischen $R + S = 0$ ausgeht, dass wirklich in geschlossener Gestalt die Algebraische:

$$0 = R + S + T = \varphi^3 + \varphi^2(2x^2 - ax - a^2) + \varphi(-2ax^3 + 3a^2x^2 + 2a^3x - a^4) - a^3x^3 + a^4x^2 - a^5x + a^6 \qquad (774)$$

der vorgelegten Differentialgleichung entspreche und zwar ohne dass irgend welche Bedingungen zwischen den constanten Parametern zu erfüllen wären.

Um die verschiedenen bei solchen Rechnungen zulässigen Kunstgriffe zu erschöpfen, legen wir uns noch die folgende Differentialgleichung der vierten Ordnung vor, deren Abkunft von einer

algebraischen des vierten Grades und zwar von einer binomischen solchen beinahe unmittelbar in die Augen fällt:

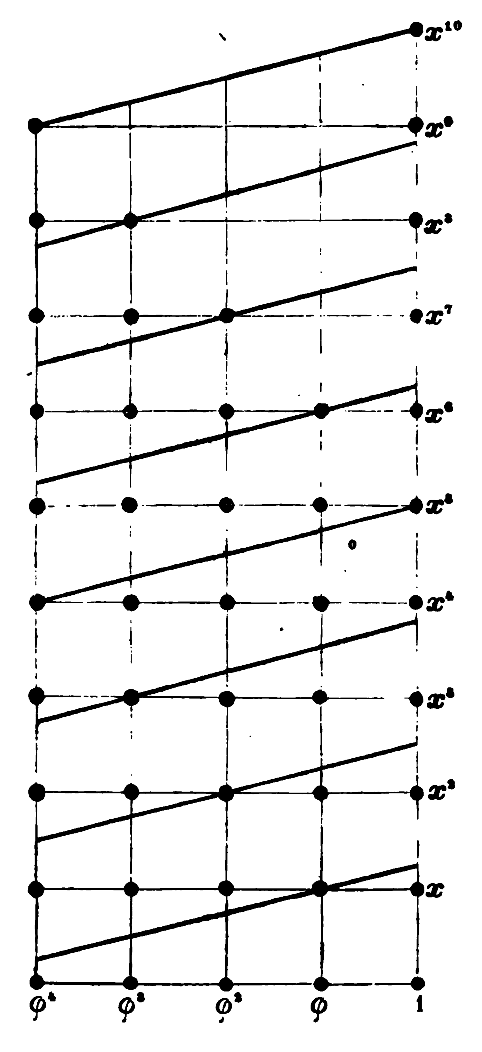
$$\begin{aligned}&32(x+a)^3(x^2+b^2)^3 y^{IV} - 48(x+a)^2(x^2+b^2)^2(x^2+2ax-b^2)y''' + (x+a)(x^2+b^2)\left[54x^4+216ax^3+\right.\\ &+(152a^2-172b^2)x^2-216ab^2x-64a^2b^2-10b^4\left.\right]y'' - \left[33x^6+198ax^5+(272a^2-223b^2)x^4+\right.\\ &+(112a^3-548ab^2)x^3-(492a^2b^2-3b^4)x^2-(152a^3b^2-46ab^4)x+28a^2b^4-5b^6\left.\right]y' -\\ &-32(x+a)^2(x^2+b^2)^4 y = 0\end{aligned} \tag{775}$$

Den Factoren $x+a$ in den Anfangscoefficienten entsprechen folgende drei Werthe des Exponenten k:

$$k = -\frac{3}{4}, -\frac{6}{4}, -\frac{9}{4}$$

aber auch den Factoren $x+b\sqrt{-1}$ und $x-b\sqrt{-1}$ entsprechen ähnliche Werthe von k, nämlich:

$$k = -\frac{5}{4}, -\frac{10}{4}, -\frac{15}{4}.$$



Sie deuten durch ihre gebrochene Beschaffenheit und durch ihr Verhältniss, welches jenes der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ist, beinahe mit Sicherheit auf eine algebraische Gleichung und zwar auf eine solche, deren erster Coefficient $x+a$ ist. Wiewohl nun anderseits diese Differentialgleichung wegen der sehr geringen Ansteigungszahl in ihren Coefficienten, die nur $\frac{1}{4}$ beträgt, keine sehr vortheilhafte d. h. schnell approximirende Rechnung verspricht, so ist man doch der anderweitigen Kennzeichen von Irrationalgrössen wegen berechtigt, die hier auseinandergesetzte Methode in Anwendung zu bringen. Die den Coefficientenbau vorstellende carrirte Zeichnung mit ihren Polygonzonen von der gemeinschaftlichen Breite gleich $\frac{5}{4}$, ist die nebenstehende:

Nachdem man das Polynom der Differentialgleichung durch Substitution von φ^4, φ^3, φ^2, φ, 1 anstatt y^{IV}, y''', y'', y', y verwandelt hat in Q, sieht man, dass lediglich vier Glieder dieses Q zur ersten Polygonzone gehörig seien und R bilden, nämlich:

$$R = (32x^9 + 96ax^8)\varphi^4 - 32x^{10} - 64ax^9$$

Man kann nun nicht nur, durch $32x^8$ dividirend, einfacherer Weise:

$$R = (x + 3a)\varphi^4 - x^2 - 2ax$$

annehmen, sondern man kann noch die Bemerkung anfügen, dass, weil $x + 3a$ schwerlich Factor des ersten Coefficienten sein kann, wohl aber wahrscheinlicherweise $x + a$, man sich eine Multiplication mit $\frac{x - 2a}{x}$ gestatten könne, deren Resultat in nur je zwei Gliedern hingezeichnet, so aussieht:

$$R = (x + a)\,\varphi^4 - x^2 = 0$$

Eine solche Multiplication, die die Erzeugung eines ersten Coefficienten der algebraischen Gleichung, von dem man vermuthet, dass er derselben angehöre, zum Zwecke hat, ist immer erlaubt, nur darf man das Produkt nicht nehmen in einer grösseren Gliederzahl, als den bereits in Rechnung gezogenen Polygonzonen wirklich angehören. Wir ziehen aus der erkiesenen $R = 0$

$$R' = \varphi^4 - 2x,\ R_{,} = 4\,(x + a)\,\varphi^3,\ \ \varphi' = -\frac{R'}{R_{,}} = \frac{-\varphi^5 + 2x\varphi}{4\,(x + a)\,\varphi^4} = \frac{\varphi}{4x}\left[1 + \frac{a}{x}\right]$$

Hiezu kömmt noch das der ersten Polygonzone entnommene

$$[Q_{,,}]_1 = 12\varphi^2\,[32x^9 + 96ax^8]$$

mit welchem man zunächst

$$\left[\frac{1}{2}Q_{,,}\varphi'\right]_2 = \frac{3\varphi^3}{2}\,[32x^8 + 128ax^7]$$

erhält. Hiezu gewinnt man dann diejenigen Glieder von Q, die der ersten und zweiten Polygonzone angehören, in ein Aggregat zusammenstellend:

$$[Q]_2 = (32x^9 + 96ax^8 + 96\,(a^2 + b^2)\,x^7)\,\varphi^4 - (48x^8 + 192ax^7)\,\varphi^3 -$$
$$- 32x^{10} - 64ax^9 - (32a^2 + 128b^2)\,x^8$$

Mithin erhält man jetzt durch Addition:

$$\left[Q + \frac{1}{2}\,Q_{,,}\,\varphi'\right]_2 = (32x^9 + 96ax^8 + 96\,(a^2 + b^2)\,x^7)\,\varphi^4 - 32x^{10} - 64ax^9 - (32a^2 + 128b^2)\,x^8$$

was man nehmen könnte für $R + S$. Man thut jedoch besser, wenn man, die Form der $R = 0$ beibehaltend, eine Multiplication aller Coefficienten mit dem Bruche

$$\frac{x + a}{32x^9 + 96ax^8 + 96\,(a^2 + b^2)\,x^7}$$

einleitet, und den erhaltenen Quotienten in nur drei Gliedern aufschreibt. Hiedurch ergibt sich:

$$0 = R + S = (x + a)\,\varphi^4 - x^2 - b^2$$

Die Vermuthung liegt hier nahe, dass diess bereits die gesuchte algebraische Gleichung sei und wirklich erhält man, φ', φ'', φ''' aus derselben rechnend und die gefundenen rationalen Werthe in die (743) substituirend, nach Elimination der höheren Potenzen von φ, angefangen von φ^4, eine identische Gleichung.

Es wird zwar dieses Integrationsverfahren nicht immer ebenso leicht zum Ziele führen, wie in den vorgelegten Beispielen, allein man hat doch immer mit demselben alle Mittel zur Hand, um die geschlossene Form des Integrales, falls sie irgendwie vorhanden ist, jedesmal zu erhalten und nie zu verfehlen. Es sind nämlich mehrere Arten geschlossener Formen denkbar bei einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung. Die erste, aber auch die am seltensten vorkommende wäre z. B. die folgende:

$$y = C_1 e^{\int \varphi_1 dx} \psi_1 + C_2 e^{\int \varphi_2 dx} \psi_2 + \ldots\ldots + C_n e^{\int \varphi_n dx} \psi_n$$

allwo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_n$ und $\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots \psi_n$ geschlossene algebraische Functionen bedeuten. Weit öfter wird es sich ereignen, dass durch directe asymptotische Integration nur ein einziges particuläres Integral in geschlossener Form zu ermitteln ist, z. B.

$$y = C_1 e^{\int \varphi_1 dx} \psi_1;$$

befreit man aber die Gleichung von demselben vermittelst der Substitution:

$$y = C e^{\int \varphi_1 dx} \psi_1 \int z dx$$

wodurch sie sich in eine andere von der Ordnung $n - 1$ nach z umwandelt, so ergibt sich von dieser letzteren wieder ein geschlossenes Integral, etwa

$$z = e^{\int \varphi_2 dx} \psi_2$$

Die Befreiung von diesem letzteren durch die ähnliche Substitution:

$$z = e^{\int \varphi_2 dx} \psi_2 \int u dx$$

liefert wieder eine der Ordnungszahl nach um Eins niedrigere Differentialgleichung in u, die wieder ein geschlossenes particuläres Integral haben kann u. s. w. Geht diess so fort, bis man zu einer Differentialgleichung der ersten Ordnung gelangt, die sich stets geschlossen integriren lässt, so gewinnt man eine zweite, weit öfter vorhandene geschlossene Form des allgemeinen Integrales, die $n - 1$ Integralzeichen enthält und die Gestalt trägt:

$$y = C e^{\int \varphi_1 dx} \psi_1 \int e^{\int \varphi_2 dx} \psi_2 dx \int e^{\int \varphi_3 dx} \psi_3 dx \ldots\ldots \int e^{\int \varphi_n dx} \psi_n dx$$

in welcher die erstere als specieller Fall enthalten ist, derjenige nämlich, wo sich alle Integrationen in geschlossener Form ausführen lassen. Man erhält aber noch eine geschlossene Form dritter Art, wenn sich nämlich die particulären Integrale gruppenweise zusammenstellen lassen, so zwar, dass die einer jeden Gruppe, die aus s-Theilen zusammengesetzt sein mag, von der Gestalt

$$e^{\int \varphi_1 dx},\ e^{\int \varphi_2 dx},\ \ldots\ldots e^{\int \varphi_s dx}$$

zugehörigen Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_s$ durch eine algebraische Gleichung des s^{ten} Grades in φ zusammenhängen. Findet diess Statt, so wird dadurch die früher erwähnte, mit unbestimmten Integralzeichen ausgestattete Form mindestens für die s-gliedrige Gruppe ausgeschlossen, weil sich dann sämmtliche Integrationen wirklich in geschlossener Gestalt ausführen lassen müssen, wie diess bei einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung umständlich nachgewiesen worden ist und sich auch

bei höheren Ordnungen nachweisen lässt. Man wird zwar immer noch unbestimmte Integralzeichen haben können in der allgemeinen Integralformel, aber es wird sich die ganze s-gliedrige Gruppe irrationaler Integrale unter einem einzigen Integralzeichen vereinigt finden.

Endlich ist noch als geschlossene Form die eines bestimmten Integrales zu erwähnen. Sie kommt vor, wenn sich die Hilfsgleichung in geschlossener Gestalt integriren lässt, was nicht allgemein zu sein braucht, indem hiezu oft ein einziges particuläres Integral oder ein paar solche der Hilfsgleichung hinreichen. Für den mit der Natur der Differentialgleichungen vertrauten Analysten bieten die vorgetragenen Integrationsmethoden Mittel genug, die geschlossenen Formen der particulären Integrale, so oft sie vorhanden sind, entweder einzeln oder gruppenweise aufzufinden. Dass diess manchmal mit nicht unerheblichen Rechnungsentwicklungen verknüpft ist, liegt in der Natur der Sache und ist bei den algebraischen Gleichungen auch nicht anders. Dem Werthe der Methoden selbst kann diess aber keinen Eintrag thun, und bewirkt nur, dass die Integration einer Differentialgleichung in der Regel zu betrachten ist als eine ernste Unternehmung, zu der sich schwerlich Jemand entschliessen wird bei einer willkürlich erkiesenen Differentialgleichung ohne sonstiger wissenschaftlicher Bedeutung, die man also aufsparen wird zu ernsten Zwecken der Wissenschaftsforschung.

§. 16.

Systeme von mehreren linearen Differentialgleichungen mit ebenso vielen abhängigen und einer unabhängigen Veränderlichen.

Die Fälle sind zwar nicht selten, wo die Auflösung eines mechanischen oder eines physikalischen Problemes in einer einzigen linearen Differentialgleichung enthalten ist. Noch öfter kommt vor, dass ursprünglich zwar mehrere solche Differentialgleichungen vorliegen, dass man sie aber durch eine entsprechende Behandlung auf eine einzige zurückzuführen vermag, von der Art derjenigen, deren Integration bisher den Gegenstand unserer sorgfältigen Betrachtungen bildete. Allein es fehlt auch an anderen Fällen nicht, wo man zu Systemen mehrerer Differentialgleichungen mit einer einzigen unabhängigen Veränderlichen, die entweder die Zeit ist, oder eine Coordinate, geführt wird. Ihre Anzahl, die auch zugleich die Anzahl der abhängigen Veränderlichen ist, damit ein bestimmtes Problem vorliege, ist zumeist drei oder ein Vielfaches von drei.

Ein Werk über die Integration von Differentialgleichungen kann nicht als abgeschlossen betrachtet werden, wenn es nicht auch die Behandlungsweise solcher Systeme lehrt und dieselben hiemit zu ebenso durchsichtigen analytischen Gebilden macht, wie einzelne Differentialgleichungen sind, geradeso, wie auch die Theorie der algebraischen Gleichungen Systeme von Gleichungen mit mehreren Unbekannten zu berücksichtigen hat, und es ist natürlich, dass man bei der durchgreifenden Aehnlichkeit dieser zwei verschiedenen Wissenszweige auch an dasselbe Mittel denkt, das vorgesetzte Ziel zu erreichen, nämlich die Elimination. Und in der That liesse sich diese jederzeit in einfacher Weise

so durchführen, dass man dabei nicht in einen unnützen Rechenaufwand verwickelt wird, so wäre es ganz überflüssig, nach anderen Mitteln auch nur zu suchen.

Es ist daher erspriesslich, das Eliminationsproblem, insoferne es auf Systeme von Differentialgleichungen Bezug hat, vor allem Anderen zum Gegenstande der Betrachtungen zu erheben.

Um von dem einfachsten Falle anzuheben, nehmen wir an, es seien nur zwei Differentialgleichungen mit nur zwei abhängigen Veränderlichen ξ und η, und einer unabhängigen x gegeben, beide der Form nach linear und mit variablen Coefficienten. Denn das Eliminiren aus Gleichungen mit constanten Coefficienten ist schon vielfach in Lehrbüchern und in anderen Werken abgehandelt worden, daher sich hier davon absehen lässt. Die zwei Gleichungen seien:

$$\text{(776)} \quad \begin{aligned} &\underset{1}{\mathfrak{X}}_\lambda \xi^{(\lambda)} + \underset{1}{\mathfrak{X}}_{\lambda-1}\xi^{(\lambda-1)} + \dots\dots + \underset{1}{\mathfrak{X}}_0 \xi + \underset{1}{\mathfrak{Y}}_\mu \eta^{(\mu)} + \underset{1}{\mathfrak{Y}}_{\mu-1}\eta^{(\mu-1)} + \dots\dots + \underset{1}{\mathfrak{Y}}_0\eta = 0 \\ &\underset{2}{\mathfrak{X}}_\sigma \xi^{(\sigma)} + \underset{2}{\mathfrak{X}}_{\sigma-1}\xi^{(\sigma-1)} + \dots\dots + \underset{2}{\mathfrak{X}}_0 \xi + \underset{2}{\mathfrak{Y}}_\tau \eta^{(\tau)} + \underset{2}{\mathfrak{Y}}_{\tau-1}\eta^{(\tau-1)} + \dots\dots + \underset{2}{\mathfrak{Y}}_0\eta = 0 \end{aligned}$$

In ihnen bedeuten $\underset{1}{\mathfrak{X}}_\lambda$, $\underset{1}{\mathfrak{X}}_{\lambda-1}$, ... $\underset{1}{\mathfrak{X}}_0$, ... $\underset{1}{\mathfrak{Y}}_\mu$, ... $\underset{1}{\mathfrak{Y}}_0$ algebraische und ganze Functionen von x. Um nun die Eliminationen irgend einer der beiden abhängigen Veränderlichen, z. B. der ξ, zu bewerkstelligen und zur Eliminationsgleichung in η zu gelangen, kann man auf folgende Weise verfahren: Man differenzire die erste dieser Gleichungen σ-Mal nach allen x, so bekommt man aus ihr neue Gleichungen σ an der Zahl, die mit eben dieser ersten zusammen deren $\sigma + 1$ geben. Auf dieselbe Weise differenzire man die zweite λ-Mal nach allen x und man wird aus derselben und mit ihr $\lambda + 1$ fernere Gleichungen haben, die mit den aus der ersteren abgeleiteten $\lambda + \sigma + 2$ solche geben, in denen ξ, ξ', ξ'' ..... $\xi^{(\lambda+\sigma)}$, welche $\lambda + \sigma + 1$ an der Zahl sind, vorkommen werden. Man eliminirt sie nun aus den $\lambda + \sigma + 2$ Gleichungen und erhält eine einzige Eliminationsgleichung, aus welcher jede Spur von ξ verschwunden ist. Auch die Ordnungszahl dieser letzteren lässt sich bestimmen. Sie ist nämlich offenbar die grössere der beiden Zahlen $\mu + \sigma$ und $\tau + \lambda$. In theoretischer Beziehung und wenn man von den langwierigen Rechnungen absieht, hat dieses Verfahren nicht die geringste Schwierigkeit und es ist auch klar, dass man zu einer Eliminationsgleichung gelangen werde mit Coefficienten von derselben Beschaffenheit, wie in den vorgelegten, nämlich ganze algebraische Functionen von x, wenn in den vorgelegten Differentialgleichungen solche vorhanden sind.

Vermag man aber aus zwei Gleichungen jede Spur einer Veränderlichen, etwa ξ, durch Differenziren und Eliminiren herauszuschaffen, so geht diess auch mit einer beliebigen Anzahl n von Gleichungen. Man eliminirt nämlich zuvörderst ξ aus der ersten und zweiten, dann aus der ersten und dritten u. s. w., endlich aus der ersten und n^{ten} und erhält so Eliminationsgleichungen $n-1$, in welchen kein ξ mehr, sondern nur η, ζ, ... vorhanden sind. Aus diesen $n-1$ Gleichungen eliminirt man ebenso jede Spur von η u. s. w., bis man endlich zu einer einzigen Eliminationsgleichung mit nur einer einzigen abhängigen Veränderlichen gelangt. So leicht diess aber gesagt ist, so mühevoll ist meistentheils die Durchführung des Verfahrens selbst. Auch ist damit nicht viel gewonnen, dass man, anstatt eine Reihe successiver Eliminationen der verschiedenen Variablen vorzunehmen, das Ge-

schäft mit einem einzigen Schlage zu beendigen sucht, bei einem Systeme von n Differentialgleichungen mit n abhängigen Variablen, etwa bei demjenigen, das wir hier in kurzen Andeutungen aufzeichnen, verfahrend wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l}
\underset{1}{\mathfrak{X}}_{\lambda}\xi^{(\lambda)}+\underset{1}{\mathfrak{X}}_{\lambda-1}\xi^{(\lambda-1)}+\ldots\ldots+\underset{1}{\mathfrak{X}}_{0}\xi+\underset{1}{\mathfrak{Y}}_{\mu}\eta^{(\mu)}+\ldots+\underset{1}{\mathfrak{Y}}_{0}\eta+\underset{1}{\mathfrak{Z}}_{\nu}\zeta^{(\nu)}+\ldots+\underset{1}{\mathfrak{Z}}_{0}\zeta+\ldots=0 \\
\underset{2}{\mathfrak{X}}_{\lambda}\xi^{(\lambda)}+\underset{2}{\mathfrak{X}}_{\lambda-1}\xi^{(\lambda-1)}+\ldots\ldots+\underset{2}{\mathfrak{X}}_{0}\xi+\underset{2}{\mathfrak{Y}}_{\mu}\eta^{(\mu)}+\ldots+\underset{2}{\mathfrak{Y}}_{0}\eta+\underset{2}{\mathfrak{Z}}_{\nu}\zeta^{(\nu)}+\ldots+\underset{2}{\mathfrak{Z}}_{0}\zeta+\ldots=0 \\
\underset{3}{\mathfrak{X}}_{\lambda}\xi^{(\lambda)}+\underset{3}{\mathfrak{X}}_{\lambda-1}\xi^{(\lambda-1)}+\ldots\ldots+\underset{3}{\mathfrak{X}}_{0}\xi+\underset{3}{\mathfrak{Y}}_{\mu}\eta^{(\mu)}+\ldots+\underset{3}{\mathfrak{Y}}_{0}\eta+\underset{3}{\mathfrak{Z}}_{\nu}\zeta^{(\nu)}+\ldots+\underset{3}{\mathfrak{Z}}_{0}\zeta+\ldots=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (777)$$

Der Allgemeinheit ist hier kein Eintrag gethan dadurch, dass in allen Gleichungen λ der höchste Differentiationsindex von ξ, μ jener von η, ν jener von ζ heisst, weil man jeden anderen Sachverhalt durch Nullsetzen einiger der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ genannten Coefficienten herbeiführen kann. Gewöhnlich kommt vor, dass, wenn in der ersten Gleichung λ der höchste unter allen Differentiationsindices ist; dann ist in der zweiten μ der grösste, in der dritten herrscht ν vor u. s. w. Man differenzire nun eine jede der vorgelegten Gleichungen so oft, dass sie dadurch zur Ordnungszahl $\sigma=\lambda+\mu+\nu+\ldots.$ erhoben wird, also in dem eben erwähnten gewöhnlichen Falle differenzire man die erste $\mu+\nu+\ldots.=\sigma-\lambda$Mal, die zweite $\lambda+\nu+\ldots.=\sigma-\mu$Mal, die dritte $\lambda+\mu+\ldots.=\sigma-\nu$Mal, so gewinnt man dadurch neue Gleichungen $(n-1)\,\sigma$ an der Zahl, welche mit den vorliegenden n Gleichungen im Ganzen $(n-1)\,\sigma+n$ machen. Aus ihnen nun hat man, um zur Eliminationsgleichung in ζ zu gelangen, jede Spur von ξ, η, ... wegzuschaffen. Da aber eine jede dieser Variablen σ-Mal differenzirt vorkommt, mithin $\sigma+1$ zu eliminirende Grössen darbietet, so sind derselben an der Zahl $(\sigma+1)\,(n-1)=\sigma(n-1)+n-1$, mithin um eine weniger als Gleichungen, was gerade erforderlich ist, damit man zu einer einzigen Eliminationsgleichung in ξ gelange, welche im Allgemeinen von der Ordnung σ sein wird.

So empfehlenswerth dieses Verfahren seiner Einfachheit wegen vom theoretischen Standpuncte aus ist, so gross sind auch seine Nachtheile in practischer Beziehung, so dass man nur in den einfachsten Fällen sich entschliessen wird, davon Gebrauch zu machen. Die Nachtheile sind dieselben wie bei dem Eliminationsprocesse aus höheren algebraischen Gleichungen und zwar: Erstens, man sieht sich hier und dort zu ungeheueren Rechnungsentwicklungen veranlasst und zum Aufzeichnen von Polynomen von riesenhafter Ausdehnung gezwungen. Zweitens, man läuft hie und da Gefahr, die Eliminationsgleichung unnützerweise zu compliziren und dort neue Wurzeln, hier fremde particuläre Werthe einzuführen, welche nicht die Eigenschaft haben, das vorgelegte System von Differentialgleichungen zu erfüllen. Diess macht nicht nur, dass man eine complizirtere Eliminationsgleichung zu integriren, sondern auch die gefundenen Auflösungen in das vorgelegte System zu substituiren und diejenigen, welche nicht genügen, auszuscheiden hat. Diese Gefahr ist hier bedeutend grösser, als bei den algebraischen Gleichungen, weil sich nachweisen lässt, dass höchst selten ein aufs Gerathewohl hingezeichnetes System von algebraischen Gleichungen nur eine sehr geringe Anzahl von Auflösungen besitzt, während diess bei Differentialgleichungen weit öfter, ja gewöhnlich der Fall ist. Diess erregt den Wunsch, Me-

thoden aufzustellen, solche Systeme von Differentialgleichungen direct zu integriren, ohne vorerst zur Elimination schreiten zu müssen. Hiemit soll jedoch nicht gesagt sein, dass die Eliminationsgleichung weiter keinen Werth habe, wenn man sich bereits im Besitze des allgemeinen Integrales befindet, denn wir wissen, dass man dieses Letztere vielfältig in einer Form haben kann, so dass es weniger Werth hat, als die Differentialgleichung selbst, weil es an Undurchsichtigkeit leidet und desshalb weniger lehrt als diese, dass mithin die Differentialgleichung selbst immer als die Urquelle aller Einsicht betrachtet werden muss. Es ist jedoch auch von einer anderen Seite nicht zu übersehen, dass alle tiefe Einsicht, die wir in die Natur der Genüge leistenden Werthe bei einer vorgelegten Differentialgleichung schon durch den blossen Anblick derselben, oder mindestens durch eine sehr leichte Rechnung nach den Gesetzen der Formenlehre gewinnen, lediglich auf der Erkenntniss der Asymptoten der particulären Integrale beruhe, dass mithin alles Wünschenswerthe geleistet sei, wenn man erstens im Stande ist auch die Asymptoten der einem Systeme von Differentialgleichungen angehörigen Auflösungen entweder ebenso leicht oder wenigstens mit nicht viel mehr Schwierigkeit zu bestimmen, und zweitens, die in diesem Werke auseinandergesetzten Integrationsmethoden in Form von absteigenden und aufsteigenden Reihen und in der von bestimmten Integralen auch auf Systeme von Differentialgleichungen auszudehnen.

Es scheint auf den ersten Anblick, als ob diess schwieriger sein müsste, wie bei einer einzelnen Differentialgleichung und ist es auch, wenn man die Ausdehnung der Rechnungen berücksichtigt. Da wir indess alle analytischen Erscheinungen, die im Integrationsgeschäfte bei beliebig gestalteten Differentialgleichungen vorzukommen vermögen, aufmerksam studirt haben, und ihren Einfluss auf die Gestalt des Integrales vollständig kennen, und da die Integration eines Systemes von Differentialgleichungen, weil sie derjenigen der Eliminationsgleichung äquivalent ist, auch zu keinen anderen, als zu diesen wohlbekannten Erscheinungen führen kann; so bewegen wir uns hier auf keinem fremden, unbekannten Gebiete, sondern auf einem sorgfältig durchforschten Terrain und sind nur höchstens genöthigt, diejenigen Sätze, die die Formenlehre über den Zusammenhang aufgestellt hat, zwischen der Gestalt der Differentialgleichung und jener des entsprechenden particulären Integrales, hie und da umzukehren.

Wir haben allgemein bei beliebig gestalteten Differentialgleichungen mit Coefficienten der ersten Classe particuläre Integrale gewonnen, die z. B. bei der asymptotischen Integration erscheinen als Produkt einer Exponentiellen in eine Function erster Classe. Die aus einem Systeme von mehreren linearen Differentialgleichungen, wie die (777), gezogene Eliminationsgleichung ist gleichfalls eine solche Differentialgleichung mit Coefficienten der ersten Classe. Mithin besitzen auch ihre particulären Integrale die Form eines solchen Produktes. Man denke sich nun die allgemeinen Werthe von ξ, η, ζ, durch wirkliche Integration der ihnen zugehörigen Eliminationsgleichungen bereits gewonnen und in das vorgelegte System (777) eingeführt. Ihnen wird dann identisch Genüge geleistet werden und sämmtliche ersten Theile verwandeln sich durch gegenseitiges Aufheben der verschiedenen Glieder des Substitutionsresultates in Null. Ein solches Aufheben ist nicht denkbar zwischen Ausdrücken, welche

verschiedene Exponentialgrössen als Factoren besitzen. Es kann somit nur gruppenweise stattfinden, so zwar, dass all die verschiedenen aus ξ, η, ζ, ... gezogenen Glieder, die einerlei Exponentialfactor besitzen, sich je für sich auf Null reduziren. Die verschiedenen particulären Integrale, für ξ, η, ζ gewonnen, lassen sich daher zu Systemen zusammengehöriger Werthe gruppiren und es gehören namentlich diejenigen zusammen, die einerlei exponentiellen Factor besitzen. Man kann also den (777) dadurch Genüge zu leisten suchen, dass man ξ, η, ζ, ... in der Form:

$$\xi = e^{\int\varphi dx}\mathfrak{X}, \quad \eta = e^{\int\varphi dx}\mathfrak{Y}, \quad \zeta = e^{\int\varphi dx}\mathfrak{Z}, \quad \ldots\ldots \tag{778}$$

voraussetzt, mit demselben Factor zweiter Classe $e^{\int\varphi dx}$, während $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, ... verschiedene Functionen erster Classe sein werden. So lange nun die Gradzahl des φ ober der negativen Einheit ist, bestimmt der exponentielle Factor $e^{\int\varphi dx}$, der überall derselbe ist, das Verhalten der successiven Differentialquotienten dieser Variablen, das sohin bei allen dasselbe ist, so dass man allgemein $\xi^{(r)}$, $\eta^{(r)}$, $\zeta^{(r)}$, ... als zu einerlei Grössenordnung gehörig ansehen kann, ein Sachverhalt, der die Ermittlung der Asymptoten der verschiedenen Genüge leistenden Werthe erleichtert. Man verfahre nämlich, wie folgt: Man bilde das vorgelegte System der Differentialgleichungen und zwar, Gleichung um Gleichung vornehmend, das den Coefficientenbau umspannende Polygon, indem man hiebei keine Rücksicht nimmt auf den Namen, den die abhängige Veränderliche trägt, gleichviel, ob sie ξ, η, ζ, ... ist, ermittle also den höchsten Differentialquotienten, ohne nach dem Namen zu fragen, den er trägt. Er sei λ. So hat man senkrecht auf die Abscissenaxe Linien λ an der Zahl zu ziehen und auf denselben als Ordinaten aufzutragen die Gradzahlen der höchsten Coefficienten, die irgend einem λ^{ten}, $\lambda - 1^{\text{sten}}$, ... Differentialquotienten von ξ, η, ζ, ... angehören. Finden sich zwei solche Coefficienten von gleicher Gradzahl, so kann diess der Rechner zu seiner Orientirung bemerken, zugleich mit dem Namen der abhängigen Veränderlichen, zu welchen sie gehören. Eine auf diese Weise bezeichnete Ordinate, gehörig zu verschiedenen Differentialquotienten derselben Ordnung, wollen wir fernerhin eine doppelte, dreifache u. s. w. Ordinate nennen. Die Endpuncte aller solchen Ordinaten werden durch gerade Linien verbunden und von allen so entstehenden Polygonen die eingehenden Winkel abgeschnitten, wodurch sich das Polygon der ersten Bestandgleichung (777) ergibt. Man ermittle nun auf die bekannte Weise die repartirten Ansteigungszahlen, die einer jeden Polygonseite angehören, und bemerke sie der Reihe nach von der grössten angefangen. Man verfahre nun auf gleiche Weise mit der zweiten, dritten, n^{ten} der Differentialgleichungen, die bezüglichen Ansteigungszahlen der Reihe nach aufzeichnend. Eine jede Repartitionszahl s nun, welche allen n Gleichungen gemeinschaftlich ist, vermag als Gradzahl einer oder mehrerer der Functionen φ angenommen zu werden, mit der hinzugefügten Bemerkung jedoch, dass eben die Repartitionszahl s auch bei einer oder mehreren der Differentialgleichungen fehlen darf, wenn sie ersetzt ist durch eine vielfache Ordinate, welche zwei Polygonseiten von einander scheidet, denen die Gradzahlen r und t zukommen, so dass $r > s > t$ besteht. Eine solche vielfache Ordinate nämlich vermag die Polygonseite mit der

Ansteigungszahl s zu ersetzen, ist also mehreren verschiedenen Ansteigungen äquivalent, weil zwischen den Zahlen r und t nebst dem noch mehrere verschiedene Ansteigungszahlen liegen können.

Hat man auf diese Weise all' die verschiedenen Zahlen s von der grössten angefangen, die als Gradzahlen der verschiedenen φ gelten können, errungen, so suche man sich all die verschiedenen Functionen φ zu verschaffen, denen ein und dasselbe s angehört. Diess geschieht bei einzelnen Differentialgleichungen durch Aufzählung der Coefficientenpaare, zu denen ein und dasselbe s gehört. Dann aber wird der Unterschied zwischen den verschiedenen φ, der in dem Werthe eines dazu gehörigen Coefficienten liegt, durch Auflösung einer höheren Gleichung festgestellt. Hier ist die Sache etwas schwerer; man hat nämlich aus einem Systeme von mehreren algebraischen Gleichungen zu eliminiren und die Gradzahl der hiezu gehörigen Eliminationsgleichung mit den zugehörigen Werthen zu berücksichtigen. Das Verfahren ist nämlich folgendes: Man denke sich φ in der absteigenden Reihenform:

$$\varphi = Ax^s + Bx^{s-1} + \ldots\ldots \tag{779}$$

und betrachte gewisse Factoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... als beziehlich zu den Variablen ξ, η, ζ, ... gehörig und gehe jetzt von Gleichung zu Gleichung, indem man in einer jeden von ihnen nur die höchsten Glieder derjenigen Coefficienten in Betracht zieht, welche mit ihrer Gradhöhe diejenige Seite des normalen Polygones erreichen, dem eben die Ansteigungszahl s zukommt. Die Potenzen von x denen diese Glieder proportional sind, werden weggelassen und die als Factoren erscheinenden Differentialquotienten von ξ, η, ζ, ... wenn sie z. B. $\xi^{(p)}$, $\eta^{(q)}$, ... sind, ersetzt durch $\mathfrak{A}A^p$ $\mathfrak{B}A^q$, ... Man gewinnt hiemit, wie schon gesagt, ein gewisses System von algebraischen Gleichungen, linear nach $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... und einem höheren Grade angehörig nach A, die aber ihrer Form nach zur Bestimmung von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... nicht dienen können, weil sie kein von diesen Unbekannten freies Glied besitzen, aus denen man aber, die Relationen $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$, ... eliminirend, zu einer höheren Gleichung in A gelangen wird, deren von der Nulle verschiedene Wurzeln ihrer Zahl nach die verschiedenen φ und den daraus gezogenen Werthen von A nach die Anfangsglieder liefern werden, die zu eben diesem φ gehörig sind.

Zur Begründung dieses Verfahrens dienen dieselben Betrachtungen, die wir im §. 4 bis §. 6 der Formenlehre angestellt haben. Nach gehörig durchgeführter Substitution nämlich der obangeführten Werthe für ξ, η, ζ, ... in eine jede beliebige der Gleichungen (777) soll eine Reduction auf Null stattfinden. Es erscheint aber offenbar auch das Substitutionsresultat ganz in derselben Form wie die für ξ, η, ζ, ... aufgestellten Werthe, nämlich in der eines Produktes einer Exponentiellen $e^{\int\varphi dx}$ in eine absteigende Reihe. Soll also eine Reduction auf Null denkbar sein, so müssen in dieser letzten mindestens zwei, wenn nicht mehr Glieder mit einer und derselben höchsten Potenz von x erscheinen, die sich gegenseitig aufheben. Diess ist aber nur bei gewissen Gradzahlen s der Function φ möglich und zwar, wenn solch' ein identisches Aufheben der höchsten Glieder nicht nur bei einer

sondern überhaupt bei allen Gleichungen (777) stattfinden soll, gerade bei denjenigen Werthen von s, die durch das obangeführte Verfahren aufgefunden werden.

Um diess genau einzusehen, bedenke man, dass wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... die endlichen oder unendlichen Grenzen sind, denen sich die Ausdrücke (778) bei dem fortwährenden Wachsen von x nähern, auch ganz allgemein $\xi^{(p)}$, $\eta^{(q)}$, ... zu Grenzen die Produkte haben: $\mathfrak{A}A^p u^{ps}$, $\mathfrak{B}A^q u^{qs}$,.... unter u eben den sehr gross und gleichsam unendlich gedachten Werth von x verstanden. Die successiven Differentialquotienten der Variablen ξ, η, ζ, ... wachsen also übereinstimmend je um s Einheiten in der Gradzahl, und trägt man diese Gradzahlen oder ihre Differenzen ebenso wie jene der Gleichungscoefficienten als Ordinaten auf und verbindet ihre Endpuncte, so hat man eine gerade Linie. Der Klarheit wegen mag man sich diese Ordinaten über einer andern Abscissenaxe und zwar von oben nach unten construirt denken, während die des den Coefficientenbau umspannenden Polygones nach aufwärts aufgetragen sind. Zugleich mag die gerade Linie ganz ober dem normalen Polygone liegen. Nähert man jetzt die oben liegende gerade Linie in zu sich selbst paralleler Bewegung dem unteren Polygone bis zur Berührung, so wird diese entweder an einer Ecke des Polygones, oder an einer Polygonseite stattfinden und im ersten Falle wird diese Ecke entweder einer einfachen oder einer Doppelordinate entsprechen, mithin entweder einem einzigen oder mehreren Gliedern des Gleichungspolynomes angehörig sein. Da nun die Summen der einander entsprechenden, in dieselbe Verticale fallenden Ordinaten der von oben herabgezählten der geraden Linie und der von unten hinaufgemessenen des Polygones die Ordnungszahlen geben, zu denen die einzelnen Glieder des Gleichungspolynomes gehörig sind, so entsprechen der Ecke des Contactes oder der Polygonseite, wo ein solcher stattfindet, alle diejenigen Glieder des genannten Gleichungspolynoms, die einerlei höchste Ordnungszahl gleich dem Abstande der beiden Abscissenaxen besitzen. Ist nun nur ein einzelnes solches Glied vorhanden, was dann der Fall ist, wenn an einer Contactecke nur eine einfache Ordinate besteht; so bleibt diess nothwendig das vorherrschende des ganzen Substitutionsresultates und es ist an eine Aufhebung sämmtlicher Glieder bis zum Identischwerden nicht zu denken. Findet die Berührung an einer Polygonseite statt, so sind nothwendig mehrere Glieder von gleich hohen Ordnungszahlen vorhanden, deren höchste Bestandtheile sich auf eine oder mehrere verschiedene Arten aufheben können, wodurch die Möglichkeit des Identischwerdens gegeben ist, ohne jedoch die Nothwendigkeit genügend zu begründen. Findet endlich der Contact statt an einer Ecke, der eine vielfache Ordinate entpricht, so bestehen abermals mehrere höchste Glieder von gleicher Ordnungszahl, die sich gegenseitig aufheben können, aber die an dieser Ecke berührende Gerade hat keine bestimmte Richtung, und kann vielmehr alle diejenigen Richtungen annehmen, die zwischen den Richtungen der beiden an dieser vielfachen Ecke zusammenstossenden Polygonseiten mitten inne liegen. Diese geometrischen Betrachtungen rechtfertigen, gehörig beherzigt, das oben auseinandergesetzte Verfahren zur Ermittlung und Sonderung der particulären Werthe, die ein System von Differentialgleichungen erfüllen können, und zwar unterscheiden sich diese particulären Integrale von einander zunächst durch die Gradzahlen der ihnen entsprechenden Functionen φ,

und diejenigen, denen einerlei Gradzahl dieser Art angehörig ist, durch die Coefficienten de Anfangsglieder eben dieser Functionen φ.

Hätte man nur eine einzige Differentialgleichung zwischen einer abhängigen Veränderlichen und einer unabhängigen x vorliegen, so würde sich an die Sonderung der particulären Integrale vo einander in der Regel, oder wenigstens gelegentlich eine zweite Rechnung anknüpfen, eine Transfor mation nämlich, die das Abscheiden eines Factors zweiter Classe zum Zwecke hat. Auch bei Systeme von Differentialgleichungen mit mehreren abhängigen Veränderlichen ξ, η, ζ, ... kann man di vollständige Integration und namentlich die asymptotische durch Abscheiden des Factors zweiter Class aus einer Gruppe Genüge leistender Werthe ξ, η, ζ, ... vorbereiten. Die Transformationsmethod ist bei einem einzigen Gleichungspolynome in der Transformationslehre umständlich und erschöpfen auseinandergesetzt worden und kann unmittelbar und beinahe ungeändert auch auf Systeme von Glei chungen übertragen werden. Der Unterschied besteht nämlich unter Voraussetzung der linearen Forr nur darin, dass man bei einer jeden der zu einem solchen Systeme gehörigen Bestandgleichunge nicht ein, sondern mehrere Gleichungspolynome zu transformiren hat, und zwar durch Substitutione die in den Factoren zweiter Classe übereinstimmen. Ein Polynom in ξ, ein zweites in η, ein dritte in ζ u. s. w. Den Weg der übrigen Rechnung trifft man leicht, wenn man den zu erreichende Zweck im Auge behält, vollständige Abscheidung nämlich des Factors zweiter Classe, der sich durc einen Abfall von mindestens Einer Einheit in der Gradzahl in den Endcoefficienten jedesmal kund gibt

§. 17.

Integration von Systemen linearer Differentialgleichungen in Form von aufsteigenden Reihen

Wenn man bei einer gegebenen einzelnen Differentialgleichung zwischen nur zwei Variable x und y das den Coefficientenbau umspannende Polygon gehörig in Betracht gezogen und demselbe die exponentiellen Asymptoten der particulären Integrale entnommen hat, schreitet man gewöhnlich z denjenigen Aufschlüssen, welche die Zusammensetzung der Anfangscoefficienten aus Factoren $x - \epsilon$ bietet. Man fängt gewöhnlich damit an, in der vorgelegten Differentialgleichung:

$$\mathfrak{X}_n y^{(n)} + \mathfrak{X}_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots + \mathfrak{X}_1 y' + \mathfrak{X}_0 y = 0$$

den ersten Coefficienten, nämlich $\mathfrak{X}_n$ in seine einfachen Factoren dieser Art zu zerlegen, untersucht dann, ob sich nicht einige derselben in den folgenden Coefficienten $\mathfrak{X}_{n-1}$, $\mathfrak{X}_{n-2}$, ... vorfinden, und bildet sich daraus das neue, die Zusammensetzung aus einfachen Factoren bezeichnende Polygon. Man ermittelt ferner die Werthe derjenigen mit k bezeichneten Exponenten, die, den einzelnen Factoren des ersten Coefficienten entsprechend, particuläre Integrale geben, die für einen endlichen Werth vo x unstetig zu werden vermögen und in ihrer gelegentlich vorhandenen ganzen Beschaffenheit oft auch logarithmische Transcendenten kennzeichnen. Man hat, so verfahrend, die aufsteigende Integration nac Potenzen der Factoren des ersten Coefficienten vorbereitet und ist gefasst auf die analytischen Erschei

nungen, die die Rechnung unterbrechen können durch Auftreten eines unendlichen Coefficientenwerthes, weiss sie zu deuten, und, wenn diess nothwendig ist, auch zu vermeiden.

Diess alles lässt sich bei Systemen linearer Differentialgleichung von der im vorigen Paragraphe angeführten Form (777) nicht mehr ausführen, denn man hat die Eliminationsgleichung nicht, mithin kann man auch ihre Coefficienten nicht in Factoren zerlegen. Man könnte sie zwar bilden und zwar nach Belieben ganz oder theilweise vom ersten Coefficienten angefangen; man thut diess aber nicht aus wichtigen Gründen und schreitet lieber direct zur Entwicklung der Genüge leistenden Systeme von Werthen in aufsteigende Reihen, aus den Erscheinungen des Calculs auf die Beschaffenheit der Eliminationsgleichung sowohl, wie auf gewisse andere, damit im Zusammenhange stehende Umstände rückschliessend. Wer das Verfahren bei einer einzelnen Differentialgleichung gründlich kennt, für den hat auch die Integration eines ganzen Systemes von Differentialgleichungen mit ihren analytischen Erscheinungen nichts Schwieriges und Befremdendes. Wir schreiten also fortan zu ihrer Auseinandersetzung und legen uns gleich ein System von n Differentialgleichungen mit n abhängigen Veränderlichen ξ, η, ζ und einer unabhängigen x vor, nämlich das (777) des vorigen Paragraphes, indem wir der Kürze wegen die n Gleichungspolynome mit P, Q, R, ... bezeichnen, so dass also das System:

$$P = 0\,,\quad Q = 0\,,\quad R = 0\,,\quad \ldots\ldots \qquad ($$

ist. Denkt man sich jetzt die Variablen ξ, η, ζ ersetzt durch beliebige nach Potenzen von $x - a$ aufsteigend geordnete Reihen, gleichgiltig, ob sie Integrale darstellen oder nicht und ob a ein unstetig machender Werth ist oder nicht, etwa durch die folgenden:

$$\xi = \mathfrak{x} + \mathfrak{x}'(x-a) + \mathfrak{x}''\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots\ldots \qquad ($$

$$\eta = \mathfrak{y} + \mathfrak{y}'(x-a) + \mathfrak{y}''\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots\ldots$$

$$\zeta = \mathfrak{z} + \mathfrak{z}'(x-a) + \mathfrak{z}''\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sind ferner auch die ganzen und algebraischen mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bezeichneten Coefficienten auch auf diese Form gebracht, so erscheinen auch die Substitutionsresultate in eben derselben aufsteigenden Reihenform, nämlich:

$$P = \mathrm{P} + \mathrm{P}'(x-a) + \mathrm{P}''\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots\ldots \qquad ($$

$$Q = \mathrm{Q} + \mathrm{Q}'(x-a) + \mathrm{Q}''\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots\ldots$$

$$R = \mathrm{R} + \mathrm{R}'(x-a) + \mathrm{R}''\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und es bedeuten hier: $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots \mathfrak{y}, \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \ldots \mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}'', \ldots \mathbf{P}, \mathbf{P}', \mathbf{P}'', \ldots \mathbf{Q}, \mathbf{Q}', \mathbf{Q}'', \ldots$ $\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'', \ldots$ dasjenige, was aus $\xi, \xi', \xi'', \ldots \eta, \eta', \eta'', \ldots \zeta, \zeta', \zeta'', \ldots P, P', P'', \ldots$ $Q, Q', Q'', \ldots R, R', R'', \ldots$ wird, wenn man anstatt x die Grösse a substituirt. Diess ist, wie gesagt, der Fall, was auch immer für Werthe von der Form (781), anstatt ξ, η, ζ gesetzt werden. Sind es Genüge leistende Werthe, dann besteht für sie das folgende System von unendlich vielen Bestimmungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} = \mathbf{P}' = \mathbf{P}'' = \ldots\ldots\ldots &= 0 \\
\mathbf{Q} = \mathbf{Q}' = \mathbf{Q}'' = \ldots\ldots\ldots &= 0 \\
\mathbf{R} = \mathbf{R}' = \mathbf{R}'' = \ldots\ldots\ldots &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{aligned}
\tag{783}
$$

für die in $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ vorkommenden Reihencoefficienten. Der im Integrationsgeschäfte befangene Rechner hat sie gruppenweise in Betracht zu ziehen und zur Coefficientenbestimmung zu benützen. Die erste Gruppe von n Gleichungen, bei der er die Rechnung anzufangen hat, ist die:

$$
\mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{R} = 0, \ldots\ldots\ldots \tag{784}
$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutungen von $P, Q, R, \ldots$ die aus dem Systeme (777) gezogen sind und die daraus abgeleiteten von $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \ldots$ unter der Annahme, dass allgemein: $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \ldots$ dasjenige bedeutet, was aus $X, Y, Z, \ldots$ für $x = a$ wird:

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\mathbf{P}} &= \underset{1}{\mathbf{X}}_\lambda \mathfrak{x}^{(\lambda)} + \underset{1}{\mathbf{X}}_{\lambda-1} \mathfrak{x}^{(\lambda-1)} + \ldots\ldots + \underset{1}{\mathbf{X}}_0 \mathfrak{x} + \underset{1}{\mathbf{Y}}_\mu \mathfrak{y}^{(\mu)} + \ldots\ldots + \underset{1}{\mathbf{Y}}_0 \mathfrak{y} + \underset{1}{\mathbf{Z}}_\nu \mathfrak{z}^{(\nu)} + \ldots\ldots + \underset{1}{\mathbf{Z}}_0 \mathfrak{z} + \ldots\ldots \\
\underset{2}{\mathbf{Q}} &= \underset{2}{\mathbf{X}}_\lambda \mathfrak{x}^{(\lambda)} + \underset{2}{\mathbf{X}}_{\lambda-1} \mathfrak{x}^{(\lambda-1)} + \ldots\ldots + \underset{2}{\mathbf{X}}_0 \mathfrak{x} + \underset{2}{\mathbf{Y}}_\mu \mathfrak{y}^{(\mu)} + \ldots\ldots + \underset{2}{\mathbf{Y}}_0 \mathfrak{y} + \underset{2}{\mathbf{Z}}_\nu \mathfrak{z}^{(\nu)} + \ldots\ldots + \underset{2}{\mathbf{Z}}_0 \mathfrak{z} + \ldots\ldots \\
\underset{3}{\mathbf{R}} &= \underset{3}{\mathbf{X}}_\lambda \mathfrak{x}^{(\lambda)} + \underset{3}{\mathbf{X}}_{\lambda-1} \mathfrak{x}^{(\lambda-1)} + \ldots\ldots + \underset{3}{\mathbf{X}}_0 \mathfrak{x} + \underset{3}{\mathbf{Y}}_\mu \mathfrak{y}^{(\mu)} + \ldots\ldots + \underset{3}{\mathbf{Y}}_0 \mathfrak{y} + \underset{3}{\mathbf{Z}}_\nu \mathfrak{z}^{(\nu)} + \ldots\ldots + \underset{3}{\mathbf{Z}}_0 \mathfrak{z} + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{785}
$$

Sie dienen augenscheinlich zur Bestimmung der Reihencoefficienten $\mathfrak{x}^{(\lambda)}, \mathfrak{y}^{(\mu)}, \mathfrak{z}^{(\nu)} \ldots\ldots$ in linearer Function der ihnen vorangehenden Reihencoefficienten, die alle kleinere Differentiationsindices tragen, nämlich:

$$
\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots\ldots \mathfrak{x}^{(\lambda-1)}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \ldots\ldots \mathfrak{y}^{(\mu-1)}, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}'', \ldots\ldots \mathfrak{z}^{(\nu-1)}, \ldots\ldots
$$

und die $\lambda + \mu + \nu + \ldots\ldots = \sigma$ an der Zahl sind, und man wird diese Bestimmungsgleichungen behufs ihrer Auflösung nach den Unbekannten $\mathfrak{x}^{(\lambda)}, \mathfrak{y}^{(\mu)}, \mathfrak{z}^{(\nu)}, \ldots\ldots$ zweckmässig hinstellen, wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{\mathbf{X}}_\lambda \mathfrak{x}^{(\lambda)} + \underset{1}{\mathbf{Y}}_\mu \mathfrak{y}^{(\mu)} + \underset{1}{\mathbf{Z}}_\nu \mathfrak{z}^{(\nu)} + \ldots\ldots\ldots &= \mathbf{L} \\
\underset{2}{\mathbf{X}}_\lambda \mathfrak{x}^{(\lambda)} + \underset{2}{\mathbf{Y}}_\mu \mathfrak{y}^{(\mu)} + \underset{2}{\mathbf{Z}}_\nu \mathfrak{z}^{(\nu)} + \ldots\ldots\ldots &= \mathbf{M} \\
\underset{3}{\mathbf{X}}_\lambda \mathfrak{x}^{(\lambda)} + \underset{3}{\mathbf{Y}}_\mu \mathfrak{y}^{(\mu)} + \underset{3}{\mathbf{Z}}_\nu \mathfrak{z}^{(\nu)} + \ldots\ldots\ldots &= \mathbf{N} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{aligned}
\tag{786}
$$

Die Bedeutungen von $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \ldots\ldots$ sind hier:

$$
\begin{aligned}
L &= -\underset{1}{X}_{\lambda-1}\mathfrak{x}^{(\lambda-1)} - \ldots - \underset{1}{X}_0\mathfrak{x} - \underset{1}{Y}_{\mu-1}\mathfrak{y}^{(\mu-1)} - \ldots - \underset{1}{Y}_0\mathfrak{y} - \underset{1}{Z}_{\nu-1}\mathfrak{z}^{(\nu-1)} - \ldots - \underset{1}{Z}_0\mathfrak{z} - \ldots \\
M &= -\underset{2}{X}_{\lambda-1}\mathfrak{x}^{(\lambda-1)} - \ldots - \underset{2}{X}_0\mathfrak{x} - \underset{2}{Y}_{\mu-1}\mathfrak{y}^{(\mu-1)} - \ldots - \underset{2}{Y}_0\mathfrak{y} - \underset{2}{Z}_{\nu-1}\mathfrak{z}^{(\nu-1)} - \ldots - \underset{2}{Z}_0\mathfrak{z} - \ldots \\
N &= -\underset{3}{X}_{\lambda-1}\mathfrak{x}^{(\lambda-1)} - \ldots - \underset{3}{X}_0\mathfrak{x} - \underset{3}{Y}_{\mu-1}\mathfrak{y}^{(\mu-1)} - \ldots - \underset{3}{Y}_0\mathfrak{y} - \underset{3}{Z}_{\nu-1}\mathfrak{z}^{(\nu-1)} - \ldots - \underset{3}{Z}_0\mathfrak{z} - \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{787}
$$

Diess wäre, wie gesagt, die erste Gruppe von Bestimmungsgleichungen. Die übrigen sind alle in der einzigen:

$$P^{(r)} = 0, \quad Q^{(r)} = 0, \quad R^{(r)} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots$$

enthalten und gehen aus ihr hervor, wenn man r der Reihe nach die natürlichen Zahlen: 1, 2, 3, ... bedeuten lässt. Man erhält diese Hauptgruppe, die alle übrigen repräsentirt, durch $r$maliges Differenziren der Polynome P, Q, R, ... und nachherige Verwandlung aller ξ, η, ζ, ... $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, ... in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... X, Y, Z, ... Bildet man sie auf diese Weise und ertheilt ihr noch überdiess diejenige Gestalt, die der ersten (786) verliehen worden ist, indem man nur die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ... mit dem höchsten Differentiationsindex auf der einen Seite des Gleichheitszeichens belässt und die übrigen Glieder alle auf die andere Seite trägt, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{X}_\lambda\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \underset{1}{Y}_\mu\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \underset{1}{Z}_\nu\mathfrak{z}^{(\nu+r)} + \ldots\ldots\ldots &= L_r \\
\underset{2}{X}_\lambda\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \underset{2}{Y}_\mu\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \underset{2}{Z}_\nu\mathfrak{z}^{(\nu+r)} + \ldots\ldots\ldots &= M_r \\
\underset{3}{X}_\lambda\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \underset{3}{Y}_\mu\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \underset{3}{Z}_\nu\mathfrak{z}^{(\nu+r)} + \ldots\ldots\ldots &= N_r \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{788}
$$

L_r, M_r, N_r, ... sind hier folgende Werthe:

$$
\begin{aligned}
L_r = &- \left[\underset{1}{X}_{\lambda-1} + r\underset{1}{X}'_\lambda\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} - \left[\underset{1}{Y}_{\mu-1} + r\underset{1}{Y}'_\mu\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} - \left[\underset{1}{Z}_{\nu-1} + r\underset{1}{Z}'_\nu\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-1)} \ldots\ldots \\
&- \left[\underset{1}{X}_{\lambda-2} + r\underset{1}{X}'_{\lambda-1} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{1}{X}''_\lambda\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)} - \\
&- \left[\underset{1}{Y}_{\mu-2} + r\underset{1}{Y}'_{\mu-1} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{1}{Y}''_\mu\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-2)} - \\
&- \left[\underset{1}{Z}_{\nu-2} + r\underset{1}{Z}'_{\nu-1} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{1}{Z}'_\nu\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-2)} - \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \left[\underset{1}{X}_{\lambda-3} + r\underset{1}{X}'_{\lambda-2} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{1}{X}''_{\lambda-1} + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}\underset{1}{X}'''_\lambda\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-3)} - \\
&- \left[\underset{1}{Y}_{\mu-3} + r\underset{1}{Y}'_{\mu-2} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{1}{Y}''_{\mu-1} + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}\underset{1}{Y}'''_\mu\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-3)} - \\
&- \left[\underset{1}{Z}_{\nu-3} + r\underset{1}{Z}'_{\nu-2} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{1}{Z}''_{\nu-1} + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}\underset{1}{Z}'''_\nu\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-3)} - \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \underset{1}{X}_0^{(r)}\mathfrak{x} - \underset{1}{Y}_0^{(r)}\mathfrak{y} - \underset{1}{Z}_0^{(r)}\mathfrak{z} - \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{789}
$$

$$M_r = -\left[\underset{2}{X}_{\lambda-1} + r\underset{2}{X}'_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} - \left[\underset{2}{X}_{\lambda-2} + r\underset{2}{X}'_{\lambda-1} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{2}{X}''_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)}$$

$$-\left[\underset{2}{Y}_{\mu-1} + r\underset{2}{Y}'_{\mu}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} - \left[\underset{2}{Y}_{\mu-2} + r\underset{2}{Y}'_{\mu-1} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{2}{Y}''_{\mu}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-2)}$$

$$-\left[\underset{2}{Z}_{\nu-1} + r\underset{2}{Z}'_{\nu}\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-1)} - \left[\underset{2}{Z}_{\nu-2} + r\underset{2}{Z}'_{\nu-1} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{2}{Z}''_{\nu}\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\left[\underset{2}{X}_{\lambda-3} + r\underset{2}{X}'_{\lambda-2} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{2}{X}''_{\lambda-1} + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}\underset{2}{X}'''_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-3)}$$

$$-\left[\underset{2}{Y}_{\mu-3} + r\underset{2}{Y}'_{\mu-2} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{2}{Y}''_{\mu-1} + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}\underset{2}{Y}'''_{\mu}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-3)}$$

$$-\left[\underset{2}{Z}_{\nu-3} + r\underset{2}{Z}'_{\nu-2} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{2}{Z}''_{\nu-1} + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}\underset{2}{Z}'''_{\nu}\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-3)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\underset{2}{X}_0^{(r)}\mathfrak{x} - \underset{2}{Y}_0^{(r)}\mathfrak{y} - \underset{2}{Z}_0^{(r)}\mathfrak{z} - \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N_r = -\left[\underset{3}{X}_{\lambda-1} + r\underset{3}{X}'_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} - \left[\underset{3}{X}_{\lambda-2} + r\underset{3}{X}_{\lambda-1} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{3}{X}''_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)}$$

$$-\left[\underset{3}{Y}_{\mu-1} + r\underset{3}{Y}'_{\mu}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} - \left[\underset{3}{Y}_{\mu-2} + r\underset{3}{Y}'_{\mu-1} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{3}{Y}'_{\mu}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-2)}$$

$$-\left[\underset{3}{Z}_{\nu-1} + r\underset{3}{Z}'_{\nu}\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-1)} - \left[\underset{3}{Z}_{\nu-2} + r\underset{3}{Z}'_{\nu-1} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{3}{Z}''_{\nu}\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\left[\underset{3}{X}_{\lambda-3} + r\underset{3}{X}'_{\lambda-2} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{3}{X}''_{\lambda-1} + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}\underset{3}{X}'''_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-3)}$$

$$-\left[\underset{3}{Y}_{\mu-3} + r\underset{3}{Y}'_{\mu-2} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{3}{Y}''_{\mu-1} + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}\underset{3}{Y}'''_{\mu}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-3)}$$

$$-\left[\underset{3}{Z}_{\nu-3} + r\underset{3}{Z}'_{\nu-2} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{3}{Z}''_{\nu-1} + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}\underset{3}{Z}'''_{\nu}\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-3)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\underset{3}{X}_0^{(r)}\mathfrak{x} - \underset{3}{Y}_0^{(r)}\mathfrak{y} - \underset{3}{Z}_0^{(r)}\mathfrak{z} - \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Den Formeln (786) und letztgewonnenen noch allgemeineren (788) lassen sich bereits einige Folgerungen entnehmen. Die ersten nämlich bestimmen, wie schon gesagt: $\mathfrak{x}^{(\lambda)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu)}$, ... in Function der vorangehenden Reihencoefficienten, σ an der Zahl. Denkt man sich zudem in der Gruppe (788) r zuvörderst durch die Einheit ersetzt, so bestimmen sie $\mathfrak{x}^{(\lambda+1)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu+1)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$, ... ebenfalls in linearer Function der $\mathfrak{x}^{(\lambda)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu)}$, ... und noch überdiess derselben vorangehenden Reihencoefficienten σ an der Zahl, durch welche auch $\mathfrak{x}^{(\lambda)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ ausgedrückt worden sind, mithin in letzter Instanz in linearer Function dieser σ letzteren allein. Die sodann für $r = 2$ gedachten Bestimmungsgleichungen (788) bestimmen auf dieselbe Weise $\mathfrak{x}^{(\lambda+2)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu+2)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu+2)}$, ... und zwar in letzter

Instanz in Function derselben σ Grössen u. s. w., so dass sich mithin ganz allgemein und für jedes r $\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu+r)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu+r)}$ ..... als lineare Ausdrücke ergeben nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, ... $\mathfrak{x}^{\lambda-1}$; $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$, ... $\mathfrak{y}^{(\mu-1)}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}'$, ... $\mathfrak{z}^{(\nu-1)}$, ... deren Anzahl gleich: $\lambda + \mu + \nu + \ldots\ldots = \sigma$ ist, zu deren Bestimmung keine Gleichung vorliegt, die mithin eben so viele willkürliche Constanten der Integration vorstellen, enthalten sowohl in dem Werthe von ξ, wie auch in jenen von η, ζ, ... wie sie durch Werthbestimmung der Coefficienten aus den Formeln (781) hervorgehen, die man sich dann nach diesen Constanten geordnet denken kann. Hier kann man bereits auf die Beschaffenheit derjenigen Eliminationsgleichungen einen Rückschluss machen, die man aus dem vorgelegten Systeme (777) gewinnt. Im Allgemeinen ist jede derselben, nämlich die nach ξ, η, ζ, ... von der Ordnungszahl σ, d. h. man bekömmt die Ordnungszahl der Eliminationsgleichung, wenn man die höchsten, in den einzelnen Bestandgleichungen vorkommenden und beziehlich zu den Variablen ξ, η, ζ, ... gehörigen höchsten Differentiationsindices λ, μ, ν, ... addirt. Diess erschliesst man aber auf folgende Weise: Eine jede Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung, aufsteigend nach Potenzen von $x - a$ integrirt, gibt ein Integral mit n willkürlichen Constanten, nicht mehr und auch nicht weniger, welche nach eben denselben linear ist. Wenn mithin umgekehrt ein Ausdruck, wie die für ξ, η, ζ. ..... gewonnenen, solche Constanten in linearer Form n oder σ an der Zahl enthält und wenn man noch überdiess weiss, dass er durch eine Differentialgleichung gegeben ist, die von diesen Constanten keine Spur enthält, so ist diese, wenn gleich unbekannte Differentialgleichung nothwendig von der Ordnung n oder σ und auch von linearer Form.

Diess gilt allgemein, in speciellen Fällen jedoch kann es sich ergeben, dass aus den Ausdrücken für ξ, η, ζ, ... wenn auch nicht allen, doch mindestens einigen unter ihnen gewisse der bezeichneten Constanten von selbst herausfallen. Ist dann die Anzahl der übrigbleibenden in irgend einem dieser Werthe noch vorhandenen Constanten, z. B. ξ, nicht mehr σ, sondern τ, so ist auch die Eliminationsgleichung in ξ nicht mehr nothwendig von der Ordnung σ, sondern nur von der Ordnung τ; und hätte man sie durch das wirklich eingeleitete Eliminationsverfahren mit der höchsten Ordnung σ erhalten, was sehr möglich ist, ja sogar gewöhnlich vorkommen wird, so hätte man $\sigma - \tau$ neue particuläre Integrale durch überflüssiges Eliminiren eingeführt, die dem vorgelegten Systeme fremd sind, und die man in der Folge auszuscheiden hätte. Sie werden bei dem directen hier eingeleiteten Integrationsverfahren jedesmal vermieden.

Es ist bisher stillschweigend vorausgesetzt worden, dass das aufgelöste System der Gleichungen (788) wirklich für die Unbekannten $\mathfrak{x}^{(\lambda)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu)}$, ... bestimmte Werthe liefere. Im Allgemeinen wird diess wirklich so kommen, und nur für specielle Werthe von a kann es aufhören der Fall zu sein, und findet diess einmal bei der ersten Gruppe von Bestimmungsgleichungen (786) statt, so dass man für $\mathfrak{x}^{(\lambda)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu)}$, ... bestimmte Werthe erhält, so gewinnt man auch für alle späteren Coefficienten, wie $\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu+r)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu+r)}$, ... bestimmte Werthe. Diess erhellt daraus, dass in der allgemeinen Gruppe der Bestimmungsgleichungen (788) dieselben Coefficienten der Unbekannten vorkommen, wie in der allerersten Gruppe (786). Wenn mithin der gemeinschaftliche Nenner aller

Brüche, die die Werthe von $\mathfrak{x}^{(\lambda)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu)}$, ..., gezogen aus eben dieser ersten Gruppe, darstellen. T und verschieden von der Nulle ist, so sind $\mathfrak{x}^{(\lambda+1)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu+1)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu+1)}$, ... offenbar gebrochen durch T^2; $\mathfrak{x}^{(\lambda+2)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu+2)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu+2)}$, ... offenbar gebrochen durch T^3 und allgemein $\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu+r)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu+r)}$, ... gebrochen durch T^{r+1}. Unendliche Werthe der Unbekannten kommen in der ganzen Rechnung nicht vor. Nur für specielle a kann das Verhalten ein anderes sein, für solche nämlich, die den mit T bezeichneten gemeinschaftlichen Nenner verschwinden machen. Hier erscheinen nämlich schon die Coefficienten der ersten Gruppe unendlich, oder unbestimmt, und nach ihnen alle anderen auch. Aber gerade dieser Fall ist es, der uns besonders interessirt, denn wir haben gesehen, dass das aufsteigende Integriren nach solchen Differenzen $(x-a)$, wo die Mac-Laurin'sche Formel den Dienst nicht versagt, in der Regel von keinem Nutzen sei und sich nur nutzbringend erweise, wenn für $x = a$ zwei oder mehrere der particulären Integrale unstetig werden, was durch unendliche Werthe der späteren Differentialquotienten gewöhnlich angedeutet wird. Mithin wird das aufsteigende Integriren hier nur dann von Nutzen sein, wenn solche unendliche Werthe in der Rechnung vorkommen, d. h. wenn der gemeinschaftliche Nenner T der Nulle gleich wird. Die Aufsuchung der Werthe von a, die ein solches Verschwinden von T bewirken, ist mithin von Wichtigkeit.

Man erhält sie offenbar auf folgende Weise: Man nimmt das vorgelegte System der Differentialgleichungen selber vor, und ordnet dasselbe, so wie es die Bestimmungsgleichungen (786) und (788) sind, so dass im ersten Theile nur die höchsten Differentialquotienten von ξ, η, ζ, ... erscheinen und alle übrigen Glieder auf die andere Seite des Gleichheitszeichens getragen sind, nämlich:

$$(790)\quad \begin{aligned} \underset{1}{\mathfrak{X}}_\lambda \xi^{(\lambda)} + \underset{1}{\mathfrak{Y}}_\mu \eta^{(\mu)} + \underset{1}{\mathfrak{Z}}_\nu \zeta^{(\nu)} + \dots\dots\dots &= L \\ \underset{2}{\mathfrak{X}}_\lambda \xi^{(\lambda)} + \underset{2}{\mathfrak{Y}}_\mu \eta^{(\mu)} + \underset{2}{\mathfrak{Z}}_\nu \zeta^{(\nu)} + \dots\dots\dots &= M \\ \underset{3}{\mathfrak{X}}_\lambda \xi^{(\lambda)} + \underset{3}{\mathfrak{Y}}_\mu \eta^{(\mu)} + \underset{3}{\mathfrak{Z}}_\nu \zeta^{(\nu)} + \dots\dots\dots &= N \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

mit den Werthen von L, M, N, ...:

$$(791)\quad \begin{aligned} L &= -\underset{1}{\mathfrak{X}}_{\lambda-1}\xi^{(\lambda-1)} - \underset{1}{\mathfrak{Y}}_{\mu-1}\eta^{(\mu-1)} - \underset{1}{\mathfrak{Z}}_{\nu-1}\zeta^{(\nu-1)} - \dots\dots\dots \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad -\underset{1}{\mathfrak{X}}_0\,\xi - \underset{1}{\mathfrak{Y}}_0\,\eta - \underset{1}{\mathfrak{Z}}_0\,\zeta - \dots\dots\dots \\ M &= -\underset{2}{\mathfrak{X}}_{\lambda-1}\xi^{(\lambda-1)} - \underset{2}{\mathfrak{Y}}_{\mu-1}\eta^{(\mu-1)} - \underset{2}{\mathfrak{Z}}_{\nu-1}\zeta^{(\nu-1)} - \dots\dots\dots \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad -\underset{2}{\mathfrak{X}}_0\,\xi - \underset{2}{\mathfrak{Y}}_0\,\eta - \underset{2}{\mathfrak{Z}}_0\,\zeta - \dots\dots\dots \\ N &= -\underset{3}{\mathfrak{X}}_{\lambda-1}\xi^{(\lambda-1)} - \underset{3}{\mathfrak{Y}}_{\mu-1}\eta^{(\mu-1)} - \underset{3}{\mathfrak{Z}}_{\nu-1}\zeta^{(\nu-1)} - \dots\dots\dots \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad -\underset{3}{\mathfrak{X}}_0\,\xi - \underset{3}{\mathfrak{Y}}_0\,\eta - \underset{3}{\mathfrak{Z}}_0\,\zeta - \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Nun löse man die Gleichungen nach den als unbekannt angesehenen: $\xi^{(\lambda)}$, $\eta^{(\mu)}$, $\zeta^{(\nu)}$, ... auf mit Hilfe des wohlbekannten combinatorischen Verfahrens, welches zunächst aus den Coefficienten der Unbekannten, die hier Functionen von x sind, den gemeinschaftlichen Nenner T ihrer gebrochenen Werthe liefert, der gleichfalls eine Function von x ist. Für eine einzige Gleichung mit einer einzigen abhängigen Variablen ξ ist z. B.:

$$T = \underset{1}{\mathfrak{X}}_\lambda$$

Für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten hat man ebenso:

$$T = \underset{1}{\mathfrak{X}}_\lambda \underset{2}{\mathfrak{Y}}_\mu - \underset{2}{\mathfrak{X}}_\lambda \underset{1}{\mathfrak{Y}}_\mu$$

Liegen drei Gleichungen mit drei Unbekannten vor, was sich oft ereignet, so ist:

$$\begin{aligned} T = & \underset{1}{\mathfrak{X}}_\lambda \underset{2}{\mathfrak{Y}}_\mu \underset{3}{\mathfrak{Z}}_\nu - \underset{1}{\mathfrak{X}}_\lambda \underset{3}{\mathfrak{Y}}_\mu \underset{2}{\mathfrak{Z}}_\nu - \underset{2}{\mathfrak{X}}_\lambda \underset{1}{\mathfrak{Y}}_\mu \underset{3}{\mathfrak{Z}}_\nu \\ & + \underset{2}{\mathfrak{X}}_\lambda \underset{3}{\mathfrak{Y}}_\mu \underset{1}{\mathfrak{Z}}_\nu + \underset{3}{\mathfrak{X}}_\lambda \underset{1}{\mathfrak{Y}}_\mu \underset{2}{\mathfrak{Z}}_\nu - \underset{3}{\mathfrak{X}}_\lambda \underset{2}{\mathfrak{Y}}_\mu \underset{1}{\mathfrak{Z}}_\nu \end{aligned}$$

u. s. w. Man erhält nun offenbar alle Werthe von a, welche T der Nulle gleich machen, wenn man die von x hat, welche T zum Verschwinden bringen. Sie sind mithin die Wurzeln der Gleichung $T = 0$ und die Zerlegung des Polynomes T in seine einfachen Factoren von der Form $x - a$ liefert offenbar alle Differenzen $x - a$, nach deren aufsteigenden Potenzen die eingeleitete Integration erspriessliche Resultate liefert. Es kann noch hinzugesetzt werden, dass im Allgemeinen T der erste Coefficient sei, in allen für ξ sowohl, wie für η, ζ, ... gewonnenen Eliminationsgleichungen. Diess erscheint ganz klar, wenn man bedenkt, dass der erste Coefficient der Differentialgleichung jedesmal alle Factoren $x - a$ enthalten muss, bei deren Verschwinden eine Unterbrechung der Stetigkeit irgend eines der particulären Integrale eintritt. Und so hätten wir denn Mittel aufgefunden, nicht nur die Ordnungszahlen sämmtlicher Eliminationsgleichungen mit Genauigkeit zu bestimmen, sondern auch die ersten Coefficienten in denselben anzugeben. Diess in Verbindung mit den Ergebnissen des vorigen Paragraphes, die uns die Kenntniss des umspannenden Polygones verschaffen, führt auch zu den Gradzahlen aller übrigen Coefficienten.

Als wir im §. 1 die aufsteigende Integration der (1) behandelten, kam anstatt der Gleichung $T = 0$ die hier geltende $\mathfrak{X}_n = 0$ zum Vorschein. Die Auflösung derselben lieferte alle einfachen Factoren $x - a$ des ersten Coefficienten, die darin ein- oder mehrmal vorkommen und alle Werthe a der Veränderlichen x, für die das Integral in einem seiner Theile stetig zu sein aufhört. Mit dem Verschwinden von $\mathfrak{X}_n$ wäre nun ein unendlicher Werth des $y^{(n)}$ verbunden. Wir haben ihn nicht zugelassen, indem wir das Produkt $X_n\, y^{(n)}$ der Nulle gleich setzten, $y^{(n)}$ für endlich, mithin $y^{(n)}$ für stetig erklärten auch für $x = a$. Diess hiess aber offenbar alle die für $x = a$ unstetig werdenden particulären Integrale durch Nullsetzen der ihnen zugehörigen Integrationsconstanten wegwerfen, und in der That gingen uns dadurch eine gewisse Anzahl von willkürlichen Constanten $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$ .... verloren und die Rechnung beschäftigte sich nicht mehr mit dem allgemeinen Integrale, sondern nur

mit einem Theile desselben, dem für $x = a$ stetigen nämlich. Sie ging auch ganz ungestört von Statten und wurde nirgends durch die Erscheinung eines unendlichen Coefficientenwerthes unterbrochen, den Fall ausgenommen, wo der zum Factor $x - a$ gehörende Exponent k, oder wo die sogenannten Exponenten, wenn ihrer mehrere waren, in ganze und negative Zahlen übergingen. Dann stiess man im Allgemeinen wieder auf einen unendlichen Coefficientenwerth und zwar einmal oder mehrere Male, je nach der Anzahl der ganzen und negativen k. Durch eine umständliche und gründliche Untersuchung wurde dargethan, dass diese analytischen Erscheinungen von logarithmischen Transcendenten im allgemeinen Integrale herrühren und zwar von darin vorhandenen Gliedern mit den Factoren $log\,(x - a)$, $log^2(x - a)$, ... $log^s(x - a)$, wenn sich für k ganze und negative Werthe ergeben, s an der Zahl. Endlich ist alldort die Sonderung dieser logarithmischen Factoren als Mittel bezeichnet worden, den unendlichen Coefficientenwerthen zu entgehen, und doch zum allgemeinen Integrale zu gelangen.

Wir haben auch hier keinen anderen Weg zu gehen und können, denselben betretend, zu keinen anderen, als zu diesen Erscheinungen gelangen, denn was wir hier vornehmen, kann ja im Grunde nichts anderes sein, als die aufsteigende Integration von n verschiedenen Eliminationsgleichungen mit algebraischen Coefficienten, einer zwischen ξ und x, einer zweiten zwischen η und x u. s. w., nur geschieht diess hier nicht eines nach dem anderen, sondern alles auf Einmal. Wir betreten also wirklich genau denselben Weg und erklären, nachdem wir $T = 0$ angenommen haben, die in Folge dessen etwa unendlich werdenden $\mathfrak{x}^{(\lambda)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu)}$, ... für unzulässig, hiemit nur besagend, dass wir die für $x = a$ unstetig werdenden Bestandtheile von ξ, η, ζ, ... verschmähen und durch Nullsetzen der ihnen anhängenden Integrationsconstanten wegwerfen. Wir sind sodann darauf gefasst, in der Rechnung abermals unendlichen Coefficienten zu begegnen, die nur auf logarithmische Transcendenten hindeuten können. Wir forschen nach, wie und wo sie vorkommen und erschliessen daraus, das bei einzelnen Gleichungen übliche Verfahren umkehrend, die Exponenten k, die zu den einfachen Factoren $x - a$ des T gehören. Zu diesem Zwecke mag vorerst bemerkt werden, dass die aus den Bestimmungsgleichungen (786) gezogenen Werthe von $\mathfrak{x}^{(\lambda)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu)}$, ... in Bruchform vorhanden seien, wie folgt:

$$\mathfrak{x}^{(\lambda)} = \frac{S_1}{T}, \quad \mathfrak{y}^{(\mu)} = \frac{S_2}{T}, \quad \mathfrak{z}^{(\nu)} = \frac{S_3}{T}, \quad \ldots \tag{792}$$

Das Verschwinden des gemeinschaftlichen Nenners T haben wir geflissentlich herbeigeführt. Unendliche $\mathfrak{x}^{(\lambda)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu)}$, ... lassen wir aber nicht zu, mithin sind wir genöthigt, auch alle Zähler ihrer gebrochenen Werthe der Nulle gleich anzunehmen. Diess gibt n Gleichungen, nämlich die:

$$S_1 = S_2 = S_3 = \ldots\ldots S_n = 0$$

und es dürfte auf den ersten Blick scheinen, als ob dadurch von den in S_1, S_2, S_3, ... S_n enthaltenen Reihencoefficienten n an der Zahl bestimmt und durch die übrigen ausgedrückt zu werden vermöchten. Diese könnten dann zweckmässiger Weise sein: $\mathfrak{x}^{(\lambda-1)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu-1)}$, $\mathfrak{z}^{(\nu-1)}$ ..... Hiedurch würde uns aber ein Verlust zugehen von n Integrationsconstanten, wie aus einer aufmerksameren Betrachtung

des Rechnungsganges erhellt. Der wahre Sachverhalt ist indess ein ganz anderer. Man bekommt nämlich in der Regel nicht n Bedingungsgleichungen des Verschwindens sämmtlicher Zähler, sondern nur eine einzige und erleidet damit auch in der Regel nur den Verlust von einer einzigen Integrationsconstante. In selteneren Fällen ist die Anzahl der Bedingungsgleichungen zwei und es gehen dann zwei Constante verloren. Noch seltener sind die Fälle, wo drei Bedingungsgleichungen vorhanden sind und drei Constante verloren gehen u. s. w. Um diess und alles dasjenige, was daran hängt, gründlich einzusehen, ist es nothwendig, die bekannte combinatorische Auflösungsmethode eines Systemes von n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten sich zu vergegenwärtigen. Man zeichne sie auf in folgender Gestalt:

$$\begin{array}{l} (1, 1)\, x_1 + (1, 2)\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + (1, n)\, x_n = (1) \\ (2, 1)\, x_1 + (2, 2)\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + (2, n)\, x_n = (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n, 1)\, x_1 + (n, 2)\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + (n, n)\, x_n = (n) \end{array} \qquad (79$$

Das bekannte combinatorische Verfahren gibt zuvörderst den gemeinschaftlichen Nenner der gebrochenen Werthe aller Unbekannten $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, der eine ganze Function ist sämmtlicher in den ersten Theilen dieser Gleichungen erscheinenden Coefficienten, begabt mit der Eigenschaft, sich allsogleich auf Null zu reduziren, wenn entweder eine beliebige Verticalreihe der Coefficienten durch eine beliebige andere Verticalreihe, oder wenn eine beliebige Horizontalreihe durch eine beliebige andere Horizontalreihe ersetzt wird. Mithin findet diese Reduction auf Null auch dann Statt, wenn man z. B. eine beliebige Horizontalreihe ersetzt durch einen Ausdruck, der erhalten wird durch Multiplication der übrigen Horizontalreihen, aller oder nur einiger mit gewissen Zahlen und Addition. Gesetzt nun den Fall, der erste Theil von irgend einer dieser Gleichungen etwa von der letzten, sei erhalten durch Multiplication der ersten Theile der übrigen $n - 1$ an der Zahl mit gewissen Constanten und Addition, so reduzirt ein solcher Sachverhalt offenbar den gemeinschaftlichen Nenner der $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ auf Null und zu gleicher Zeit kann man sagen, dass die so gebildete letzte der Gleichungen entweder eine unmittelbare Folge aller übrigen und von ihnen nicht verschieden sei, oder dass sie mit denselben im Widerspruche stehen je nach dem Werthe, den der zweite Theil annimmt. Es kann sich aber auch treffen, wiewohl diess der seltenere Fall ist, dass von den vorgelegten n Gleichungen des ersten Grades zwei aus den übrigen auf die angedeutete Weise hervorgehen. Noch seltener werden es drei sein u. s. w.

Betrachten wir zuvörderst den ersten und beim Verschwinden des Nenners gewöhnlichen Fall, wo von dem vorgelegten Systeme von n Gleichungen deren $n - 1$ beliebige von einander verschieden sind und nur eine, etwa die letzte entweder als unmittelbare Folge derselben, oder ihnen widersprechend zu betrachten ist; so kann man jedesmal vermittelst der ersten $n - 1$ unter ihnen eben so viele der Unbekannten, etwa $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_{n-1}$ durch die letzte x_n ausdrücken und erhält, auf diese Weise vorgehend, der Form nach:

$$x_1 = a_1 x_1 + h_1,\ x_2 = a_2 x_2 + h_2,\ \ldots\ldots\ x_{n-1} = a_{n-1} x_n + h_{n-1}. \tag{794}$$

Ein verschwindender Nenner dieser so geformten Werthe besteht nicht, weil der Voraussetzung nach die $n-1$ Gleichungen von einander verschieden sind. Es sind mithin: $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$ lauter endliche und bestimmte Grössen. Wenn daher auch die verwendeten $n-1$ Gleichungen für $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-1}, x_n$ keine bestimmten Werthe geben, so liefern sie doch bestimmte Werthe der Differenzen:

$$x_1 - a_1 x_n,\ x_2 - a_2 x_n,\ \ldots\ldots\ldots\ x_{n-1} - a_{n-1} x_n \tag{795}$$

nämlich die:

$$h_1,\ h_2,\ \ldots\ldots\ldots\ h_{n-1}. \tag{796}$$

Diese $n-1$ Gleichungen vermögen daher aufgezeichnet zu werden auch in der folgenden Weise:

$$\begin{array}{l} (1,1)(x_1 - a_1 x_n) + (1,2)(x_2 - a_2 x_n) + \ldots\ldots + (1, n-1)(x_{n-1} - a_{n-1} x_n) = (1) \\ (2,1)(x_1 - a_1 x_n) + (2,2)(x_2 - a_2 x_n) + \ldots\ldots + (2, n-1)(x_{n-1} - a_{n-1} x_n) = (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1,1)(x_1 - a_1 x_n) + (n-1,2)(x_2 - a_2 x_n) + \ldots\ldots (n-1, n-1)(x_{n-1} - a_{n-1} x_n) = (n-1) \end{array} \tag{797}$$

Da aber der Voraussetzung nach die n^{te} und letzte der Gleichungen (793) durch Multiplication und Addition aus den übrigen wenigstens nach ihrem ersten Theile abgeleitet ist, so kann sie offenbar ebenfalls gegeben werden in derselben Form nämlich:

$$(n,1)(x_1 - a_1 x_n) + (n,2)(x_2 - a_2 x_n) + \ldots\ldots + (n, n-1)(x_{n-1} - a_{n-1} x_n) = (n) \tag{798}$$

und geht, wenn man für die Unbekannten (795) die entsprechenden Werthe (796) einführt, über in:

$$(n,1)\, h_1 + (n,2)\, h_2 + \ldots\ldots\ldots + (n, n-1)\, h_{n-1} = (n) \tag{799}$$

und diese ist die einzige Bedingungsgleichung, die erfüllt sein muss, wenn die aus dem Systeme (793) gezogenen Werthe $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ nicht unendlich sein, mithin in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen sollen. Sie werden dann sämmtlich, wie die (793) lehren, unbestimmt in so ferne, als man eine von ihnen mit einem willkürlichen Zahlwerthe belegen und dann aus den (793) jedesmal die übrigen dazu finden kann. Es ist nicht unwichtig, darauf aufmerksam zu machen, dass sie nicht immer alle unbestimmt sind, weil von den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-1}$ einer oder mehrere gelegentlich in Null übergehen können, wodurch sich der Werth der betreffenden Unbekannten in einen bestimmten verwandelt.

Der unmittelbare Anblick der Gleichungen (797), die alle der Form nach unter sich und mit der (798) übereinstimmen, belehrt uns, dass, wenn in einem Systeme von n Gleichungen des ersten Grades, wie das vorgelegte, irgend eine von den übrigen verschieden zu sein aufhört, indem sie aus ihnen durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition hervorgeht, man in der Regel durchaus nicht sagen könne, welche von ihnen sich in diesem Falle befindet. Es hat dann nämlich jede Horizontalreihe der Coefficienten die Eigenschaft, aus den übrigen durch Multiplication mit bestimmten Constanten und Addition hervorzugehen; ja noch mehr, auch bei den Verticalreihen der Coefficienten

lässt sich dieselbe Eigenschaft ohne Mühe nachweisen. Bei den Gleichungen (797) ist diess in Bezug auf die zur Unbekannten x_n gehörende Verticalreihe unmittelbar zu ersehen. Vergleicht man nämlich die (793) und die vorausgesetztermassen aus ihnen hervorgehenden (797) untereinander in Bezug auf die zu x_n gehörigen Coefficienten, so sieht man allsogleich, dass:

$$(1, n) = -a_1(1, 1) - a_2(1, 2) - \dots\dots\dots - a_{n-1}(1, n-1)$$
$$(2, n) = -a_1(2, 1) - a_2(2, 2) - \dots\dots\dots - a_{n-1}(2, n-1)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(n, n) = -a_1(n, 1) - a_2(n, 2) - \dots\dots\dots - a_{n-1}(n, n-1)$$

d. h. offenbar: die zu x_n in (793) gehörige Verticalreihe der Coefficienten geht aus den übrigen Verticalreihen durch Multiplication mit den Factoren $-a_1$, $-a_2$, ... $-a_{n-1}$ und Addition hervor; allein auch die übrigen Unbekannten, nämlich x_1, x_2, ... x_{n-1} befinden sich in denselben Verhältnissen und ebenso gut, wie man vermittelst der Gleichungen (794), die x_1, x_2, x_{n-1} ausgedrückt hat durch x_n, hätte man auch eine andere wählen können z. B. x_1, die in den Werthen aller übrigen erscheint. Es ist zu diesem Zwecke nur nothwendig, aus der ersten von ihnen x_n in Function von x_1 zu suchen und den gefundenen Werth in die übrigen zu substituiren. Nur wenn $a_1 = 0$ ausfällt, wenn also x_1 seinem Werthe nach nicht unbestimmt, sondern bestimmt und gleich h_1 wäre, lässt sich diess nicht thun. Diesen speciellen Fall, wo nämlich durch ein System (793) von algebraischen Gleichungen irgend eine oder mehrere Uebekannte z. B. die x_1 vollkommen bestimmt sind, während die übrigen unbestimmt bleiben, erkennt man aber daran, dass, wenn diese x_1 allenthalben in die zweiten Theile der Gleichungen hinübergetragen wird, und man sodann aus den so gewonnenen n Gleichungen beliebige $n-1$ an der Zahl auswählt, als zur Bestimmung von x_2, x_3, ... x_n dienlich, man wieder einen gemeinschaftlichen Nenner Null bekömmt und alle diejenigen Unbekannten, durch deren Hinüberschaffen in die zweiten Theile der Gleichungen der verschwindende Nenner nicht weggehoben wird, sind ihrem Werthe nach durch die (793) vollkommen bestimmt, insoferne sie nicht als Functionen der übrigen, sondern lediglich als Functionen der Gleichungscoefficienten erscheinen.

Manchmal und offenbar viel seltener trifft es sich, dass von den vorgelegten (793) nur $n-2$ von einander verschieden sind und die übrigen, z. B. die letzten zwei durch Multiplication mit gewissen Grössen und Addition aus den vorhergehenden abgeleitet sind. In einem solchen Falle wird man, die $n-2$ ersten auflösend, Ausdrücke für eben so viele Unbekannte erhalten, wie folgt:

$$x_1 = a_1 x_{n-1} + b_1 x_n + h_1\ ,\quad x_2 = a_2 x_{n-1} + b_2 x_n + h_2,\ \dots\dots\ x_{n-2} = a_{n-2} x_{n-1} + b_{n-2} x_n + h_{n-2}. \qquad (80$$

Man wird also keine bestimmten Werthe erringen für x_1, x_2, ... x_n, wohl aber für die Differenzen:

$$x_1 - a_1 x_{n-1} - b_1 x_n,\ x_2 - a_2 x_{n-1} - b_2 x_n,\ \dots\dots\ x_{n-2} - a_{n-2} x_{n-1} - b_{n-2} x_n \qquad (80$$

nämlich beziehlich die:

$$h_1,\ h_2,\ \dots\dots\ h_{n-2} \qquad (80$$

Die anfänglichen $n - 2$ von einander verschiedenen der Gleichungen (793) werden mithin aufgestellt werden können in folgender Gestalt:

$$(803)\quad \begin{aligned} &(1,1)(x_1-a_1x_{n-1}-b_1x_n)+(1,2)(x_2-a_2x_{n-1}-b_2x_n)+\ldots+(1,n-2)(x_{n-2}-a_{n-2}x_{n-1}-b_{n-2}x_n)=(1)\\ &(2,1)(x_1-a_1x_{n-1}-b_1x_n)+(2,2)(x_2-a_2x_{n-1}-b_2x_n)+\ldots+(2,n-2)(x_{n-2}-a_{n-2}x_{n-1}-b_{n-2}x_n)=(2)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(n-2,1)(x_1-a_1x_{n-1}-b_1x_n)+(n-2,2)(x_2-a_2x_{n-1}-b_2x_n)+\ldots+(n-2,n-2)(x_{n-2}-a_{n-2}x_{n-1}-b_{n-2}x_n)=(n-2) \end{aligned}$$

und weil aus ihren ersten Theilen durch Multiplication mit gewissen Grössen und Addition vorausgesetzter Massen auch die ersten Theile der letzten beiden dieser Gleichungen gebildet werden, so sind auch diese offenbar von derselben Gestalt, nämlich:

$$(804)\quad \begin{aligned} &(n-1,1)(x_1-a_1x_{n-1}-b_1x_n)+(n-1,2)(x_2-a_2x_{n-1}-b_2x_n)+\ldots+(n-1,n-2)(x_{n-2}-a_{n-2}x_{n-1}-b_{n-2}x_n)=(n-1)\\ &(n,1)(x_1-a_1x_{n-1}-b_1x_n)+(n,2)(x_2-a_2x_{n-1}-b_2x_n)+\ldots+(n,n-2)(x_{n-2}-a_{n-2}x_{n-1}-b_{n-2}x_n)=(n) \end{aligned}$$

und verwandeln sich durch Einführung der Werthe (802) für die Ausdrücke (801) in:

$$(805)\quad \begin{aligned} &(n-1,1)h_1+(n-1,2)h_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1,n-2)h_{n-2}=(n-1)\\ &(n,1)h_1\quad+(n,2)h_2\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n,n-2)h_{n-2}\quad=(n) \end{aligned}$$

Man hat mithin diese zwei Bedingungsgleichungen des Verschwindens sämmtlicher Zähler der gebrochenen Werthe von $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ und ihrer endlichen Beschaffenheit. Unbestimmten Werthes sind in der Regel alle, manchmal nur einige unter ihnen, insoferne man zwei von ihnen mit beliebigen Zahlenwerthen versehen und dazu die übrigen aus den Gleichungen (804) finden kann.

Setzt man diese Beobachtungen fort, so sieht man ein, dass Bedingungsgleichungen des Verschwindens sämmtlicher Zähler in der Regel nur Eine, seltener zwei, noch seltener drei, höchstens aber n an der Zahl bestehen. Dass die Anzahl der Bedingungsgleichungen auch zugleich die Anzahl derjenigen Unbekannten ist, die nicht bestimmt werden und die man mit beliebigen Werthen versehen kann. Welche dieser Unbekannten auf diese Weise willkürlich bleiben, kann im Vorhinein nicht gesagt werden, sondern muss sich im Verfolge der Rechnung selbst ergeben.

Nach diesen Erörterungen, die der klaren Einsicht wegen als nothwendig erscheinen, kehren wir zurück zum Integrationsgeschäfte und nehmen die gebrochenen Werthe von $\mathfrak{x}^{(\lambda)}, \mathfrak{y}^{(\mu)}, \mathfrak{z}^{(\nu)}, \ldots\ldots$ die unter (792) erscheinen, wieder vor. Ihre Zähler, n an der Zahl, werden beim Verschwinden des Nenners zu gleicher Zeit der Nulle gleich, wenn auch nur eine einzige Bedingung erfüllt ist; mithin müssen vielleicht einige von ihnen schon in unmittelbarer Folge des verschwindenden Nenners zu gleicher Zeit in Null übergehen, während andere einen gemeinschaftlichen Factor haben, der der Nulle gleich gesetzt, eben die einzige in der Regel vorhandene Bedingungsgleichung gibt. Erwägen wir zudem, dass in $S_1, S_2, \ldots\ldots S_n$ die Coefficienten:

$$\mathfrak{x}^{(\lambda-1)}, \mathfrak{y}^{(\mu-1)}, \mathfrak{z}^{(\nu-1)}, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

enthalten sind; so wird man durch eine einzige bestehende Bedingungsgleichung einen von ihnen, etwa $\mathfrak{x}^{(\lambda-1)}$, ausgedrückt erhalten in linearer Function der übrigen, dagegen wird ein anderer, der in den

ersten Theilen der Gleichungen (786) enthaltenen Coefficienten, etwa $\mathfrak{x}^{(\lambda)}$ seinem Werthe nach unbestimmt bleiben. Denkt man sich mithin den unbestimmt bleibenden $\mathfrak{x}^{(\lambda)}$ auf die andere Seite des Gleichheitszeichens übertragen, den bestimmten $\mathfrak{x}^{(\lambda-1)}$ aber herüber unter die Unbekannten versetzt, so erhält man anstatt der (786) eine neue Gruppe von Bestimmungsgleichungen, bei welcher kein verschwindender gemeinschaftlicher Nenner erscheinen kann, es sei denn, dass man in den zweiten Theil der Gleichung keinen unbestimmten, sondern einen bestimmten Coefficienten übertragen hätte, wo dann abermals ein gemeinschaftlicher Nenner Null eintritt, wie man sich durch Betrachtungen, die den eben angestellten homogen sind und leicht aus ihnen fliessen, überzeugt. Man hat also mit einem Worte die Uebertragung einer, ihrem Werthe nach unbestimmten Unbekannten aus den ersten Theilen der Gleichungen (786) in die zweiten und den Ersatz derselben durch eine andere aus den zweiten Theilen in die ersten herübergetragene zu veranstalten in einer Weise, dass ein gemeinschaftlicher Nenner Null vermieden wird. Nehmen wir an, diess sei gelungen, und die Gleichungen (786) seien in geänderter Aufstellung:

$$\left.\begin{array}{l}
\underset{1}{X}_{\lambda-1}\mathfrak{x}^{(\lambda-1)} + \underset{1}{Y}_{\mu}\mathfrak{y}^{(\mu)} + \underset{1}{Z}_{\nu}\mathfrak{z}^{(\nu)} + \ldots\ldots\ldots = -\underset{1}{X}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda)} + \mathfrak{L} \\
\underset{2}{X}_{\lambda-1}\mathfrak{x}^{(\lambda-1)} + \underset{2}{Y}_{\mu}\mathfrak{y}^{(\mu)} + \underset{2}{Z}_{\nu}\mathfrak{z}^{(\nu)} + \ldots\ldots\ldots = -\underset{2}{X}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda)} + \mathfrak{M} \\
\underset{3}{X}_{\lambda-1}\mathfrak{x}^{(\lambda-1)} + \underset{3}{Y}_{\mu}\mathfrak{y}^{(\mu)} + \underset{3}{Z}_{\nu}\mathfrak{z}^{(\nu)} + \ldots\ldots\ldots = -\underset{3}{X}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda)} + \mathfrak{N} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (806)$$

Der der Voraussetzung nach von Null verschiedene Nenner der gebrochenen Werthe von $\mathfrak{x}^{(\lambda-1)}, \mathfrak{y}^{(\mu)}, \mathfrak{z}^{(\nu)}, \ldots$ wie sie aus diesen Gleichungen gezogen werden, sei $\mathfrak{T}$, so hat man im Falle einer einzigen Gleichung mit einer einzigen abhängigen Veränderlichen ξ:

$$\mathfrak{T} = X_{\lambda-1}$$

im Falle wo zwei Differentialgleichungen mit zwei abhängigen Veränderlichen ξ, η vorliegen, besteht:

$$\mathfrak{T} = \underset{1}{X}_{\lambda-1}\,\underset{2}{Y}_{\mu} - \underset{2}{X}_{\lambda-1}\,\underset{1}{Y}_{\mu}$$

Sind drei Differentialgleichungen mit drei abhängigen Veränderlichen ξ, η, ζ gegeben, so hat man:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T} = {} & \underset{1}{X}_{\lambda-1}\underset{2}{Y}_{\mu}\underset{3}{Z}_{\nu} - \underset{1}{X}_{\lambda-1}\underset{3}{Y}_{\mu}\underset{2}{Z}_{\nu} - \underset{2}{X}_{\lambda-1}\underset{1}{Y}_{\mu}\underset{3}{Z}_{\nu} \\
& + \underset{2}{X}_{\lambda-1}\underset{3}{Y}_{\mu}\underset{1}{Z}_{\nu} + \underset{3}{X}_{\lambda-1}\underset{1}{Y}_{\mu}\underset{2}{Z}_{\nu} - \underset{3}{X}_{\lambda-1}\underset{2}{Y}_{\mu}\underset{1}{Z}_{\nu}
\end{aligned}$$

u. s. w. und es ist nicht nöthig, $\mathfrak{T}$ selbstständig zu bilden, wenn man T bereits hat, sondern man hat T nur nach irgend einer Verticalreihe der Coefficienten, hier nach der ersten, zu ordnen und diese Verticalreihe durch eine andere zu $\mathfrak{x}^{(\lambda-1)}$ gehöriger Coefficienten, d. h. die erste der (806) zu ersetzen, sodann aber x in a zu verwandeln, mit der hinzugefügten Bemerkung, dass diese Vertauschung der Unbekannten, respective der Verticalreihen der Coefficienten stattzufinden habe in einer Weise, dass die nachfolgende Substitution $x = a$ nicht mehr einen Nullwerth des gemeinschaftlichen Nenners zur Folge hat.

Mit der Auflösung der neu aufgestellten Gleichungen (806) beginnt jetzt die Reihenentwicklung der Bestandtheile von ξ, η, ζ, ... die für $x = a$ stetig bleiben, wenn nicht etwa ein Logarithmus eine neue Unterbrechung der Stetigkeit herbeiführt und durch einen unendlichen Coefficientenwerth kennzeichnet. Die der Bestimmung fähigen in den (806) enthaltenen Grössen sind:

$$\mathfrak{x}^{(\lambda)}, \underline{\mathfrak{y}^{(\mu)}, \mathfrak{z}^{(\nu)}, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{x}^{(\lambda-1)}}, \mathfrak{y}^{(\mu-1)}, \mathfrak{z}^{(\nu-1)}, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{807}$$

Von ihnen werden nur die Werthe der Unterstrichenen in Function der übrigen gezogen, wodurch sich vorderhand noch gar kein Verlust einer Integrationsconstante ergibt, weil auch für beliebige a von den verzeichneten Coefficienten n an der Zahl durch die übrigen bestimmt wurden, nur waren diess die ersten n der Reihe, während gegenwärtig gerade der erste nicht bestimmt wird. Geht man jetzt von der ersten Gruppe der Bestimmungsgleichungen zur zweiten über und verfährt mit ihr ebenso aus demselben Grunde, nämlich um unendliche Coefficientenwerthe zu vermeiden, so sieht man alsbald, dass in dieser zweiten Gruppe die folgenden bestimmungsfähigen Grössen vorkommen:

$$\mathfrak{x}^{(\lambda+1)}, \underline{\mathfrak{y}^{(\mu+1)}, \mathfrak{z}^{(\nu+1)} \ldots\ldots \mathfrak{x}^{(\lambda)}}, \mathfrak{y}^{(\mu)}, \mathfrak{z}^{(\nu)}, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

von denen wieder nur die Unterstrichenen zur Bestimmung gelangen, unter welchen sich auch dasjenige $\mathfrak{x}^{(\lambda)}$ befindet, das in der früheren Rechnung unbestimmt gelassen wurde.

Geht man jetzt von der zweiten Gruppe der Bestimmungsgleichungen zur dritten, vierten u. s. w. über, so sieht man erstens, dass in letzter Instanz von allen bestimmungsfähigen Coefficientenwerthen nur die folgenden unbestimmt bleiben, so weit man auch die Rechnung fortsetzen mag, nämlich:

$$\mathfrak{y}^{\mu-1}, \mathfrak{z}^{\nu-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{x}^{\lambda-2}, \mathfrak{y}^{\mu-2}, \mathfrak{z}^{\nu-2}, \ldots\ldots \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots\ldots$$

Sie sind $\sigma - 1$ an der Zahl, folglich um eine Constante weniger, als bei unbestimmt gelassenen a, daher denn auch nur ein einziges particuläres Integral verloren geht, das für $x = a$ unstetig wird und in der Regel als Bestandtheil von ξ sowohl, wie auch in η, ζ, ... vorkommt. Zweitens die wirkliche Berechnung der Gruppen von Coefficienten aus den aufeinanderfolgenden Bestimmungsgleichungen ist, insoferne eine etwas complizirtere, als bei unbestimmt gelassenem a all' diesen verschiedenen Gruppen nicht einerlei gemeinschaftlicher Nenner mehr zukömmt, dieser Nenner vielmehr von Gruppe zu Gruppe ein stets anderer wird. Es besteht indess für denselben immer eine ganz allgemeine Formel, welche gezogen ist aus der Hauptgruppe, derjenigen nämlich, die wir mit:

$$\mathbf{P}^{(r)} = 0, \ \mathbf{Q}^{(r)} = 0, \ \mathbf{R}^{(r)} = 0, \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

bezeichnet haben und die in zweckmässiger Aufstellung analog der (806) so aussieht:

$$\begin{aligned}
&(\underset{1}{\mathbf{X}}_{\lambda-1} + r\underset{1}{\mathbf{X}}_{\lambda})\, \mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \underset{1}{\mathbf{Y}}_{\mu}\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \underset{1}{\mathbf{Z}}_{\nu}\mathfrak{z}^{(\nu+r)} + \ldots\ldots = -\underset{1}{\mathbf{X}}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \mathfrak{L}_r \\
&(\underset{2}{\mathbf{X}}_{\lambda-1} + r\underset{2}{\mathbf{X}}_{\lambda})\, \mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \underset{2}{\mathbf{Y}}_{\mu}\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \underset{2}{\mathbf{Z}}_{\nu}\mathfrak{z}^{(\nu+r)} + \ldots\ldots = -\underset{2}{\mathbf{X}}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \mathfrak{M}_r \\
&(\underset{3}{\mathbf{X}}_{\lambda-1} + r\underset{3}{\mathbf{X}}_{\lambda})\, \mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \underset{3}{\mathbf{Y}}_{\mu}\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \underset{3}{\mathbf{Z}}_{\nu}\mathfrak{z}^{(\nu+r)} + \ldots\ldots = -\underset{3}{\mathbf{X}}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \mathfrak{N}_r \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{808}$$

Hier bedeuten $\mathfrak{L}_r$, $\mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{N}_r$ ..... allgemein für jedes r von Null angefangen die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_r = & -\left[\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu-1} + r\underset{1}{\mathrm{Y}'_{\mu}}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} - \left[\underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda-2} + r\underset{1}{\mathrm{X}'_{\lambda-1}} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{1}{\mathrm{X}''_{\lambda}}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)} \\
& -\left[\underset{1}{\mathrm{Z}}_{\nu-1} + r\underset{1}{\mathrm{Z}'_{\nu}}\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-1)} - \left[\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu-2} + r\underset{1}{\mathrm{Y}'_{\mu-1}} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{1}{\mathrm{Y}''_{\mu}}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-2)} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad - \left[\underset{1}{\mathrm{Z}}_{\nu-2} + r\underset{1}{\mathrm{Z}'_{\nu-1}} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{1}{\mathrm{Z}''_{\nu}}\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-2)} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& -\underset{1}{\mathrm{X}}_{0}^{(r)}\mathfrak{x} - \underset{1}{\mathrm{Y}}_{0}^{(r)}\mathfrak{y} - \underset{1}{\mathrm{Z}}_{0}^{(r)}\mathfrak{z} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{M}_r = & -\left[\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu-1} + r\underset{2}{\mathrm{Y}'_{\mu}}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} - \left[\underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda-2} + r\underset{2}{\mathrm{X}'_{\lambda-1}} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{2}{\mathrm{X}''_{\lambda}}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)} \\
& -\left[\underset{2}{\mathrm{Z}}_{\nu-1} + r\underset{2}{\mathrm{Z}'_{\nu}}\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-1)} - \left[\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu-2} + r\underset{2}{\mathrm{Y}'_{\mu-1}} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{2}{\mathrm{Y}''_{\mu}}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-2)} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad - \left[\underset{2}{\mathrm{Z}}_{\nu-2} + r\underset{2}{\mathrm{Z}'_{\nu-1}} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{2}{\mathrm{Z}''_{\nu}}\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-2)} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& -\underset{2}{\mathrm{X}}_{0}^{(r)}\mathfrak{x} - \underset{2}{\mathrm{Y}}_{0}^{(r)}\mathfrak{y} - \underset{2}{\mathrm{Z}}_{0}^{(r)}\mathfrak{z} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{N}_r = & -\left[\underset{3}{\mathrm{Y}}_{\mu-1} + r\underset{3}{\mathrm{Y}'_{\mu}}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} - \left[\underset{3}{\mathrm{X}}_{\lambda-2} + r\underset{3}{\mathrm{X}'_{\lambda-1}} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{3}{\mathrm{X}''_{\lambda}}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)} \\
& -\left[\underset{3}{\mathrm{Z}}_{\nu-1} + r\underset{3}{\mathrm{Z}'_{\nu}}\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-1)} - \left[\underset{3}{\mathrm{Y}}_{\mu-2} + r\underset{3}{\mathrm{Y}'_{\mu-1}} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{3}{\mathrm{Y}''_{\mu}}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-2)} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad - \left[\underset{3}{\mathrm{Z}}_{\nu-2} + r\underset{3}{\mathrm{Z}'_{\nu-1}} + \frac{r(r-1)}{2}\underset{3}{\mathrm{Z}''_{\nu}}\right]\mathfrak{z}^{(\nu+r-2)} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& -\underset{3}{\mathrm{X}}_{0}^{(r)}\mathfrak{x} - \underset{3}{\mathrm{Y}}_{0}^{(r)}\mathfrak{y} - \underset{3}{\mathrm{Z}}_{0}^{(r)}\mathfrak{z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{809}$$

Denkt man sich hier den gemeinschaftlichen Nenner gebildet, so heisst derselbe bei einer einzigen gegebenen Differentialgleichung zwischen einer einzigen abhängigen Veränderlichen ξ und der unabhängigen x:

$$\mathfrak{T}_r = \underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda-1} + r\underset{1}{\mathrm{X}'_{\lambda}} \tag{810}$$

Bei einem Systeme von zwei Differentialgleichungen mit zwei abhängigen Veränderlichen ξ, η:

$$\mathfrak{T}_r = \underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu} - \underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu} + r(\underset{1}{\mathrm{X}'_{\lambda}}\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu} - \underset{2}{\mathrm{X}'_{\lambda}}\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu}) \tag{811}$$

Bei drei Differentialgleichungen mit drei abhängigen Variablen ξ, η, ζ:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_r = & \underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{3}{\mathrm{Z}}_{\nu} - \underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}\underset{3}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{2}{\mathrm{Z}}_{\nu} - \underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{3}{\mathrm{Z}}_{\nu} \\
& + \underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}\underset{3}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{1}{\mathrm{Z}}_{\nu} + \underset{3}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{2}{\mathrm{Z}}_{\nu} - \underset{3}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{1}{\mathrm{Z}}_{\nu} \\
& + r\left\{\begin{aligned} & \underset{1}{\mathrm{X}'_{\lambda}}\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{3}{\mathrm{Z}}_{\nu} - \underset{1}{\mathrm{X}'_{\lambda}}\underset{3}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{2}{\mathrm{Z}}_{\nu} - \underset{2}{\mathrm{X}'_{\lambda}}\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{3}{\mathrm{Z}}_{\nu} \\ & + \underset{2}{\mathrm{X}'_{\lambda}}\underset{3}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{1}{\mathrm{Z}}_{\nu} + \underset{3}{\mathrm{X}'_{\lambda}}\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{2}{\mathrm{Z}}_{\nu} - \underset{3}{\mathrm{X}'_{\lambda}}\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{1}{\mathrm{Z}}_{\nu} \end{aligned}\right.
\end{aligned} \tag{812}$$

u. s. w. Man wird hier eine neue, in die Rechnung fallende Zahl gewahr, nämlich den Differentiationsindex r und zugleich die Möglichkeit, den Nenner $\mathfrak{T}_r$ abermals verschwinden zu sehen, wenn es nämlich eine ganze positive Zahl wirklich gibt, für welche $\mathfrak{T}_r = 0$ wird. Irgend ein r wird diess nun freilich leisten, hier aber muss es ein ganzes und positives sein, weil ein in der Taylor'schen Reihenentwicklung vorkommender Differentiationsindex nur ganzer positiver Werthe fähig ist; die mit diesem allmäligen Verschwinden verbundenen analytischen Erscheinungen verdienen aber hier ebenso, wie bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen nur zwei Veränderlichen eine sorgfältigere Beachtung.

In diesem einfachsten Falle einer einzigen Differentialgleichung zwischen ξ und x gibt die Gleichung $\mathfrak{T}_r = 0$ den folgenden Werth von r:

$$r = -\frac{\underset{1}{X}_{\lambda-1}}{\underset{1}{X}'_{\lambda}} \tag{813}$$

Hiebei verwandelt sich die erste der (808), die sonst den Werth zu liefern gehabt hätte von $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$, wegen $T = \underset{1}{X}_\lambda = 0$ in $\mathfrak{L} = 0$ und verweigert die Bestimmung dieses $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$, zugleich zwischen den in $\mathfrak{L}$ vorfindigen Coefficienten, nämlich $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \ldots\ldots \mathfrak{x}^{(\lambda-2)}$ eine neue Relation aufstellend, die, wie man annehmen kann, $\mathfrak{x}^{(\lambda-2)}$ in Function der übrigen gibt und so abermals eine Integrationsconstante verschwinden macht. Opfert man nun diese auf, so erhält man aus den folgenden Bestimmungsgleichungen ohne allen ferneren Anstand die Werthe: $\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}, \mathfrak{x}^{(\lambda+r+1)}, \mathfrak{x}^{(\lambda+r+2)}, \ldots\ldots$ in linearer Function von $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \ldots\ldots \mathfrak{x}^{(\lambda-3)}$ und von $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$, welche letztere als eine neue Integrationsconstante in der Rechnung auftritt und multiplizirt erscheint mit einem neuen particulären Integrale, welches der Potenz $(x - a)^h$ proportional ist, unter h den folgenden Werth verstanden:

$$h = \lambda + r - 1$$

Dieses eine, zuletzt hinzutretende particuläre Integral kann man auch isolirt der Berechnung unterwerfen, indem man:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' = \mathfrak{x}'' = \ldots\ldots \mathfrak{x}^{(\lambda-2)} = 0$$

mithin auch $\mathfrak{L} = 0$ voraussetzt, was alle particulären Integrale wegwerfen heisst, mit deren Entwicklung sich die Rechnung bis dahin beschäftigt hat. Diess alles ist uns aus früheren Untersuchungen wohl bekannt und wir wissen sogar, dass das Vorhandensein eines solchen particulären Integrales mit der h^{ten} Potenz von $x - a$ als Factor keineswegs geknüpft sei an die ganze und positive Beschaffenheit des r, wie es aus der Formel (813) fliesst, sondern allgemein gelte, was auch die Bedeutung desselben sein mag. Offenbar lässt sich dieser Sachverhalt auch übertragen auf Systeme von beliebig vielen Differentialgleichungen, eben weil ihre Integration auf lauter Integrationen einzelner Eliminationsgleichungen zurückgeführt werden kann; und wenn wir aus der gegenwärtigen Analysis eine Gruppe erschliessen sollten von Genüge leistenden Werthen mit einem Factor, wie $(x - a)^h$, wo der Differentiationsindex r als Bestandtheil von h erscheint, so werden diese Werthe allgemein gelten, gleich-

viel, ob r ganz und positiv ist, oder nicht, d. h. ob es ein Differentiationsindex zu sein vermag, oder nicht.

Wenden wir uns jetzt zu einem Systeme von zwei Differentialgleichungen mit zwei abhängigen Veränderlichen ξ, η. Der Sachverhalt ist hier, so wie in den noch complizirteren Fällen ein etwas anderer. Die Rechnung kann nämlich auch hier durch das Erscheinen eines unendlichen Coefficienten unterbrochen werden. Um jedoch genauer einzusehen, unter welchen Umständen diess geschieht und bei welcher Coefficientengruppe, nehmen wir an, der Rechner sei ohne jeglicher Unterbrechung vorgedrungen bis zu derjenigen Gruppe von Gleichungen, welche der (808) vorangeht, ohne auf unendliche Coefficienten zu stossen. Unter der gemachten Voraussetzung von nur zwei Gleichungen mit zwei Variablen ξ, η reduzirt sich diese Gruppe auf ein Paar, nämlich:

$$\begin{aligned}(\underset{1}{X}_{\lambda-1} + (r-1)\,\underset{1}{X}'_{\lambda})\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)} + \underset{1}{Y}_{\mu}\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} &= -\underset{1}{X}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \mathfrak{L}_{r-1}\\ (\underset{2}{X}_{\lambda-1} + (r-1)\,\underset{2}{X}'_{\lambda})\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)} + \underset{2}{Y}_{\mu}\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} &= -\underset{2}{X}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \mathfrak{M}_{r-1}\end{aligned} \tag{814}$$

Sie dienen zur Bestimmung von $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)}$ und $\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)}$, diess jedoch auf verschiedene Weise. Der erste nämlich dieser beiden Coefficienten wird vollständig in linearer Function von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, ... $\mathfrak{x}^{(\lambda-2)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu-2)}$ angegeben, der zweite jedoch, nämlich $\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)}$ erfährt vorderhand nur eine provisorische Bestimmung in Function der eben aufgezählten Constanten und des $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$. Wie diess zugehe, wird sich in der Folge ergeben. Setzen wir diesen Sachverhalt einstweilen voraus und gehen wir jetzt über zu dem folgenden Paare von Bestimmungsgleichungen (808) nämlich und drücken wir aus beiden $\mathfrak{y}^{(\mu+r)}$ durch die übrigen in ihnen vorkommenden Grössen aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathfrak{y}^{(\mu+r)} &= \frac{1}{\underset{1}{Y}_{\mu}}\left\{-\left[\underset{1}{X}_{\lambda-1} + r\underset{1}{X}'_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} - \underset{1}{X}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \mathfrak{L}_r\right\}\\ \mathfrak{y}^{(\mu+r)} &= \frac{1}{\underset{2}{Y}_{\mu}}\left\{-\left[\underset{2}{X}_{\lambda-1} + r\underset{2}{X}'_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} - \underset{2}{X}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \mathfrak{M}_r\right\}\end{aligned} \tag{815}$$

Diese beiden Ausdrücke, für dasselbe $\mathfrak{y}^{(\mu+r)}$ einander gleichgesetzt, ergeben mit Rücksicht auf die bekannte Gleichung:

$$T = \underset{1}{X}_{\lambda}\underset{2}{Y}_{\mu} - \underset{2}{X}_{\lambda}\underset{1}{Y}_{\mu} = 0 \tag{816}$$

zunächst die folgende andere:

$$\left\{\underset{1}{Y}_{\mu}\left[\underset{2}{X}_{\lambda-1} + r\underset{2}{X}'_{\lambda}\right] - \underset{2}{Y}_{\mu}\left[\underset{1}{X}_{\lambda-1} + r\underset{1}{X}'_{\lambda}\right]\right\}\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \underset{2}{Y}_{\mu}\mathfrak{L}_r - \underset{1}{Y}_{\mu}\mathfrak{M}_r = 0. \tag{817}$$

Hier lässt sich nun zuvörderst nachweisen, dass, wenn das vorhergegangene Paar von Bestimmungsgleichungen wirklich, wie behauptet worden, $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)}$ vollständig bestimmt gegeben hat in Function von:

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{x}',\ \mathfrak{y}',\ \ldots\ldots\ \mathfrak{x}^{(\lambda-2)},\ \mathfrak{y}^{(\mu-2)},\ \mathfrak{y}^{(\mu-1)}$$

dasselbe auch hier in Bezug auf $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ stattfinde, während $\mathfrak{y}^{(\mu-r)}$ dann hier auch nur eine provisorische Bestimmung erfährt in linearer Function der genannten Grössen und des $\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}$. Es ist wichtig,

sich diese Rechnung etwas mehr im Detail vorzulegen, weil es Fälle gibt, in welchen die vorliegende Gleichung den Werth von $\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}$ verweigert. Um nun einzusehen, wie diess geschehe, muss man erwägen, dass in $\mathfrak{L}_r$ und $\mathfrak{M}_r$ kraft der Bedeutungen dieser Grössen (809) zunächst nur das provisorisch bestimmte $\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)}$, mithin auch das in demselben enthaltene $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ vorhanden sei und zwar hat man aus den beiden Gleichungen (814)

$$(818)\quad \begin{aligned} \mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} &= \frac{1}{\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu}}\left\{-\left[\underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}+(r-1)\underset{1}{\mathrm{X}}'_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)}-\underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}+\mathfrak{L}_{r-1}\right\} \\ \mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} &= \frac{1}{\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu}}\left\{-\left[\underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}+(r-1)\underset{2}{\mathrm{X}}'_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)}-\underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}+\mathfrak{M}_{r-1}\right\} \end{aligned}$$

Da vorausgesetztermassen $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)}$, so wie auch $\mathfrak{y}^{(\mu+r-2)}$, sammt allen Vorgängern dieses Coefficienten vollkommen bestimmt sind im obangedeuteten Sinne, so ist dasselbe auch mit $\mathfrak{L}_{r-1}$ und $\mathfrak{M}_{r-1}$ der Fall. Bezeichnen wir also mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$ lineare Functionen von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \ldots\ldots \mathfrak{x}^{(\lambda-2)}, \mathfrak{y}^{(\mu-2)}, \mathfrak{y}^{(\mu-1)}$, so hat man der Form nach:

$$(819)\quad \begin{aligned} \mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} &= \frac{1}{\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu}}\left\{-\underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}+\mathfrak{S}\right\} \\ \mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} &= \frac{1}{\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu}}\left\{-\underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}+\mathfrak{H}\right\} \end{aligned}$$

Führt man diese Werthe in die Ausdrücke ein für $\mathfrak{L}_r$ und $\mathfrak{M}_r$, indem man sich zugleich $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu+r-2)}$, ... durch die ihnen gleichgeltenden Ausdrücke in Function von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \ldots\ldots$ ersetzt denkt, so hat man der Form nach:

$$(820)\quad \begin{aligned} &\left\{\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu}\left[\underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}+r\underset{2}{\mathrm{X}}'_{\lambda}\right]-\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu}\left[\underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}+r\underset{1}{\mathrm{X}}'_{\lambda}\right]+\left[\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu-1}+r\underset{1}{\mathrm{Y}}'_{\mu}\right]\underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda}-\left[\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu-1}+r\underset{2}{\mathrm{Y}}'_{\mu}\right]\underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda}\right\}\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}= \\ &\qquad =\left(\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu-1}+r\underset{1}{\mathrm{Y}}'_{\mu}\right)\mathfrak{H}-\left(\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu-1}+r\underset{2}{\mathrm{Y}}'_{\mu}\right)\mathfrak{S} \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich klar, dass im Allgemeinen $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ bestimmt werde in linearer Function derjenigen Grössen, die in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$ enthalten sind, wenn diess der Fall ist mit $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-2)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu+r-2)}$ und ihren Vorgängern. Da diess nun bei $\mathfrak{x}^{(\lambda-1)}$ wirklich stattfindet, wie man sich aus der Gruppe (806) überzeugen kann, so findet es auch Statt bei $\mathfrak{x}^{(\lambda)}, \mathfrak{x}^{(\lambda+1)}, \mathfrak{x}^{(\lambda+2)}, \ldots\ldots$ mithin allgemein. Diess erleidet jedoch eine Ausnahme, wenn es eine ganze Zahl r gibt, für welche der Coefficient von $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ in die Nulle übergeht, d. h. wenn für ein ganzes positives r

$$(821)\quad r\left\{\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{2}{\mathrm{X}}'_{\lambda}-\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{1}{\mathrm{X}}'_{\lambda}+\underset{1}{\mathrm{Y}}'_{\mu}\underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda}-\underset{2}{\mathrm{Y}}'_{\mu}\underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda}\right\}+\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}-\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}+\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu-1}\underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda}-\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu-1}\underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda}=0$$

wird. Man erkennt hier sehr leicht in dem Coefficienten von r den ersten Differentialquotienten des mit T bezeichneten Polynomes, so dass also diese Gleichung in r kürzer geschrieben werden kann:

$$(822)\quad r\mathrm{T}' = \underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}-\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu}\underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda-1}+\underset{1}{\mathrm{Y}}_{\mu-1}\underset{2}{\mathrm{X}}_{\lambda}-\underset{2}{\mathrm{Y}}_{\mu-1}\underset{1}{\mathrm{X}}_{\lambda}$$

Ist diese Gleichung erfüllt, dann hört die (820) auf, $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ zu geben und verwandelt sich in die folgende Relationsgleichung zwischen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \ldots\ldots \mathfrak{x}^{(\lambda-2)}, \mathfrak{y}^{(\mu-2)}, \mathfrak{y}^{(\mu-1)}$:

$$(\underset{1}{Y}_{\mu-1} + r\underset{1}{Y}'_{\mu})\mathfrak{H} - (\underset{2}{Y}_{\mu-1} + r\underset{2}{Y}'_{\mu})\mathfrak{G} = 0 \qquad ($$

die abermals das Opfer einer Constanten fordert, etwa $\mathfrak{y}^{(\mu-1)}$, die nur als eine lineare Function der übrigen erscheint, während man als Ersatz dafür die durch die (820) nicht bestimmte $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ als neue Integrationsconstante in der Rechnung auftreten sieht. Dass dieselbe im ferneren Verfolge der Rechnung keine Bestimmung erfahre, davon überzeugt man sich am kürzesten, wenn man den vorliegenden Gleichungen zuvörderst dadurch Genüge leistet, dass man:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{x}' = \mathfrak{y}' = \ldots\ldots\ldots = \mathfrak{x}^{(\lambda-2)} = \mathfrak{y}^{(\mu-2)} = 0$$

mithin $\mathfrak{y}^{(\mu-1)} = 0$ annimmt, was alle die particulären Integrale, mit deren Berechnung man bisher beschäftigt war, wegwerfen heisst. Die provisorischen Werthe von $\mathfrak{y}^{(\mu+r)}$, die unter (815) erscheinen, werden unter dieser Voraussetzung:

$$\mathfrak{y}^{(\mu+r)} = -\frac{1}{\underset{1}{Y}_{\mu}}\left\{\left[\underset{1}{X}_{\lambda-1} + r\underset{1}{X}'_{\lambda} - \frac{\underset{1}{Y}_{\mu-1} + r\underset{1}{Y}'_{\mu}}{\underset{2}{Y}_{\mu}}\underset{2}{X}_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \underset{1}{X}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}\right\}$$

$$\mathfrak{y}^{(\mu+r)} = -\frac{1}{\underset{2}{Y}_{\mu}}\left\{\left[\underset{2}{X}_{\lambda-1} + r\underset{2}{X}'_{\lambda} - \frac{\underset{2}{Y}_{\mu-1} + r\underset{2}{Y}'_{\mu}}{\underset{1}{Y}_{\mu}}\underset{1}{X}_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \underset{2}{X}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}\right\} \qquad ($$

Da die Gleichstellung dieser beiden Werthe nur eben eine identische Gleichung liefert, so besagen diese zwei Gleichungen eines und dasselbe und bestimmen $\mathfrak{y}^{(\mu+r)}$ provisorisch in Function von $\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}$ und $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$. Geht man jetzt über zu der folgenden Gruppe von Bestimmungsgleichungen, so erfährt aus ihnen das bisher noch unbestimmt gelassene $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ ebenfalls keine Bestimmung, bleibt mithin als willkürliche Constante in der Rechnung, gehörig offenbar zu einem neu auftauchenden particulären Werthe für ξ, welcher den Factor $(x-a)^{\lambda+r-1}$, zu welcher Potenz $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ als Coefficient in der Mac-Laurin'schen Entwicklung gehörig ist, trägt, und da hiezu die beiden Gleichungen (819) Werthe für $\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)}$ liefern, die dem $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ proportional sind, so gehört zu dem erwähnten particulären Werthe von ξ ein particulärer Werth für η, der der Potenz $(x-a)^{\mu+r-1}$ proportional ist.

Dass aber auch das folgende Paar von Bestimmungsgleichungen einen Werth für $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ nicht geben könne, davon gewinnt man die Ueberzeugung, wenn man sich dasselbe vorlegt, bereits, wenn man will, nach $\mathfrak{y}^{(\mu+r+1)}$ aufgelöst:

$$\mathfrak{y}^{(\mu+r+1)} = \frac{1}{\underset{1}{Y}_{\mu}}\left\{-[\underset{1}{X}_{\lambda-1} + (r+1)\underset{1}{X}'_{\lambda}]\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} - \underset{1}{X}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r+1)} + \mathfrak{L}_{r+1}\right\}$$

$$\mathfrak{y}^{(\mu+r+1)} = \frac{1}{\underset{2}{Y}_{\mu}}\left\{-[\underset{2}{X}_{\lambda-1} + (r+1)\underset{2}{X}'_{\lambda}]\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} - \underset{2}{X}_{\lambda}\mathfrak{x}^{(\lambda+r+1)} + \mathfrak{M}_{r+1}\right\} \qquad ($$

Die Gleichstellung dieser beiden Werthe führt nun zu:

(826) $$\left\{\underset{1}{Y}_{\mu}\left[\underset{2}{X}_{\lambda-1}+(r+1)\underset{2}{X}'_{\lambda}\right]-\underset{2}{Y}_{\mu}\left[\underset{1}{X}_{\lambda-1}+(r+1)\underset{1}{X}'_{\lambda}\right]\right\}\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}+\underset{2}{Y}_{\mu}\mathfrak{L}_{r+1}-\underset{1}{Y}_{\mu}\mathfrak{M}_{r+1}=0$$

oder da hier:

(827) $$\mathfrak{L}_{r+1}=-\left[\underset{1}{Y}_{\mu-1}+(r+1)\underset{1}{Y}'_{\mu}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r)}-\left[\underset{1}{X}_{\lambda-2}+(r+1)\underset{1}{X}'_{\lambda-1}+\frac{(r+1)r}{2}\underset{1}{X}''_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}-$$
$$-\left[\underset{1}{Y}_{\mu-2}+(r+1)\underset{1}{Y}'_{\mu-1}+\frac{(r+1)r}{2}\underset{1}{Y}''_{\mu}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)}$$
$$\mathfrak{M}_{r+1}=-\left[\underset{2}{Y}_{\mu-1}+(r+1)\underset{2}{Y}'_{\mu}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r)}-\left[\underset{2}{X}_{\lambda-2}+(r+1)\underset{2}{X}'_{\lambda-1}+\frac{(r+1)r}{2}\underset{2}{X}''_{\lambda}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}-$$
$$-\left[\underset{2}{Y}_{\mu-2}+(r+1)\underset{2}{Y}'_{\mu-1}+\frac{(r+1)r}{2}\underset{2}{Y}''_{\mu}\right]\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)}$$

oder nach vollbrachter Einführung der für $\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)}$ und $\mathfrak{y}^{(\mu+r)}$ bereits gewonnenen Werthe unter (819) und (824) mit Rücksicht auf $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}=0$

(828) $$\mathfrak{L}_{r+1}=\frac{\underset{2}{X}_{\lambda}}{\underset{2}{Y}_{\mu}}\left[\underset{1}{Y}_{\mu-1}+(r+1)\underset{1}{Y}'_{\mu}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}+$$
$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\underset{2}{Y}_{\mu}}\left[\underset{1}{Y}_{\mu-1}+(r+1)\underset{1}{Y}'_{\mu}\right]\left[\underset{2}{X}_{\lambda-1}+r\underset{2}{X}'_{\lambda}-\frac{\underset{2}{Y}_{\mu-1}+r\underset{2}{Y}'_{\mu}}{\underset{1}{Y}_{\mu}}\underset{1}{Y}_{\lambda}\right]-\\-\left[\underset{1}{X}_{\lambda-2}+(r+1)\underset{1}{X}'_{\lambda-1}+\frac{(r+1)r}{2}\underset{1}{X}''_{\lambda}\right]+\\+\left[\underset{1}{Y}_{\mu-2}+(r+1)\underset{1}{Y}'_{\mu-1}+\frac{(r+1)r}{2}\underset{1}{Y}''_{\mu}\right]\frac{\underset{2}{X}_{\lambda}}{\underset{2}{Y}_{\mu}}\end{array}\right\}\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$$
$$\mathfrak{M}_{r+1}=\frac{\underset{1}{X}_{\lambda}}{\underset{1}{Y}_{\mu}}\left[\underset{2}{Y}_{\mu-1}+(r+1)\underset{2}{Y}'_{\mu}\right]\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}+$$
$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\underset{1}{Y}_{\mu}}\left[\underset{2}{Y}_{\mu-1}+(r+1)\underset{2}{Y}'_{\mu}\right]\left[\underset{1}{X}_{\lambda-1}+r\underset{1}{X}'_{\lambda}-\frac{\underset{1}{Y}_{\mu-1}+r\underset{1}{Y}'_{\mu}}{\underset{2}{Y}_{\mu}}\underset{2}{X}_{\lambda}\right]-\\-\left[\underset{2}{X}_{\lambda-2}+(r+1)\underset{2}{X}'_{\lambda-1}+\frac{(r+1)r}{2}\underset{2}{X}''_{\lambda}\right]+\\+\left[\underset{2}{Y}_{\mu-2}+(r+1)\underset{2}{Y}'_{\mu-1}+\frac{(r+1)r}{2}\underset{2}{Y}''_{\mu}\right]\frac{\underset{1}{X}_{\lambda}}{\underset{1}{Y}_{\mu}}\end{array}\right\}\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$$

und substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichung (826), so ergibt sich aus ihr offenbar eine andere von folgender Gestalt:

(829) $$U\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}+V\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}=0$$

welche nur dann dem $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ einen bestimmten Werth, nämlich Null ertheilen, mithin das neuerschienene particuläre Integral, welches der Potenz $(x-a)^{\lambda+r-1}$ proportional ist, wieder aufheben würde.

wenn U gleich Null ausfiele. Um jetzt einzusehen, ob und in welchem Falle diess möglich sei, bemerke man, dass:

$$U = {}_1Y_\mu\,[{}_2X_{\lambda-1}+(r+1)\,{}_2X'_\lambda] - {}_2Y_\mu\,[{}_1X_{\lambda-1}+(r+1)\,{}_1X'_\lambda] + {}_2X_\mu\,[{}_1Y_{\mu-1}+(r+1)\,{}_1Y'_\mu] - {}_1X_\lambda\,[{}_2Y_{\mu-1}+(r+1)\,{}_2Y'_\mu] \;($$

sei. Zieht man hievon die identisch vorausgesetzte Gleichung (821), die zur Bestimmung von r dient, ab, so ergibt sich:

$$U = T'$$

mithin vermag U nicht zu verschwinden, es sei denn, dass die Gleichung $T = 0$ gleiche Wurzeln besässe.

Diess alles ist den beim aufsteigenden Integriren gemachten analytischen Erfahrungen vollkommen gemäss, denn T ist nach einer früher gemachten Bemerkung der erste Coefficient der aus dem vorgelegten Systeme von Differentialgleichungen gewonnenen Eliminationsgleichung und die successiven Glieder der Mac-Laurin'schen Entwicklung des Integrales einer solchen sind bekanntlich gebrochen durch T', T'', T''', ... Falls aber T gleiche Wurzelfactoren birgt, so deutet diess, wie bekannt, nicht mehr auf ein particuläres Integral mit dem Factor $(x-a)^{\lambda+r-1}$ hin, sondern entweder auf mehrere solche oder auch auf ganz andere Vorkommnisse, die sich auch hier bei der Integration eines Systemes von Differentialgleichungen für den mit diesen analytischen Formen Vertrauten genügend kennzeichnen. Nimmt man aber auf diese Ausnahmsfälle keine Rücksicht, so bleibt jedenfalls $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ als willkürliche Integrationsconstante in der Rechnung und die ferneren Coefficienten $\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}$, $\mathfrak{x}^{(\lambda+r+1)}$ ... $\mathfrak{y}^{(\mu+r)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu+r+1)}$ ..... erscheinen derselben proportional.

Fassen wir den durch diese Ueberlegungen ans Licht gezogenen Sachverhalt wiederholungsweise noch einmal in Kurzem zusammen, so ergibt sich Folgendes: Wenn die zwei Differentialgleichungen zwischen den zwei abhängigen Veränderlichen ξ und η zur Integration vorgelegt sind, nämlich:

$$\begin{aligned} {}_1\mathfrak{X}_\lambda\,\xi^{(\lambda)} + {}_1\mathfrak{Y}_\mu\,\eta^{(\mu)} &= -\,{}_1\mathfrak{X}_{\lambda-1}\,\xi^{(\lambda-1)} - {}_1\mathfrak{Y}_{\mu-1}\,\xi^{(\mu-1)} - \dots\dots\dots \\ {}_2\mathfrak{X}_\lambda\,\xi^{(\lambda)} + {}_2\mathfrak{Y}_\mu\,\eta^{(\mu)} &= -\,{}_2\mathfrak{X}_{\lambda-1}\,\xi^{(\lambda-1)} - {}_2\mathfrak{Y}_{\mu-1}\,\xi^{(\mu-1)} - \dots\dots\dots \end{aligned}$$

so setzt man anstatt ξ und η die ihnen gleichgeltenden aufsteigenden Entwicklungen mittelst der Mac-Laurin'schen Formel, nämlich:

$$\xi = \mathfrak{x} + \mathfrak{x}'(x-a) + \frac{\mathfrak{x}''}{2}(x-a)^2 + \dots\dots\dots$$

$$\eta = \mathfrak{y} + \mathfrak{y}'(x-a) + \frac{\mathfrak{y}''}{2}(x-a)^2 + \dots\dots\dots$$

und erhält dadurch zunächst, indem man die so hervorgehenden Gleichungen für identische erklärt, ein System von unendlich vielen Bestimmungsgleichungen, die alle in dem folgenden Paare enthalten sind, und aus demselben hervorgehen, indem man der Reihe nach den Stellenzeiger r in 0, 1, 2, 3, ... verwandelt:

$$\underset{1}{X}_\lambda \mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \underset{1}{Y}_\mu \mathfrak{y}^{(\mu+r)} = -[\underset{1}{X}_{\lambda-1} + r\underset{1}{X}'_\lambda]\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} - [\underset{1}{Y}_{\mu-1} + r\underset{1}{Y}'_\mu]\,\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} - \ldots\ldots\ldots$$
$$\underset{2}{X}_\lambda \mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \underset{2}{Y}_\mu \mathfrak{y}^{(\mu+r)} = -[\underset{2}{X}_{\lambda-1} + r\underset{2}{X}'_\lambda]\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} - [\underset{2}{Y}_{\mu-1} + r\underset{2}{Y}'_\mu]\,\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} - \ldots\ldots\ldots$$

Diese werden zwar in der Regel dazu dienen können, um $\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}$ zu bestimmen und zwar in Bruchform mit dem gemeinschaftlichen Nenner

$$T = \underset{1}{X}_\lambda \underset{2}{Y}_\mu - \underset{1}{Y}_\mu \underset{2}{X}_\lambda$$

allein es frommt selten, für solche Werthe von a die Integrationsarbeit zu unternehmen, für welche T von Null verschieden ausfällt. Man wählt daher in der Regel $T = 0$ und vermeidet die unendlichen Werthe von $\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}$, $\mathfrak{y}^{(\mu+r)}$ dadurch, dass man das vorliegende Paar von Bestimmungsgleichungen entweder in der Gestalt:

$$[\underset{1}{X}_{\lambda-1} + r\underset{1}{X}'_\lambda]\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \underset{1}{Y}_\mu \mathfrak{y}^{(\mu+r)} = -\underset{1}{X}_\lambda \mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \mathfrak{L}_{r,\mathfrak{x}}$$
$$[\underset{2}{X}_{\lambda-1} + r\underset{2}{X}'_\lambda]\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \underset{2}{Y}_\mu \mathfrak{y}^{(\mu+r)} = -\underset{2}{X}_\lambda \mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \mathfrak{M}_{r,\mathfrak{x}}$$

in welcher dasselbe zur Bestimmung von $\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)}$ und $\mathfrak{y}^{(\mu+r)}$ dienlich erscheint, oder in der folgenden anderen:

$$\underset{1}{X}_\lambda \mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + [\underset{1}{Y}_{\mu-1} + r\underset{1}{Y}'_\mu]\,\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} = -\underset{1}{Y}_\mu \mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \mathfrak{L}_{r,\mathfrak{y}}$$
$$\underset{2}{X}_\lambda \mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + [\underset{2}{Y}_{\mu-1} + r\underset{2}{Y}'_\mu]\,\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} = -\underset{2}{Y}_\mu \mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \mathfrak{M}_{r,\mathfrak{y}}$$

in welcher es zur Berechnung von $\mathfrak{x}^{(\lambda+r)}$ und $\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)}$ verwendet werden kann, hinstellt. Der gemeinschaftliche Nenner der so bestimmten Unbekannten, auf den man beziehlich bei der ersten und zweiten dieser beiden Gestaltungen stösst, ist entweder

$$\mathfrak{T}_{r,\mathfrak{x}} = \underset{2}{Y}_\mu[\underset{1}{X}_{\lambda-1} + r\underset{1}{X}'_\lambda] - \underset{1}{Y}_\mu[\underset{2}{X}_{\lambda-1} + r\underset{2}{X}'_\lambda]$$

oder

$$\mathfrak{T}_{r,\mathfrak{y}} = \underset{1}{X}_\lambda[\underset{2}{Y}_{\mu-1} + r\underset{2}{Y}'_\mu] - \underset{2}{X}_\lambda[\underset{1}{Y}_{\mu-1} + r\underset{1}{Y}'_\mu]$$

Weder das Verschwinden von $\mathfrak{T}_{r,\mathfrak{x}}$, noch das Nullwerden von $\mathfrak{T}_{r,\mathfrak{y}}$, wenn es gelegentlich für irgend ein ganzes und positives r vorkommen sollte, macht, dass die Rechnung durch das Auftauchen unendlicher Coefficienten unterbrochen wird; solche erscheinen vielmehr nur dann, wenn

$$\mathfrak{T}_{r,\mathfrak{x}} = \mathfrak{T}_{r,\mathfrak{y}} = 0$$

wird, und die Folge hievon ist eine Relation zwischen den Integrationsconstanten, kraft deren eine Gruppe von particulären Werthen für ξ und η aufgeopfert, dagegen zum Ersatz eine andere gewonnen wird, proportional bezüglich dem $(x-a)^{(\lambda+r-1)}$ und $(x-a)^{(\mu+r-1)}$. Die Existenz dieser letzteren ist übrigens keineswegs an die Bedingung geknüpft, dass r eine ganze und positive Zahl sei, sondern gilt für beliebige r geradeso wie bei einzelnen Differentialgleichungen, eben weil die hier vorgenommene Rechnung der Integration einer einzelnen Eliminationsgleichung gleichgeltend ist.

Es ist wohl keinem Zweifel unterworfen, dass dieses Verfahren sammt allen dabei vorkommenden analytischen Erscheinungen ein allgemeines, auf beliebig viele Differentialgleichungen anwendbares sei. Es wird nämlich z. B. bei drei Gleichungen mit drei abhängigen Veränderlichen ξ, η, ζ das Integriren in aufsteigender Reihenform nur für solche a in der Regel erspriesslich sein, für welche der gemeinschaftliche Nenner T verschwindet. Die allgemeine Gruppe von Bestimmungsgleichungen wird man dann in irgend einer der folgenden drei Formen hinstellen:

$$(\underset{1}{X}_{\lambda-1} + r\underset{1}{X}'_\lambda)\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \underset{1}{Y}_\mu\,\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \underset{1}{Z}_\nu\,\mathfrak{z}^{(\nu+r)} = -\underset{1}{X}_\lambda\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \mathfrak{L}_{r,\mathfrak{x}}$$
$$(\underset{2}{X}_{\lambda-1} + r\underset{2}{X}'_\lambda)\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \underset{2}{Y}_\mu\,\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \underset{2}{Z}_\nu\,\mathfrak{z}^{(\nu+r)} = -\underset{2}{X}_\lambda\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \mathfrak{M}_{r,\mathfrak{x}}$$
$$(\underset{3}{X}_{\lambda-1} + r\underset{3}{X}'_\lambda)\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r-1)} + \underset{3}{Y}_\mu\,\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \underset{3}{Z}_\nu\,\mathfrak{z}^{(\nu+r)} = -\underset{3}{X}_\lambda\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \mathfrak{N}_{r,\mathfrak{x}}$$

$$\underset{1}{X}_\lambda\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + (\underset{1}{Y}_{\mu-1} + r\underset{1}{Y}'_\mu)\,\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} + \underset{1}{Z}_\nu\,\mathfrak{z}^{(\nu+r)} = -\underset{1}{Y}_\mu\,\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \mathfrak{L}_{r,\mathfrak{y}}$$
$$\underset{2}{X}_\lambda\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + (\underset{2}{Y}_{\mu-1} + r\underset{2}{Y}'_\mu)\,\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} + \underset{2}{Z}_\nu\,\mathfrak{z}^{(\nu+r)} = -\underset{2}{Y}_\mu\,\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \mathfrak{M}_{r,\mathfrak{y}}$$
$$\underset{3}{X}_\lambda\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + (\underset{3}{Y}_{\mu-1} + r\underset{3}{Y}'_\mu)\,\mathfrak{y}^{(\mu+r-1)} + \underset{3}{Z}_\nu\,\mathfrak{z}^{(\nu+r)} = -\underset{3}{Y}_\mu\,\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + \mathfrak{N}_{r,\mathfrak{y}}$$

$$\underset{1}{X}_\lambda\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \underset{1}{Y}_\mu\,\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + (\underset{1}{Z}_{\nu-1} + r\underset{1}{Z}'_\nu)\,\mathfrak{z}^{(\nu+r-1)} = -\underset{1}{Z}_\nu\,\mathfrak{z}^{(\nu+r)} + \mathfrak{L}_{r,\mathfrak{z}}$$
$$\underset{2}{X}_\lambda\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \underset{2}{Y}_\mu\,\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + (\underset{2}{Z}_{\nu-1} + r\underset{2}{Z}'_\nu)\,\mathfrak{z}^{(\nu+r-1)} = -\underset{2}{Z}_\nu\,\mathfrak{z}^{(\nu+r)} + \mathfrak{M}_{r,\mathfrak{z}}$$
$$\underset{3}{X}_\lambda\,\mathfrak{x}^{(\lambda+r)} + \underset{3}{Y}_\mu\,\mathfrak{y}^{(\mu+r)} + (\underset{3}{Z}_{\nu-1} + r\underset{3}{Z}'_\nu)\,\mathfrak{z}^{(\nu+r-1)} = -\underset{3}{Z}_\nu\,\mathfrak{z}^{(\nu+r)} + \mathfrak{N}_{r,\mathfrak{z}}$$

Der gemeinschaftliche Nenner der Werthe der hieraus gezogenen Unbekannten ist nun einer der folgenden drei:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{r,\mathfrak{x}} = {} & \underset{1}{X}_{\lambda-1}\underset{2}{Y}_\mu\underset{3}{Z}_\nu - \underset{1}{X}_{\lambda-1}\underset{3}{Y}_\mu\underset{2}{Z}_\nu - \underset{2}{X}_{\lambda-1}\underset{1}{Y}_\mu\underset{3}{Z}_\nu + \\ & + \underset{2}{X}_{\lambda-1}\underset{3}{Y}_\mu\underset{1}{Z}_\nu + \underset{3}{X}_{\lambda-1}\underset{1}{Y}_\mu\underset{2}{Z}_\nu - \underset{3}{X}_{\lambda-1}\underset{2}{Y}_\mu\underset{1}{Z}_\nu + \\ & + r\left\{\begin{array}{l} \underset{1}{X}'_\lambda\,\underset{2}{Y}_\mu\underset{3}{Z}_\nu - \underset{1}{X}'_\lambda\,\underset{3}{Y}_\mu\underset{2}{Z}_\nu - \underset{2}{X}'_\lambda\,\underset{1}{Y}_\mu\underset{3}{Z}_\nu + \\ + \underset{2}{X}'_\lambda\,\underset{3}{Y}_\mu\underset{1}{Z}_\nu + \underset{3}{X}'_\lambda\,\underset{1}{Y}_\mu\underset{2}{Z}_\nu - \underset{3}{X}'_\lambda\,\underset{2}{Y}_\mu\underset{1}{Z}_\nu \end{array}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{r,\mathfrak{y}} = {} & \underset{1}{X}_\lambda\underset{2}{Y}_{\mu-1}\underset{3}{Z}_\nu - \underset{1}{X}_\lambda\underset{3}{Y}_{\mu-1}\underset{2}{Z}_\nu - \underset{2}{X}_\lambda\underset{1}{Y}_{\mu-1}\underset{3}{Z}_\nu + \\ & + \underset{2}{X}_\lambda\underset{3}{Y}_{\mu-1}\underset{1}{Z}_\nu + \underset{3}{X}_\lambda\underset{1}{Y}_{\mu-1}\underset{2}{Z}_\nu - \underset{3}{X}_\lambda\underset{2}{Y}_{\mu-1}\underset{1}{Z}_\nu + \\ & + r\left\{\begin{array}{l} \underset{1}{X}_\lambda\underset{2}{Y}'_\mu\,\underset{3}{Z}_\nu - \underset{1}{X}_\lambda\underset{3}{Y}'_\mu\,\underset{2}{Z}_\nu - \underset{2}{X}_\lambda\underset{1}{Y}'_\mu\,\underset{3}{Z}_\nu + \\ + \underset{2}{X}_\lambda\underset{3}{Y}'_\mu\,\underset{1}{Z}_\nu + \underset{3}{X}_\lambda\underset{1}{Y}'_\mu\,\underset{2}{Z}_\nu - \underset{3}{X}_\lambda\underset{2}{Y}'_\mu\,\underset{1}{Z}_\nu \end{array}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{r,\mathfrak{z}} = {} & \underset{1}{X}_\lambda\underset{2}{Y}_\mu\underset{3}{Z}_{\nu-1} - \underset{1}{X}_\lambda\underset{3}{Y}_\mu\underset{2}{Z}_{\nu-1} - \underset{2}{X}_\lambda\underset{1}{Y}_\mu\underset{3}{Z}_{\nu-1} \\ & + \underset{2}{X}_\lambda\underset{3}{Y}_\mu\underset{1}{Z}_{\nu-1} + \underset{3}{X}_\lambda\underset{1}{Y}_\mu\underset{2}{Z}_{\nu-1} - \underset{3}{X}_\lambda\underset{2}{Y}_\mu\underset{1}{Z}_{\nu-1} \\ & + r\left\{\begin{array}{l} \underset{1}{X}_\lambda\underset{2}{Y}_\mu\underset{3}{Z}'_\nu - \underset{1}{X}_\lambda\underset{3}{Y}_\mu\underset{2}{Z}'_\nu - \underset{2}{X}_\lambda\underset{1}{Y}_\mu\underset{3}{Z}'_\nu \\ \underset{2}{X}_\lambda\underset{3}{Y}_\mu\underset{1}{Z}'_\nu + \underset{3}{X}_\lambda\underset{1}{Y}_\mu\underset{2}{Z}'_\nu - \underset{3}{X}_\lambda\underset{2}{Y}_\mu\underset{1}{Z}'_\nu \end{array}\right\}\end{aligned}$$

Weder das Verschwinden von $\mathfrak{T}_{r,\mathfrak{x}}$, noch von $\mathfrak{T}_{r,\mathfrak{y}}$, noch von $\mathfrak{T}_{r,\mathfrak{z}}$, wenn es für irgend ein ganzes

positives r stattfinden sollte, hat unendliche Coefficientenwerthe zur Folge, wohl aber kommen solche jedesmal vor, so oft

$$\mathfrak{X}_{r,\mathfrak{x}} + \mathfrak{X}_{r,\mathfrak{y}} + \mathfrak{X}_{r,\mathfrak{z}} = 0$$

wird, eine Gleichung, die nach r geordnet, die folgende Gestalt annimmt:

$$rT' + S = 0$$

und zeigt, dass die gewonnenen Coefficientenwerthe gebrochen durch T'^1, T'^2, T'^3, ... ausfallen. Mit dem Identischwerden dieser Gleichung ist zugleich der Verlust von einer Gruppe particulärer Integrale und der Ersatz durch eine andere verknüpft, bei welcher die ξ, η, ζ beziehlich den Potenzen $(x-a)^{\lambda+r-1}$, $(x-a)^{\mu+r-1}$, $(x-a)^{\nu+r-1}$ proportional ausfallen.

Dieser kurze Abriss der aufsteigenden Integrationsmethode bei Systemen von Differentialgleichungen mag an diesem Orte genügen, die Erörterung der Ausnahmsfälle aber dem routinirten Leser überlassen bleiben, da sie in vorkommenden Fällen keine Schwierigkeit bietet.

§. 18.

Asymptotische Integration von Systemen mehrerer Differentialgleichungen.

Das Integriren in der absteigenden Reihenform setzt, wie wir wissen, die Genüge leistenden Werthe einer Differentialgleichung voraus in der Form eines Produktes aus einer Exponentiellen in eine Function erster Classe und dient im Wesentlichen nur dazu, diese Function erster Classe zu bestimmen in beliebiger Gliederzahl und in absteigender Reihenform. Es ist mithin nur anwendbar, wenn die Differentialgleichung wirklich Integrale in dieser Gestalt zulässt, was entweder unmittelbar der Fall ist, oder mindestens durch Transformation, beziehlich Abscheidung eines exponentiellen Factors jedesmal herbeigeführt werden kann. Fortschreitungen im Niveau oder Abfälle um wenigstens eine Einheit in der Gradzahl in den letzten Coefficientenpaaren und zwar bei nur einer Differentialgleichung, wenn nur eine vorliegt, und bei allen Bestandgleichungen, wenn ein ganzes System von solchen gegeben ist, begründen die Anwendbarkeit der asymptotischen Integrationsmethode. Gesetzt nun, man hätte sich von derselben überzeugt bei einem Systeme von beliebig vielen linearen Differentialgleichungen zwischen eben so vielen unabhängigen Veränderlichen ξ, η, ζ und einer einzigen abhängigen x, etwa den folgenden:

$$P = 0\,,\quad Q = 0\,,\quad R = 0\,\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{831}$$

so wird man zur Ermittlung all' derjenigen Genüge leistenden Werthe von ξ, η, ζ, ... die die angeführte Form tragen, auf folgende Weise schreiten können, die den beim asymptotischen Integriren gewonnenen analytischen Erfahrungen entnommen ist und desshalb keiner umständlicheren Begründung mehr bedarf.

Man ordne vor allem anderen die Gleichungspolynome von P, Q, R, ... nicht nach den Differentialquotienten von ξ, η, ζ, sondern nach Potenzen der unabhängigen Veränderlichen x

zwar absteigend. P gestalte sich hiedurch zu einem Polynom nach x vom Grade λ, ebenso
m Grade μ, und R vom Grade ν u. s. w. Nun denke man sich in den so geordneten Differen-
eichungen die folgenden Substitutionen durchgeführt:

$$\xi = \frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux}L\right]\Big\}_\alpha, \ \eta = \frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux}M\right]\Big\}_\alpha, \ \zeta = \frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux}N\right]\Big\}_\alpha, \ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (832)$$

u eine neue Veränderliche, $L, M, N, \ldots\ldots$ aber noch unbekannte Functionen derselben an-
n. Die Voraussetzung, die in diese Annahmen stillschweigend niedergelegt scheint, nämlich, dass
'actoren erster Classe von $\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots$ in absteigende Reihenform gebracht, sämmtlich mit
n Gliede mit x^h anheben, ist zwar nicht immer statthaft, thut aber der Allgemeinheit hier keinen
ag, weil sich im entgegengesetzten Falle bei einer oder einigen dieser absteigenden Reihen nur
Anfangsglieder Null aus der Rechnung ergeben werden. Einerlei Substitutionszahl α und einerlei
rentiationsindex h, muss aber in sämmtlichen Variabeln $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ vorkommen, weil sonst an
dentischwerden der Differentialgleichungen nicht zu denken ist.

Nun handelt es sich zunächst um die Bildung der Substitutionsresultate. Diese kann allge-
vorgenommen werden auf folgende Weise: Man ersetze in allen absteigend nach x geordneten
hungspolynomen die $\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots$ sammt ihren Differentialquotienten durch Produkte und zwar:

$$\xi\ ,\ \xi'\ ,\ \xi''\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \xi^{(r)}$$

hlich durch:

$$L\ ,\ uL\ ,\ u^2L\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ u^rL\ \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

so verwandle man:

$$\eta\ ,\ \eta'\ ,\ \eta''\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \eta^{(r)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

hlich in:

$$M\ ,\ uM\ ,\ u^2M\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ u^rM;$$

dieselbe Weise werde anstatt

$$\zeta\ ,\ \zeta'\ ,\ \zeta''\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \zeta^{(r)}\ \ldots\ldots\ldots$$

$$N\ ,\ uN\ ,\ u^2N\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ u^rN\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

hrieben u. s. w., so werden sich dann die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x in allen
hungspolynomen ordnen lassen nach den vorderhand noch unbekannten Functionen $L, M, N, \ldots$
man wird aus den $P, Q, R, \ldots\ldots$ der Form nach Folgendes gewinnen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} = x^\lambda &\left[\underset{1}{U}_\lambda L + \underset{1}{V}_\lambda M + \underset{1}{W}_\lambda N + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] \\ + x^{\lambda-1}&\left[\underset{1}{U}_{\lambda-1}L + \underset{1}{V}_{\lambda-1}M + \underset{1}{W}_{\lambda-1}N + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] \\ + x^{\lambda-2}&\left[\underset{1}{U}_{\lambda-2}L + \underset{1}{V}_{\lambda-2}M + \underset{1}{W}_{\lambda-2}N + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] \qquad (833) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + &\underset{1}{U}_0L + \underset{1}{V}_0M + \underset{1}{W}_0N + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\mathfrak{Q} = x^{\mu}\left[\underset{2}{U}_{\mu} L + \underset{2}{V}_{\mu} M + \underset{2}{W}_{\mu} N + \ldots\ldots\ldots\right]$$
$$+ x^{\mu-1}\left[\underset{2}{U}_{\mu-1} L + \underset{2}{V}_{\mu-1} M + \underset{2}{W}_{\mu-1} N + \ldots\ldots\ldots\right]$$
$$+ x^{\mu-2}\left[\underset{2}{U}_{\mu-2} L + \underset{2}{V}_{\mu-2} M + \underset{2}{W}_{\mu-2} N + \ldots\ldots\ldots\right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left[\underset{2}{U}_0 L + \underset{2}{V}_0 M + \underset{2}{W}_0 N + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$\mathfrak{R} = x^{\nu}\left[\underset{3}{U}_{\nu} L + \underset{3}{V}_{\nu} M + \underset{3}{W}_{\nu} N + \ldots\ldots\ldots\right]$$
$$+ x^{\nu-1}\left[\underset{3}{U}_{\nu-1} L + \underset{3}{V}_{\nu-1} M + \underset{3}{W}_{\nu-1} N + \ldots\ldots\ldots\right]$$
$$+ x^{\nu-2}\left[\underset{3}{U}_{\nu-2} L + \underset{3}{V}_{\nu-2} M + \underset{3}{W}_{\nu-2} N + \ldots\ldots\ldots\right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left[\underset{3}{U}_0 L + \underset{3}{V}_0 M + \underset{3}{W}_0 N + \ldots\ldots\ldots\right]$$

Hier bedeuten sämmtliche mit U, V, W bezeichneten Multiplicatoren bestimmte algebraische Polynome in u und $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, ... dasjenige, was aus P, Q, R, ... wird durch das angedeutete Substitutionsverfahren. Es lässt sich nun sehr leicht einsehen, dass die in Form von h^{ten} Differentialquotienten angenommenen ξ, η, ζ, ... in die Differentialgleichungen eingeführt, dieselben verwandeln werden in:

$$\frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux}\mathfrak{P}\right]\Big|_{\alpha} = 0\,,\quad \frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux}\mathfrak{Q}\right]\Big|_{\alpha} = 0\,,\quad \frac{d^h}{du^h}\left[e^{ux}\mathfrak{R}\right]\Big|_{\alpha} = 0\,,\ \ldots\ldots\ldots \tag{834}$$

oder in entwickelter Form:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}\left[\mathrm{P}x^h + \binom{h}{1}\mathrm{P}'x^{h-1} + \binom{h}{2}\mathrm{P}''x^{h-2} + \ldots\ldots\ldots\right] &= 0\\ e^{\alpha x}\left[\mathrm{Q}x^h + \binom{h}{1}\mathrm{Q}'x^{h-1} + \binom{h}{2}\mathrm{Q}''x^{h-2} + \ldots\ldots\ldots\right] &= 0\\ e^{\alpha x}\left[\mathrm{R}x^h + \binom{h}{1}\mathrm{R}'x^{h-1} + \binom{h}{2}\mathrm{R}''x^{h-2} + \ldots\ldots\ldots\right] &= 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{835}$$

Hier bedeuten P, P', P'', ... Q, Q', Q'', ... R, R', R'', ... dasjenige, was aus $\mathfrak{P}$, $\frac{d\mathfrak{P}}{du}$, $\frac{d^2\mathfrak{P}}{du^2}$, ... $\mathfrak{Q}$, $\frac{d\mathfrak{Q}}{du}$, $\frac{d^2\mathfrak{Q}}{du^2}$, ... $\mathfrak{R}$, $\frac{d\mathfrak{R}}{du}$, $\frac{d^2\mathfrak{R}}{du^2}$, ... wird, wenn man u durch α ersetzt, d. h. es ist allgemein:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^{(r)} = x^{\lambda}&\left[(\underset{1}{\mathrm{U}}_{\lambda}\mathrm{L})^{(r)} + (\underset{1}{\mathrm{V}}_{\lambda}\mathrm{M})^{(r)} + (\underset{1}{\mathrm{W}}_{\lambda}\mathrm{N})^{(r)} + \ldots\ldots\ldots\right]\\ + x^{\lambda-1}&\left[(\underset{1}{\mathrm{U}}_{\lambda-1}\mathrm{L})^{(r)} + (\underset{1}{\mathrm{V}}_{\lambda-1}\mathrm{M})^{(r)} + (\underset{1}{\mathrm{W}}_{\lambda-1}\mathrm{N})^{(r)} + \ldots\ldots\ldots\right]\\ + x^{\lambda-2}&\left[(\underset{1}{\mathrm{U}}_{\lambda-2}\mathrm{L})^{(r)} + (\underset{1}{\mathrm{V}}_{\lambda-2}\mathrm{M})^{(r)} + (\underset{1}{\mathrm{W}}_{\lambda-2}\mathrm{N})^{(r)} + \ldots\ldots\ldots\right]\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ + &\left[(\underset{1}{\mathrm{U}}_0\mathrm{L})^{(r)} + (\underset{1}{\mathrm{V}}_0\mathrm{M})^{(r)} + (\underset{1}{\mathrm{W}}_0\mathrm{N})^{(r)} + \ldots\ldots\ldots\right] \end{aligned} \tag{836}$$

$$
\begin{aligned}
Q^{(r)} = x^{\mu}\ &[(\underset{2}{U}_{\mu}\ L)^{(r)} + (\underset{2}{V}_{\mu}\ M)^{(r)} + (\underset{2}{W}_{\mu}\ N)^{(r)} + \ldots\ldots\ldots] \\
+\ x^{\mu-1}&[(\underset{2}{U}_{\mu-1}L)^{(r)} + (\underset{2}{V}_{\mu-1}M)^{(r)} + (\underset{2}{W}_{\mu-1}N)^{(r)} + \ldots\ldots\ldots] \\
+\ x^{\mu-2}&[(\underset{2}{U}_{\mu-2}L)^{(r)} + (\underset{2}{V}_{\mu-2}M)^{(r)} + (\underset{2}{W}_{\mu-2}N)^{(r)} + \ldots\ldots\ldots] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\ &[(\underset{2}{U}_{0}L)^{(r)} + (\underset{2}{V}_{0}M)^{(r)} + (\underset{2}{W}_{0}N)^{(r)} + \ldots\ldots\ldots] \\
R^{(r)} = x^{\nu}\ &[(\underset{3}{U}_{\nu}\ L)^{(r)} + (\underset{3}{V}_{\nu}\ M)^{(r)} + (\underset{3}{W}_{\nu}\ N)^{(r)} + \ldots\ldots\ldots] \\
+\ x^{\nu-1}&[(\underset{3}{U}_{\nu-1}L)^{(r)} + (\underset{3}{V}_{\nu-1}M)^{(r)} + (\underset{3}{W}_{\nu-1}N)^{(r)} + \ldots\ldots\ldots] \\
+\ x^{\nu-2}&[(\underset{3}{U}_{\nu-2}L)^{(r)} + (\underset{3}{V}_{\nu-2}M)^{(r)} + (\underset{3}{W}_{\nu-2}N)^{(r)} + \ldots\ldots\ldots] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\ &[\underset{3}{U}_{0}L)^{(r)} + (\underset{3}{V}_{0}M)^{(r)} + (\underset{3}{W}_{0}N)^{(r)} + \ldots\ldots\ldots] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Nach der beim asymptotischen Integriren angenommenen Bezeichnungsweise verstehen wir auch hier unter $U^{(r)}$, $V^{(r)}$, $W^{(r)}$, $L^{(r)}$, $M^{(r)}$, $N^{(r)}$ dasjenige, was aus $\mathcal{U}^{(r)}$, $\mathcal{V}^{(r)}$, $\mathcal{W}^{(r)}$, $\mathcal{L}^{(r)}$, $\mathcal{M}^{(r)}$, $\mathcal{N}^{(r)}$ wird, wenn man nach $r$maliger Differenzirung u durch α ersetzt. Eben so ist jedes andere der hier vorkommenden Zeichen, wie $(UL)^{(r)}$ zu deuten; es ist nämlich:

$$
(UL)^{(r)} = U^{(r)}L + \binom{r}{1} U^{(r-1)}L' + \binom{r}{2} U^{(r-2)}L'' + \ldots\ldots\ldots + UL^{(r)}
$$

Führen wir nun die aus den vorliegenden Formeln für $P^{(r)}$, $Q^{(r)}$, $R^{(r)}$, ... unter Voraussetzung: $r = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ gewonnenen Werthe in die Gleichungen (835), ein, ordnen abermals absteigend nach Potenzen von x und lassen allenthalben den gemeinschaftlichen Factor aller Gleichungspolynome, d. h. $e^{\alpha x}$ als des Verschwindens unfähig weg, so gelangen wir zu einem Systeme von Gleichungen, denen durch schickliche Wahl der bisher noch unbestimmten constanten Werthe für α und h, imgleichen durch passende Functionen von u anstatt $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, ... gesetzt, oder was dasselbe ist, durch entsprechende Constanten anstatt L, M, N, ... L', M', N', ... L'', M'', N'', ... Genüge geleistet werden soll. Wir können nämlich die Functionen $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, ... als bestimmt ansehen, wenn uns die aufsteigende Reihenentwicklung derselben vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel bekannt ist. Jede dieser so gewonnenen Gleichungen lässt sich dann in mehrere zur Bestimmung der genannten Unbekannten dienende zerfällen, indem man die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x je für sich der Nulle gleich setzt. Auf diese Weise entstehen aus der

$$
\left.\frac{d^h}{du^h}\,[e^{ux}y]\right\}_{\alpha} = 0
$$

Die folgenden Bestimmungsgleichungen in unbegrenzter Anzahl:

$$\underset{1}{U}_{\lambda} L + \underset{1}{V}_{\lambda} M + \underset{1}{W}_{\lambda} N + \dots\dots\dots = 0$$

$$\underset{1}{U}_{\lambda-1} L + \underset{1}{V}_{\lambda-1} M + \underset{1}{W}_{\lambda-1} N + \dots\dots\dots + \binom{h}{1}\left[(\underset{1}{U}_{\lambda} L)' + (\underset{1}{V}_{\lambda} M)' + (\underset{1}{W}_{\lambda} N)' + \dots\dots\right] = 0$$

$$\underset{1}{U}_{\lambda-2} L + \underset{1}{V}_{\lambda-2} M + \underset{1}{W}_{\lambda-2} N + \dots\dots\dots + \binom{h}{1}\left[(\underset{1}{U}_{\lambda-1} L)' + (\underset{1}{V}_{\lambda-1} M)' + (\underset{1}{W}_{\lambda-1} N)' + \dots\dots\right] +$$
$$+ \binom{h}{2}\left[(\underset{1}{U}_{\lambda} L)'' + (\underset{1}{V}_{\lambda} M)'' + (\underset{1}{W}_{\lambda} N)'' + \dots\dots\dots\right] = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\underset{1}{U}_{0} L + \underset{1}{V}_{0} M + \underset{1}{W}_{0} N + \dots\dots\dots +$$
$$+ \binom{h}{1}\left[(\underset{1}{U}_{1} L)' + (\underset{1}{V}_{1} M)' + (\underset{1}{W}_{1} N)' + \dots\dots\dots\right] +$$
$$+ \binom{h}{2}\left[(\underset{1}{U}_{2} L)'' + (\underset{1}{V}_{2} M)'' + (\underset{1}{W}_{2} N)'' + \dots\dots\dots\right] +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \binom{h}{\lambda}\left[(\underset{1}{U}_{\lambda} L)^{(\lambda)} + (\underset{1}{V}_{\lambda} M)^{(\lambda)} + (\underset{1}{W}_{\lambda} N)^{(\lambda)} + \dots\dots\dots\right] = 0$$

$$(837)\qquad \binom{h}{1}\left[(\underset{1}{U}_{0} L)' + (\underset{1}{V}_{0} M)' + (\underset{1}{W}_{0} N)' + \dots\dots\dots\right] +$$
$$+ \binom{h}{2}\left[(\underset{1}{U}_{1} L)'' + (\underset{1}{V}_{1} M)'' + (\underset{1}{W}_{1} N)'' + \dots\dots\dots\right] +$$
$$+ \binom{h}{3}\left[(\underset{1}{U}_{2} L)''' + (\underset{1}{V}_{2} M)''' + (\underset{1}{W}_{2} N)''' + \dots\dots\dots\right] +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \binom{h}{\lambda+1}\left[(\underset{1}{U}_{\lambda} L)^{(\lambda+1)} + (\underset{1}{V}_{\lambda} M)^{(\lambda+1)} + (\underset{1}{W}_{\lambda} N)^{(\lambda+1)} + \dots\dots\dots\right] = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\binom{h}{\rho}\left[(\underset{1}{U}_{0} L)^{(\rho)} + (\underset{1}{V}_{0} M)^{(\rho)} + (\underset{1}{W}_{0} N)^{(\rho)} + \dots\dots\dots\right] +$$
$$+ \binom{h}{\rho+1}\left[(\underset{1}{U}_{1} L)^{(\rho+1)} + (\underset{1}{V}_{1} M)^{(\rho+1)} + (\underset{1}{W}_{1} N)^{(\rho+1)} + \dots\dots\dots\right] +$$
$$+ \binom{h}{\rho+2}\left[(\underset{1}{U}_{2} L)^{(\rho+2)} + (\underset{1}{V}_{2} M)^{(\rho+2)} + (\underset{1}{W}_{2} N)^{(\rho+2)} + \dots\dots\dots\right] +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \binom{h}{\rho+\lambda}\left[(\underset{1}{U}_{\lambda} L)^{(\rho+\lambda)} + (\underset{1}{V}_{\lambda} M)^{(\rho+\lambda)} + (\underset{1}{W}_{\lambda} N)^{(\rho+\lambda)} + \dots\dots\dots\right] = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Sie enthalten die vollständigen und unabgekürzten Coefficienten von $x^{h+\lambda}$, $x^{h+\lambda-1}$, ... x^{h}, x^{h-1}, .. $x^{h-\rho}$, ... der Nulle gleich gesetzt. Genau auf dieselbe Weise nun entsteht jetzt aus der zweiten der Gleichungen (835); das folgende System von Bestimmungsgleichungen, die in der Regel in unbegrenzter Anzahl vorhanden sind:

$$\underset{2}{U}_{\mu}L + \underset{2}{V}_{\mu}M + \underset{2}{W}_{\mu}N + \ldots\ldots\ldots] = 0$$

$$\underset{2}{U}_{\mu-1}L + \underset{2}{V}_{\mu-1}M + \underset{2}{W}_{\mu-1}N + \ldots\ldots\ldots] +$$
$$+ \binom{h}{1}[(\underset{2}{U}_{\mu}L)' + (\underset{2}{V}_{\mu}M)' + (\underset{2}{W}_{\mu}N)' + \ldots\ldots\ldots] = 0$$

$$\underset{2}{U}_{\mu-2}L + \underset{2}{V}_{\mu-2}M + \underset{2}{W}_{\mu-2}N + \ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \binom{h}{1}[(\underset{2}{U}_{\mu-1}L)' + (\underset{2}{V}_{\mu-1}M)' + (\underset{2}{W}_{\mu-1}N)' + \ldots\ldots\ldots] +$$
$$+ \binom{h}{2}[(\underset{2}{U}_{\mu}L)'' + (\underset{2}{V}_{\mu}M)'' + (\underset{2}{W}_{\mu}N)'' + \ldots\ldots\ldots] = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\underset{2}{U}_{0}L + \underset{2}{V}_{0}M + \underset{2}{W}_{0}N + \ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \binom{h}{1}[(\underset{2}{U}_{1}L)' + (\underset{2}{V}_{1}M)' + (\underset{2}{W}_{1}N)' + \ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \binom{h}{2}[(\underset{2}{U}_{2}L)'' + (\underset{2}{V}_{2}M)'' + (\underset{2}{W}_{2}N)'' + \ldots\ldots\ldots +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \binom{h}{\mu}[(\underset{2}{U}_{\mu}L)^{(\mu)} + (\underset{2}{V}_{\mu}M)^{(\mu)} + (\underset{2}{W}_{\mu}N)^{(\mu)} + \ldots\ldots\ldots] = 0$$

$$\binom{h}{1}[(\underset{2}{U}_{0}L)' + (\underset{2}{V}_{0}M)' + (\underset{2}{W}_{0}N)' + \ldots\ldots\ldots] + \tag{838}$$
$$+ \binom{h}{2}[(\underset{2}{U}_{1}L)'' + (\underset{2}{V}_{1}M)'' + (\underset{2}{W}_{1}N)'' + \ldots\ldots\ldots] +$$
$$+ \binom{h}{3}[(\underset{2}{U}_{2}L)''' + (\underset{2}{V}_{2}M)''' + (\underset{2}{W}_{2}N)''' + \ldots\ldots\ldots] +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \binom{h}{\mu+1}[(\underset{2}{U}_{\mu}L)^{(\mu+1)} + (\underset{2}{V}_{\mu}M)^{(\mu+1)} + (\underset{2}{W}_{\mu}N)^{(\mu+1)} + \ldots\ldots\ldots] = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{h}{\rho}[(\underset{2}{U}_{0}L)^{(\rho)} + (\underset{2}{V}_{0}M)^{(\rho)} + (\underset{2}{W}_{0}N)^{(\rho)} + \ldots\ldots\ldots] +$$
$$+ \binom{h}{\rho+1}[(\underset{2}{U}_{1}L)^{(\rho+1)} + (\underset{2}{V}_{1}M)^{(\rho+1)} + (\underset{2}{W}_{1}N)^{(\rho+1)} + \ldots\ldots\ldots] +$$
$$+ \binom{h}{\rho+2}[(\underset{2}{U}_{2}L)^{(\rho+2)} + (\underset{2}{V}_{2}M)^{(\rho+2)} + (\underset{2}{W}_{2}N)^{(\rho+2)} + \ldots\ldots\ldots] +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \binom{h}{\rho+\mu}[(\underset{2}{U}_{\mu}L)^{(\rho+\mu)} + (\underset{2}{V}_{\mu}M)^{(\rho+\mu)} + (\underset{2}{W}_{\mu}N)^{(\rho+\mu)} + \ldots\ldots\ldots] = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

‹en so erhalten wir aus der dritten der Gleichungen (835), so wie aus den folgenden, wenn deren ›hrere sein sollten, eine ähnliche Gruppe von Bestimmungsgleichungen, nämlich:

$$\underset{3}{U}_\nu L + \underset{3}{V}_\nu M + \underset{3}{W}_\nu N + \dots\dots\dots = 0$$

$$\underset{3}{U}_{\nu-1} L + \underset{3}{V}_{\nu-1} M + \underset{3}{W}_{\nu-1} N + \dots\dots\dots +$$
$$+ \binom{h}{1} [(\underset{3}{U}_\nu L)' + (\underset{3}{V}_\nu M)' + (\underset{3}{W}_\nu N)' + \dots\dots\dots = 0$$

$$\underset{3}{U}_{\nu-2} L + \underset{3}{V}_{\nu-2} M + \underset{3}{W}_{\nu-2} N + \dots\dots\dots +$$
$$+ \binom{h}{1} [(\underset{3}{U}_{\nu-1} L)' + (\underset{3}{V}_{\nu-1} M)' + (\underset{3}{W}_{\nu-1} N)' + \dots\dots\dots] +$$
$$+ \binom{h}{2} [(\underset{3}{U}_\nu L)'' + (\underset{3}{V}_\nu M)'' + (\underset{3}{W}_\nu N)'' + \dots\dots\dots] = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

(839)

$$\underset{3}{U}_0 L + \underset{3}{V}_0 M + \underset{3}{W}_0 N + \dots\dots\dots +$$
$$+ \binom{h}{1} [(\underset{3}{U}_1 L)' + (\underset{3}{V}_1 M)' + (\underset{3}{W}_1 N)' + \dots\dots\dots] +$$
$$+ \binom{h}{2} [(\underset{3}{U}_2 L)'' + (\underset{3}{V}_2 M)'' + (\underset{3}{W}_2 N)'' + \dots\dots\dots] +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \binom{h}{\nu} [(\underset{3}{U}_\nu L)^{(\nu)} + (\underset{3}{V}_\nu M)^{(\nu)} + (\underset{3}{W}_\nu N)^{(\nu)} + \dots\dots\dots] = 0$$

$$\binom{h}{1} [(\underset{3}{U}_0 L)' + (\underset{3}{V}_0 M)' + (\underset{3}{W}_0 N)' + \dots\dots\dots] +$$
$$+ \binom{h}{2} [(\underset{3}{U}_1 L)'' + (\underset{3}{V}_1 M)'' + (\underset{3}{W}_1 N)'' + \dots\dots\dots] +$$
$$+ \binom{h}{3} [(\underset{3}{U}_2 L)''' + (\underset{3}{V}_2 M)''' + (\underset{3}{W}_2 N)''' + \dots\dots\dots] +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \binom{h}{\nu+1} [(\underset{3}{U}_\nu L)^{(\nu+1)} + (\underset{3}{V}_\nu M)^{(\nu+1)} + (\underset{3}{W}_\nu N)^{(\nu+1)} + \dots\dots\dots] = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

und so fortgehend, wird man so viele Systeme von Bestimmungsgleichungen aufstellen, als der gegebenen Differentialgleichungen waren, aus welchen, wie gesagt, die Werthe von h, L, L', L'', ... M, M', M'', ... N, N', N'', ... abzuleiten sind. Der hiezu einzuschlagende Weg ist folgender: Man stellt zuvörderst die ersten dieser Bestimmungsgleichungen in eine Gruppe zusammen. Sie sind

(840)

$$\underset{1}{U}_\lambda L + \underset{1}{V}_\lambda M + \underset{1}{W}_\lambda N + \dots\dots\dots = 0$$
$$\underset{2}{U}_\mu L + \underset{2}{V}_\mu M + \underset{2}{W}_\mu N + \dots\dots\dots = 0$$
$$\underset{3}{U}_\nu L + \underset{3}{V}_\nu M + \underset{3}{W}_\nu N + \dots\dots\dots = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Sie gestatten ihrer Form nach in der Regel keine andere Auflösung, als:

$$L = 0, \; M = 0, \; N = 0, \; \dots\dots\dots$$

es sei denn, dass die Coefficienten dieser Unbekannten in einer bestimmten Relation zu einander stehen, in Folge deren nicht alle diese Gleichungen von einander verschieden sind, sondern eine oder mehrere als unmittelbare Folgen der übrigen erscheinen, gebildet z. B. durch Multiplication derselben mit bestimmten Constanten und Addition. In diesem Falle aber hören sie auf, bestimmte Werthe für $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \ldots$ zu geben und liefern nur die Quotienten: $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{L}}, \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{L}}, \ldots\ldots$ Es ist leicht einzusehen, dass man die jederzeit Genüge leistenden: $\mathbf{L} = \mathbf{M} = \mathbf{N} = \ldots\ldots = 0$ zum Integrationszwecke nicht brauchen kann, weil sich daraus $\xi = \eta = \zeta = \ldots\ldots = 0$ ergibt, was allerdings ein System Genüge leistender Werthe, aber kein Integral darstellt. Man ist mithin genöthigt, solche Relationen zwischen den Coefficienten wirklich bestehen zu lassen, kraft deren: $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \ldots\ldots$ unbestimmte Werthe erhalten und die Gleichungen von einander verschieden zu sein aufhören. Man bewirkt diess durch schickliche Wahl der bisher noch unbestimmt gelassenen Substitutionszahl α, die in den Coefficienten enthalten ist, und die wenigstens dann immer mit einem solchen Werthe versehen werden kann, wenn auch nur eine einzige Gruppe Genüge leistender Werthe für $\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots$ in der angedeuteten Form (832) besteht, und nur wenn gar keine particulären Integrale dieser Art vorhanden sind, bleiben die vorgelegten Bedingungsgleichungen alle von einander verschieden und deuten durch die Angabe $\mathbf{L} = \mathbf{M} = \ldots = 0$, aus der $\xi = \eta = \zeta = \ldots\ldots = 0$ unmittelbar folgt, auf das Nichtvorhandensein so gestalteter Auflösungen hin. Wir müssen diesen Fall hier ausschliessen, weil wir voraussetzen, dass der nach den Vorschriften der Formenlehre rechnende Analyst aus der Gestalt der Differentialgleichungen sich von dem Dasein solcher asymptotischer Auflösungen überzeugt habe, die unmittelbar und ohne vorgängige Sonderung eines höheren exponentiellen Factors der Berechnung unterworfen werden können. Um nun alle Werthe von α von dieser Beschaffenheit zu erhalten, kann man sich zuvörderst anstatt der ersten Gruppe von Bestimmungsgleichungen (840) die folgende andere vorgelegt denken, in der noch die Variable u erscheint, die später durch die Substitutionszahl α zu ersetzen ist.

$$\begin{aligned} \underset{1}{U}_\lambda L + \underset{1}{V}_\lambda M + \underset{1}{W}_\lambda N + \ldots\ldots\ldots\ldots &= G \\ \underset{2}{U}_\mu L + \underset{2}{V}_\mu M + \underset{2}{W}_\mu N + \ldots\ldots\ldots\ldots &= H \\ \underset{3}{U}_\nu L + \underset{3}{V}_\nu M + \underset{3}{W}_\nu N + \ldots\ldots\ldots\ldots &= J \end{aligned} \tag{841}$$

allwo man sich unter G, H, J einstweilen unbestimmte Functionen von u denken mag. Diese Gleichungen geben im Allgemeinen Werthe für L, M, N, ... in Bruchform mit einem gemeinschaftlichen Nenner T, der aus den sämmtlichen Coefficienten auf die bekannte Weise gebildet wird. Dieser Nenner ist, wenn nur eine einzige Gleichung mit nur einer einzigen abhängigen Veränderlichen ξ vorliegt:

$$T = \underset{1}{U}_\lambda$$

Sind zwei Differentialgleichungen gegeben mit den abhängigen Veränderlichen ξ, η, so wird dieser Nenner:

$$T = \underset{1}{U}_\lambda \underset{2}{V}_\mu - \underset{2}{U}_\mu \underset{1}{V}_\lambda$$

Hat man drei Differentialgleichungen mit den Variablen ξ, η, ζ, so geht der in Rede stehende Nenner über in:

$$T = \underset{1}{U}_\lambda \underset{2}{V}_\mu \underset{3}{W}_\nu - \underset{1}{U}_\lambda \underset{3}{V}_\nu \underset{2}{W}_\mu - \underset{2}{U}_\mu \underset{1}{V}_\lambda \underset{3}{W}_\nu + \tag{842}$$
$$+ \underset{2}{U}_\mu \underset{3}{V}_\nu \underset{1}{W}_\lambda + \underset{3}{U}_\nu \underset{1}{V}_\lambda \underset{2}{W}_\mu - \underset{3}{U}_\nu \underset{2}{V}_\mu \underset{1}{W}_\lambda$$

u. s. w. Wird nun dieser Nenner der Nulle gleich, was nur für bestimmte Werthe von u stattfinden wird, deren aber so viele vorhanden sein werden, als die Gradzahl der Gleichung $T = 0$ Einheiten in sich enthält, so werden die Werthe von L, M, N, ... dadurch entweder unendlich oder unbestimmt; im ersten Falle sind dann die Gleichungen (841) widersprechend, im zweiten aber nicht sämmtlich von einander verschieden. Wir führen ihn dadurch herbei, dass wir unter G, H, J, ... solche Functionen von u verstehen, die für dieselben Werthe dieser Variablen verschwinden, für welche auch $T = 0$ wird. Alle Wurzeln dieser letzteren nun, welche der Reihe nach, $u = \alpha_1$, $u = \alpha_2$, $u = \alpha_3$, ... $u = \alpha_n$ sein mögen, können die Rolle der Substitutionszahl α übernehmen und es werden aus diesen n an der Zahl vorausgesetzten Werthen von α eben so viele Systeme asymptotischer Integrale für ξ, η, ζ, ... hervorgehen, versehen beziehlich mit den exponentiellen Factoren $e^{\alpha_1 x}$, $e^{\alpha_2 x}$, $e^{\alpha_3 x}$, ... $e^{\alpha_n x}$. Zu jedem dieser verschiedenen α gehört nun ein System bestimmter Werthe zwar nicht für L, M, N, ... wohl aber für die Quotienten: $\frac{M}{L}$, $\frac{N}{L}$, ..., das man sich, wenn man den gemeinschaftlichen Nenner T einmal hat, auf leichte Weise verschaffen kann. Angenommen, das den Gleichungen (841) entsprechende System Genüge leistender Werthe für die L, M, N, ... sei das Folgende:

$$L = \frac{D}{T},\ M = \frac{E}{T},\ N = \frac{F}{T},\ .....$$

so entstehen alle Zähler in denselben: D, E, F, ... aus dem gemeinschaftlichen Nenner T durch einen einfachen Substitutionsact. Um nämlich D aus T abzuleiten, substituirt man anstatt der in T vorhandenen ersten Verticalreihe der Coefficienten, die zur Unbekannten L gehörig ist, die zweiten Theile dieser Gleichungen. d. h. man ersetzt $\underset{1}{U}_\lambda$, $\underset{2}{U}_\mu$, $\underset{3}{U}_\nu$, ... beziehlich durch G, H, J, ... ; ebenso bildet man E aus T, indem man in T die alldort vorhandenen $\underset{1}{V}_\lambda$, $\underset{2}{V}_\mu$, $\underset{3}{V}_\nu$, ... beziehlich in dieselben G, H, J, ... umschreibt u. s. w. Nachdem nun G, H, J, ... willkürliche Functionen von U sind, von denen man nur eine solche Beschaffenheit verlangt, dass dadurch die gebrochenen Werthe von L, M, N unbestimmt und in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, so wird man zu diesem Behufe erstens anstatt u irgend einen der oberwähnten, mit α bezeichneten Werthe und zu gleicher Zeit:

$$G = H = J \ .... = \ldots - \alpha$$

wählen können. Nun erwäge man ferner noch, dass die Zähler: D, E, F, ... der Bildungsweise des Nenners T zufolge und auch der ihrigen wegen lineare Functionen von G, H, J, ... seien, ohne einem letzten von diesen freien Gliede; so ergibt sich daraus unmittelbar, dass diese Zähler in der folgenden Form vorkommen:

$$D = (u - \alpha) A \,, \quad E = (u - \alpha) B \,, \quad F = (u - \alpha) C, \ldots\ldots\ldots$$

mithin wird auch:

$$L = \frac{A(u-\alpha)}{T} \,, \quad M = \frac{B(u-\alpha)}{T} \,, \quad N = \frac{C(u-\alpha)}{T} \,, \ldots\ldots\ldots \tag{843}$$

Hier bedeuten offenbar: $A, B, C, \ldots\ldots$ dasjenige, was aus T entsteht, wenn man einmal sämmtliche Coefficienten der ersten Verticalreihe, sodann die der zweiten, dann jene der dritten u. s. w. durch Eins ersetzt. Die gebrochenen Werthe von $L, M, N, \ldots\ldots$ gehen nun für $u = \alpha$ über in $\frac{0}{0}$ und können auf die bekannte Weise des Differenzirens von Zähler und Nenner ihrem Werthe nach bestimmt werden. Nennt man zu diesem Zwecke: $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots\ldots \mathrm{T}'$ dasjenige, was aus $A, B, C, \ldots\ldots T'$ hervorgeht, wenn man $u = \alpha$ setzt, so hat man:

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{T}'} \,, \quad \mathrm{M} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{T}'} \,, \quad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{T}'} \,, \ldots\ldots\ldots \tag{844}$$

Es sind diess aber nicht die einzigen Werthe, die die Bestimmungsgleichungen (841) erfüllen; man wird sie vielmehr noch multipliziren können mit einer willkürlichen Constante, weil, wie gesagt, nur die Quotienten $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}}$ zur Bestimmung kommen können. Dieser Constante kann man die Form $\mathrm{T'K}$ geben und wird hiemit erhalten:

$$\mathrm{L} = \mathrm{AK} \,, \quad \mathrm{M} = \mathrm{BK} \,, \quad \mathrm{N} = \mathrm{CK} \,, \ldots\ldots\ldots \tag{845}$$

allwo K die Rolle einer willkürlichen und zu dem jedesmaligen α gehörigen Constanten spielt, mithin diesen verschiedenen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$ entsprechend eben so viele willkürliche und möglicherweise von einander verschiedene Werthe $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots\ldots \mathrm{K}_n$ annehmen kann, die sich als Integrationsconstanten multiplicativ an die verschiedenen Systeme von Werthen für $\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots$ anschliessen werden.

Wiederholungsweise ist also der erste Schritt des eingeleiteten Rechenverfahrens der folgende: Man bilde vor allem anderen den gemeinschaftlichen Nenner T, ohne sich vorderhand in demselben Abkürzungen zu erlauben, also unter Evidenzhaltung sämmtlicher Factoren, aus welchen die einzelnen Glieder dieses T zusammengefügt sind. Man streiche ferner darin alle zur ersten Verticalreihe gehörigen Coefficienten, was sie durch Eins ersetzen heisst, und hat A; man streiche dann ebenso alle zur zweiten Verticalreihe, mithin zur Unbekannten M gehörigen Factoren und hat B u. s. w.; dann suche man die Wurzeln der $T = 0$, nämlich: $u = \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ und substituire sie der Reihe nach anstatt u in die $A, B, C, \ldots\ldots$ wodurch $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1, \ldots\ldots$ für $u = \alpha_1$, $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_2, \ldots\ldots$ für $u = \alpha_2$, endlich $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \ldots\ldots$ für $u = \alpha_n$ gewonnen werden mögen; so ergeben sich daraus allsogleich eben so viele Gruppen von Werthen für $\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \ldots\ldots$ nämlich:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_1 &= \mathrm{A}_1\mathrm{K}_1 \,, \quad \mathrm{M}_1 = \mathrm{B}_1\mathrm{K}_1 \,, \quad \mathrm{N}_1 = \mathrm{C}_1\mathrm{K}_1 \,, \ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{L}_2 &= \mathrm{A}_2\mathrm{K}_2 \,, \quad \mathrm{M}_2 = \mathrm{B}_2\mathrm{K}_2 \,, \quad \mathrm{N}_2 = \mathrm{C}_2\mathrm{K}_2 \,, \ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{L}_n &= \mathrm{A}_n\mathrm{K}_n \,, \quad \mathrm{M}_n = \mathrm{B}_n\mathrm{K}_n \,, \quad \mathrm{N}_n = \mathrm{C}_n\mathrm{K}_n \,, \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{846}$$

Nachdem auf diese Weise die ersten aus den vorliegenden Systemen von Bestimmungsgleichungen gehörig verwendet worden sind, stellen wir sämmtliche zweite von ihnen zu einer Gruppe zusammen, nämlich:

$$
(847)\quad
\begin{aligned}
&\underset{1}{U}_{\lambda-1}L + \underset{1}{V}_{\lambda-1}M + \underset{1}{W}_{\lambda-1}N + \ldots\ldots + \binom{h}{1}\left[(\underset{1}{U}_{\lambda}L)' + (\underset{1}{V}_{\lambda}M)' + (\underset{1}{W}_{\lambda}N)' + \ldots\ldots\right] = 0\\
&\underset{2}{U}_{\mu-1}L + \underset{2}{V}_{\mu-1}M + \underset{2}{W}_{\mu-1}N + \ldots\ldots + \binom{h}{1}\left[(\underset{2}{U}_{\mu}L)' + (\underset{2}{V}_{\mu}M)' + (\underset{2}{W}_{\mu}N)' + \ldots\ldots\right] = 0\\
&\underset{3}{U}_{\nu-1}L + \underset{3}{V}_{\nu-1}M + \underset{3}{W}_{\nu-1}N + \ldots\ldots + \binom{h}{1}\left[(\underset{3}{U}_{\nu}L)' + (\underset{3}{V}_{\nu}M)' + (\underset{3}{W}_{\nu}N)' + \ldots\ldots\right] = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Sie sehen in entwickelterer Gestalt und wie zur Bestimmung von L', M', N', ... tauglich hingezeichnet, da man L, M, N, ... bereits hat, aus, wie folgt:

$$
(848)\quad
\begin{aligned}
&h[\underset{1}{U}_{\lambda}L' + \underset{1}{V}_{\lambda}M' + \underset{1}{W}_{\lambda}N' + \ldots\ldots] = -(\underset{1}{U}_{\lambda-1} + h\underset{1}{U}'_{\lambda})L - (\underset{1}{V}_{\lambda-1} + h\underset{1}{V}'_{\lambda})M - (\underset{1}{W}_{\lambda-1} + h\underset{1}{W}'_{\lambda})N - \ldots\\
&h[\underset{2}{U}_{\mu}L' + \underset{2}{V}_{\mu}M' + \underset{2}{W}_{\mu}N' + \ldots\ldots] = -(\underset{2}{U}_{\mu-1} + h\underset{2}{U}'_{\mu})L - (\underset{2}{V}_{\mu-1} + h\underset{2}{V}'_{\mu})M - (\underset{2}{W}_{\mu-1} + h\underset{2}{W}'_{\mu})N - \ldots\\
&h[\underset{3}{U}_{\nu}L' + \underset{3}{V}_{\nu}M' + \underset{3}{W}_{\nu}N' + \ldots\ldots] = -(\underset{3}{U}_{\nu-1} + h\underset{3}{U}'_{\nu})L - (\underset{3}{V}_{\nu-1} + h\underset{3}{V}'_{\nu})M - (\underset{3}{W}_{\nu-1} + h\underset{3}{W}'_{\nu})N - \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

oder nach durchgeführter Substitution der für $L, M, N,$ gewonnenen Werthe, die $AK, BK, CK, \ldots$ sind:

$$
(849)\quad
\begin{aligned}
&h[\underset{1}{U}_{\lambda}L' + \underset{1}{V}_{\lambda}M' + \underset{1}{W}_{\lambda}N' + \ldots] = -[(\underset{1}{U}_{\lambda-1} + h\underset{1}{U}'_{\lambda})A + (\underset{1}{V}_{\lambda-1} + h\underset{1}{V}'_{\lambda})B + (\underset{1}{W}_{\lambda-1} + h\underset{1}{W}'_{\lambda})C + \ldots]K\\
&h[\underset{2}{U}_{\mu}L' + \underset{2}{V}_{\mu}M' + \underset{2}{W}_{\mu}N' + \ldots] = -[(\underset{2}{U}_{\mu-1} + h\underset{2}{U}'_{\mu})A + (\underset{2}{V}_{\mu-1} + h\underset{2}{V}'_{\mu})B + (\underset{2}{W}_{\mu-1} + h\underset{2}{W}'_{\mu})C + \ldots]K\\
&h[\underset{3}{U}_{\nu}L' + \underset{3}{V}_{\nu}M' + \underset{3}{W}_{\nu}N' + \ldots] = -[(\underset{3}{U}_{\nu-1} + h\underset{3}{U}'_{\nu})A + (\underset{3}{V}_{\nu-1} + h\underset{3}{V}'_{\nu})B + (\underset{3}{W}_{\nu-1} + h\underset{3}{W}'_{\nu})C + \ldots]K\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Ihrer Benützung zum Berechnen von L', M', N', ... in linearer Function von K widersetzt sich der Umstand, dass der gemeinschaftliche Nenner aller gebrochenen Werthe für diese L', M', N', ... abermals der Nulle gleich wird, weil er derselbe T ist, von welchem früher die Rede war, wovon man sich durch die in den Gleichungen (841) und (849) übereinstimmenden Coefficienten der Unbekannten überzeugt. Unendliche Werthe von L', M', N', ... sind hievon die natürliche Folge. Ihnen auszuweichen, frommt es nicht, $K = 0$ zu setzen, weil diess auch L, M, N, ... vernichten, mithin ξ, η, ζ, ... ganz wegwerfen hiesse. Wir können daher diesen unendlichen Coefficientenwerthen nur durch schickliche Wahl des h entgehen, welches so bestimmt werden muss, dass die vorliegenden Gleichungen aufhören, alle von einander verschieden zu sein, und das eine von ihnen erscheint als die unmittelbare Folge aller übrigen, gebildet aus ihnen durch Multiplication mit gewissen Constanten und Addition. Bei den ersten Theilen ist diess bereits in Folge des verschwindenden gemeinschaftlichen Nenners der Fall, bei den zweiten kann es jedesmal durch ein schicklich gewähltes h herbeigeführt werden. Das Ergebniss wird immer ein Verschwinden sämmtlicher Zähler der Werthe von L', M', N', ... sein und zwar werden aus leicht einzusehenden Gründen alle Zähler gleich Null,

wenn auch nur einer von ihnen verschwindet. Man bildet sich also einen dieser Zähler, indem man in T irgend eine Verticalreihe der Coefficienten ersetzt durch die zweiten Theile der vorliegenden Bestimmungsgleichungen (849) und setzt ihn gleich Null. Hiedurch gewinnt man eine Gleichung, die entweder zur Bestimmung von h dienlich, oder auch für jedes h identisch ist. Im ersten Falle ergibt sich aus derselben ein einziger Werth von h, weil die Gleichung in h nur dem ersten Grade angehört, jedoch für jedes α ein eigener, so dass man den $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$ entsprechend eben so viele $h_1, h_2, h_3, \ldots\ldots h_n$ erhalten kann. Im zweiten Falle wählt man eine andere Verticalreihe der Coefficienten, um anstatt ihrer die zweiten Theile der Gleichungen zu substituiren. Sollte sich aber gar keine solche Verticalreihe von Coefficienten finden, die auf diese Weise mit den zweiten Theilen der Gleichungen vertauscht, eine Bestimmungsgleichung für h liefern könnte, so gibt überhaupt die aufgezeichnete Gruppe von Bestimmungsgleichungen (849) das h noch nicht, sondern es ist einer der folgenden Gruppen zu entnehmen. Angenommen, die Bestimmungsgleichung in h gehe aus $T=0$ bereits durch Vertauschung der ersten Verticalreihe der Coefficienten hervor, so ist dieselbe bei einer einzigen Differentialgleichung mit der Veränderlichen ξ:

$$\underset{1}{U}_{\lambda-1} + h\underset{1}{U}'_{\lambda} = 0 \tag{850}$$

Diese ist uns bereits bekannt. Hat man zwei Differentialgleichungen mit den Variabeln ξ, η, so ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung in h:

$$\begin{aligned}&(\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{U}_{\mu-1} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{U}_{\lambda-1})A + (\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu-1} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda-1})B + \\ h[&(\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{U}'_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{U}'_{\lambda})A + (\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{V}'_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{V}'_{\lambda})B] = 0.\end{aligned} \tag{851}$$

Bei drei Differentialgleichungen mit drei abhängigen Veränderlichen ξ, η, ζ ergibt sich ebenso:

$$\begin{aligned}&[\underset{1}{U}_{\lambda-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{U}_{\lambda-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{U}_{\mu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{U}_{\mu-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{U}_{\nu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{U}_{\nu-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}]A + \\ &+[\underset{1}{V}_{\lambda-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{V}_{\lambda-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{V}_{\mu-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{V}_{\nu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{V}_{\nu-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}]B + \\ &+[\underset{1}{W}_{\lambda-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{W}_{\lambda-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{W}_{\mu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{W}_{\mu-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{W}_{\nu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{W}_{\nu-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}]C + \\ &+h\left\{\begin{aligned}&[\underset{1}{U}'_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{U}'_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{U}'_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{U}'_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{U}'_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{U}'_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}]A + \\ &+[\underset{1}{V}'_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{V}'_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{V}'_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{V}'_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{V}'_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{V}'_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}]B + \\ &+\underset{1}{W}'_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{W}'_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{W}'_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{W}'_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{W}'_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{W}'_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}]C +\end{aligned}\right\} = 0\end{aligned} \tag{852}$$

und zwar erhält man immer complizirter werdende Gleichungen in h, aus je mehr Differentialgleichungen das vorgelegte System besteht. Sie sind aber alle doch nur in der Regel dem ersten Grade angehörig und können mit Ausschluss der ersten von ihnen, der (850) nämlich, die ohnehin der Form nach möglichst einfach ist, noch in anderer minder complizirter Weise aufgezeichnet werden. Diess möge zuvörderst bei der (851) geschehen, die einem Systeme von zwei Differentialgleichungen mit zwei abhängigen Veränderlichen entnommen ist. Wir denken uns in ihr den Factor A' gesondert und unter der Voraussetzung, dass A nicht Null ist, dadurch wegdividirt, so erscheint zunächst:

$$\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{U}_{\mu-1} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{U}_{\lambda-1} + (\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu-1} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda-1})\frac{B}{A} +$$
$$+ h\left[\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{U'}_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{U'}_{\lambda} + (\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{V'}_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{V'}_{\lambda})\frac{B}{A}\right] = 0 \tag{853}$$

Dem früher Beigebrachten zufolge gewinnt man aber A und B aus dem gemeinschaftlichen Nenner:

$$T = \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda} \tag{854}$$

indem man einmal sämmtliche U und dann zum zweiten Male sämmtliche V ersetzt durch die Einheit, d. h. es ist:

$$A = \underset{2}{V}_{\mu} - \underset{1}{V}_{\lambda}\,, \quad B = \underset{1}{U}_{\lambda} - \underset{2}{U}_{\mu} \tag{855}$$

hiemit aber ergibt sich:

$$\underset{1}{V}_{\lambda}\frac{B}{A} = \underset{1}{V}_{\lambda}\frac{\underset{1}{U}_{\lambda} - \underset{2}{U}_{\mu}}{\underset{2}{V}_{\mu} - \underset{1}{V}_{\lambda}} = -\underset{1}{U}_{\lambda}$$
$$\underset{2}{V}_{\mu}\frac{B}{A} = \underset{2}{V}_{\mu}\frac{\underset{1}{U}_{\lambda} - \underset{2}{U}_{\mu}}{\underset{2}{V}_{\mu} - \underset{1}{V}_{\lambda}} = -\underset{2}{U}_{\mu} \tag{856}$$

Gleichungen, von deren Richtigkeit man sich überzeugt, indem man die Brüche wegschafft, wodurch sie in, kraft der $T = 0$, identische übergehen. Durch Substitution dieser Werthe in die vorliegende Bestimmungsgleichung in h ergibt sich sodann

$$\underset{2}{U}_{\mu-1}\underset{1}{V}_{\lambda} - \underset{1}{U}_{\lambda-1}\underset{2}{V}_{\mu} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu-1} + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda-1} +$$
$$+ h\left[\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{U'}_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{U'}_{\lambda} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{V'}_{\mu} + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{V'}_{\lambda}\right] = 0 \tag{857}$$

Man erkennt hier auf den ersten Blick in dem Coefficienten von h den ersten Differentialquotienten des binomischen Ausdruckes T, so dass sich, wenn man noch überdiess:

$$\underset{2}{U}_{\mu-1}\underset{1}{V}_{\lambda} - \underset{1}{U}_{\lambda-1}\underset{2}{V}_{\mu} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu-1} + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda-1} = -S \tag{858}$$

statuirt, ein Polynom, dessen Ableitung aus eben demselben T augenfällig ist, die folgende Gleichung ergibt, die ihrer Gestalt nach sehr einfach ist:

$$S + hT' = 0 \tag{859}$$

und daraus

$$h = -\frac{S}{T'} \tag{860}$$

Diese Ergebnisse setzen uns in den Stand, den anjetzt in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden Werth von hL' abzuleiten in einer der Berechnung zugängigen Gestalt; nur ist es hier nothwendig, bei der Bildung des Zählers von hL' und hM', der dann der Nulle gleich gesetzt wird, auch diejenigen Glieder bei-

zubehalten, die in derselben zufolge der $T = 0$ verschwinden. Wir nehmen also an, die Substitution $u = \alpha$ sei noch nicht gemacht, so dass wir es noch mit lauter Functionen von u zu thun haben, und dass anstatt A, B, U, V, L, M annoch die A, B, U, V, L, M in der Rechnung vorkommen; so hat man:

$$A = \underset{2}{V}_\mu - \underset{1}{V}_\lambda\,, \quad B = \underset{1}{U}_\lambda - \underset{2}{U}_\mu \tag{861}$$

ähnlich den unter (855) aufgestellten Relationen. Hiemit aber ergibt sich verschieden von den folgenden (856)

$$\begin{aligned} \underset{1}{V}_\lambda \frac{B}{A} &= \underset{1}{V}_\lambda \frac{\underset{1}{U}_\lambda - \underset{2}{U}_\mu}{\underset{2}{V}_\mu - \underset{1}{V}_\lambda} = -\underset{1}{U}_\lambda + \frac{T}{A} \\ \underset{2}{V}_\mu \frac{B}{A} &= \underset{2}{V}_\mu \frac{\underset{1}{U}_\lambda - \underset{2}{U}_\mu}{\underset{2}{V}_\mu - \underset{1}{V}_\lambda} = -\underset{2}{U}_\mu + \frac{T}{A} \end{aligned} \tag{862}$$

Bildet man nun die Zähler von hL' und hM' mit den eben gewonnenen Werthen, dividirt sie sodann durch T und denkt sich die Substitution $u = \alpha$ gemacht, was durch Verwandlung der Buchstaben U, V, L, M in U, V, L, M geschieht, so erhält man:

$$\begin{aligned} h\mathrm{L}' &= \frac{\mathrm{A}[\mathrm{S} + h\mathrm{T}']\mathrm{K}}{\mathrm{T}} - (\underset{2}{\mathrm{V}}_{\mu-1} - \underset{1}{\mathrm{V}}_{\lambda-1})\mathrm{K} - h\mathrm{A}'\mathrm{K} \\ h\mathrm{M}' &= \frac{\mathrm{B}[\mathrm{S} + h\mathrm{T}']\mathrm{K}}{\mathrm{T}} - (\underset{1}{\mathrm{U}}_{\lambda-1} - \underset{2}{\mathrm{U}}_{\mu-1})\mathrm{K} - h\mathrm{B}'\mathrm{K} \end{aligned} \tag{863}$$

Nur die ersten Bestandtheile dieser Werthe erscheinen noch in der Form $\frac{0}{0}$, wenn durch schickliche Wahl des h die Gleichung (859) erfüllt ist. Der Werth des Bruches, welcher dann eben die Form $\frac{0}{0}$ gewinnt, d. h.

$$\frac{\mathrm{S} + h\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}\,\mathrm{K}$$

lässt sich mit Bestimmtheit hier nicht angeben, wird aber jedenfalls eine neue Constante K' vorstellen, die erst durch einen späteren Rechnungsschritt zur Bestimmung gelangen kann. Man hat also vorläufig der Form nach:

$$\begin{aligned} h\mathrm{L}' &= \mathrm{AK}' - (\underset{2}{\mathrm{V}}_{\mu-1} - \underset{1}{\mathrm{V}}_{\lambda-1})\mathrm{K} - h\mathrm{A}'\mathrm{K} \\ h\mathrm{M}' &= \mathrm{BK}' - (\underset{1}{\mathrm{U}}_{\lambda-1} - \underset{2}{\mathrm{U}}_{\mu-1})\mathrm{K} - h\mathrm{B}'\mathrm{K} \end{aligned} \tag{864}$$

Hieraus ergibt sich auch noch die Richtigkeit der a priori klaren Thatsache a posteriori, dass nämlich im Allgemeinen das Nullsetzen der Zähler zu einerlei Bestimmungsgleichung in h leitet, mindestens so lange A und B von Null verschieden ausfallen.

Nicht viel verwickelter gestaltet sich die Rechnung bei drei gegebenen Differentialgleichungen mit drei abhängigen Veränderlichen. Geht man nämlich aus von der (852) und sondert zuvörderst den Factor A aus; so erhält man zunächst unter der Voraussetzung, dass A nicht Null ist:

$$
\begin{aligned}
&\underset{1}{U}_{\lambda-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{U}_{\lambda-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{U}_{\mu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{U}_{\mu-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{U}_{\nu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{U}_{\nu-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}\\
&+\frac{B}{A}\left[\underset{1}{V}_{\lambda-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{V}_{\lambda-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{V}_{\mu-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{V}_{\nu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{V}_{\nu-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}\right]\\
&+\frac{C}{A}\left[\underset{1}{W}_{\lambda-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{W}_{\lambda-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{W}_{\mu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{W}_{\mu-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{W}_{\nu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{W}_{\nu-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}\right]\\
&+h\left\{\begin{aligned}
&\underset{1}{U}'_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{U}'_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{U}'_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{U}'_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{U}'_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{U}'_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}\\
&+\frac{B}{A}\left[\underset{1}{V}'_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{V}'_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{V}'_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{V}'_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{V}'_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{V}'_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}\right]\\
&+\frac{C}{A}\left[\underset{1}{W}'_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{W}'_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{W}'_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{W}'_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{W}'_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{W}'_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}\right]
\end{aligned}\right.
\end{aligned}
\tag{865}
$$

Auch hier werden A, B, C sämmtlich aus T abgeleitet, indem man einmal alle U, ein zweites Mal alle V und ein drittes Mal alle W ersetzt durch die Einheit, d. h. es ist:

$$
\begin{aligned}
A &= \underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda}\\
B &= \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{U}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda}\\
C &= \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda} + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu} + \underset{3}{U}_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu}
\end{aligned}
\tag{866}
$$

Hiezu hat man aber noch:

$$
\begin{aligned}
&(\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu})\frac{B}{A} + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} = 0\\
&(\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda})\frac{B}{A} + \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} = 0\\
&(\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda})\frac{B}{A} + \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda} = 0\\
&(\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu})\frac{C}{A} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu} + \underset{3}{U}_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu} = 0\\
&(\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda})\frac{C}{A} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu} + \underset{3}{U}_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda} = 0\\
&(\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda})\frac{C}{A} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu} + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda} = 0
\end{aligned}
\tag{867}
$$

Von der Richtigkeit aller dieser Relationen überzeugt man sich durch Wegschaffen der Brüche und Substitution der unter (866) für A, B, C gegebenen Werthe. Sie gehen nämlich alle auf diesem Wege in identische über, indem sich ihre Polynome verwandeln in das verschwindende T nur noch multiplizirt mit einfachen Factoren von der Form: $\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{2}{W}_{\mu}$ u. s. w. Indem man nun vermittelst dieser Relation A, B, C aus der Bestimmungsgleichung (865) in h eliminirt, ergibt sich wieder:

$$
S + hT = 0 \quad \text{mithin in} \quad h = -\frac{S}{T}
\tag{868}
$$

allwo jedoch S den folgenden complizirten Werth besitzt:

$$\begin{aligned} S = {} & \underset{1}{U}_{\lambda-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{U}_{\lambda-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{U}_{\mu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \\ & + \underset{2}{U}_{\mu-1}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{U}_{\nu-1}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{U}_{\nu-1}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \\ & + \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu-1}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu-1}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda-1}\underset{3}{W}_{\nu} + \\ & + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu-1}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{U}_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda-1}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu-1}\underset{1}{W}_{\lambda} + \\ & + \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu-1} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu-1} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu-1} + \\ & + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda-1} + \underset{3}{U}_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu-1} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda-1} \end{aligned} \qquad (869)$$

während T den ersten Differentialquotienten des unter (842) erscheinenden, verschwindenden, gemeinschaftlichen Nenners andeutet. Zugleich ist die Verwandtschaft des hier aufgeführten S mit dem T augenfällig. Um nämlich S aus dem T zu erhalten, verringert man zuerst alle Stellenzeiger des U um die Einheit, und zeichnet das Resultat auf, dann auch die Stellenzeiger der verschiedenen V um die Einheit und schreibt abermals das resultirende Polynom nieder, ferner vermindert man auch noch die Stellenzeiger von W um die Einheit u. s. w., wenn der Differentialgleichungen und Variablen mehr als drei vorkommen sollten. Das Aggregat aller auf diesem Wege aus T gewonnenen Polynome ist nun S und es erscheint hiemit wieder eine zweite Abtheilung der Rechnung geschlossen. Während nämlich die erste Gruppe von Bestimmungsgleichungen alle möglichen Werthe von u geliefert hat, nämlich:

$$u = \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ldots\ldots\ \alpha_n$$

zieht man aus der zweiten Gruppe von Bestimmungsgleichungen den Werth des Differentiationsindex h, und es versteht sich von selbst, dass einem jeden α ein eigenes h entspreche im Allgemeinen wenigstens, so dass man also beziehlich zu diesen α gehörig haben wird:

$$h = h_1,\ h_2,\ \ldots\ldots\ldots\ h_n$$

Der gegenwärtig vorgetragenen Analysis nach gilt zu ihrer Ermittlung die folgende allgemeine, ihrem Ausdrucke nach sehr einfache Regel, wenn auch mitunter die damit verknüpften Rechnungen etwas weitläufiger ausfallen sollten. Aus dem annoch die Variable u enthaltenden T bilde man S, indem man der Reihe nach die Stellenzeiger von U, V, W, ... um die Einheit verringert und alle so gewonnenen Polynome addirt, dann zeichne man den Bruch

$$-\frac{S}{T}$$

auf, und substituire in demselben anstatt u der Reihe nach alle Wurzeln der $T = 0$, die da sind:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ldots\ldots\ \alpha_n$$

so hat man alle zu diesem α gehörigen Differentiationsindices h. Angenommen, es gehe durch diese Substitutionen S der Reihe nach über in:

$$S_1\ ,\ \ S_2\ ,\ \ S_3\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ S_n$$

T' hingegen in:

$$\mathrm{T}'_1\ ,\ \mathrm{T}'_2\ ,\ \mathrm{T}'_3\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{T}'_n$$

so ergibt sich:

$$h_1 = -\frac{\mathrm{S}_1}{\mathrm{T}'_1}\ ,\quad h_2 = -\frac{\mathrm{S}_2}{\mathrm{T}'_2}\ ,\quad h_3 = -\frac{\mathrm{S}_3}{\mathrm{T}'_3}\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ h_n = -\frac{\mathrm{S}_n}{\mathrm{T}'_n} \tag{870}$$

Diese zwei in der Rechnung vollbrachten Schritte erledigen nun den vornehmsten Theil der asymptotischen Integration eines Systemes von Differentialgleichungen. Sie geben nämlich die Asymptoten der verschiedenen Werthe von ξ, η, ζ, ... in Form eines Produktes aus einer Exponentialgrösse wie $e^{\alpha x}$ in das Anfangsglied einer absteigenden Reihe, einem Ausdruck, dem sich die wirklichen Werthe von ξ, η, ζ, ... bei dem fortwährenden Wachsen von x ins Unendliche nähern.

Man weiss also vermöge der bisher durchgeführten Rechnung, dass für grosse Werthe der unabhängigen Veränderlichen x die abhängigen Variablen ξ, η, ζ gegeben seien durch die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \xi &= \mathrm{A}_1\mathrm{K}_1 e^{\alpha_1 x} x^{h_1} + \mathrm{A}_2\mathrm{K}_2 e^{\alpha_2 x} x^{h_2} + \ldots\ldots\ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{K}_n e^{\alpha_n x} x^{h_n} \\ \eta &= \mathrm{B}_1\mathrm{K}_1 e^{\alpha_1 x} x^{h_1} + \mathrm{B}_2\mathrm{K}_2 e^{\alpha_2 x} x^{h_2} + \ldots\ldots\ldots + \mathrm{B}_n\mathrm{K}_n e^{\alpha_n x} x^{h_n} \\ \zeta &= \mathrm{C}_1\mathrm{K}_1 e^{\alpha_1 x} x^{h_1} + \mathrm{C}_2\mathrm{K}_2 e^{\alpha_2 x} x^{h_2} + \ldots\ldots\ldots + \mathrm{C}_n\mathrm{K}_n e^{\alpha_n x} x^{h_n} \end{aligned} \tag{871}$$

allwo K_1, K_2, ... K_n eben so viele Integrationsconstanten andeuten, und es genügt dieses Ergebniss in sehr vielen Fällen dem Analysten vollkommen, bei einer undulatorischen Bewegung z. B., wo es sich nur um den Vorgang handelt in grosser Entfernung von der Erregungsstelle, so dass hiemit die Rechnung als abgeschlossen betrachtet werden kann. Wünscht man jedoch in den Besitz der genaueren Werthe von ξ, η, ζ, ... nicht nur für sehr grosse x, sondern auch für mässige und kleine Werthe dieser Variablen geltend, zu gelangen, so hat man die Rechnung fortzusetzen; ehe man jedoch zu dem folgenden Systeme von Bestimmungsgleichungen schreitet, zu bemerken, dass sich aus der bereits erledigten zweiten Gruppe von solchen unbestimmte und unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinende Werthe der Reihencoefficienten: hL', hM', hN', ... ergeben.

Um zu ihnen zu gelangen, ist es abermals nothwendig, die nachträglich der Nulle gleich zu setzenden Zähler noch als Functionen von u vollständig und mit Beibehaltung derjenigen Glieder zu construiren, die in Folge von $T = 0$ verschwinden, weil die Division derselben durch den verschwindenden Nenner T ein von der Nulle verschiedenes Resultat liefern kann. Wir haben zu diesem Zwecke

$$\begin{aligned} A &= \underset{2}{V}_\mu \underset{3}{W}_\nu - \underset{3}{V}_\nu \underset{2}{W}_\mu - \underset{1}{V}_\lambda \underset{3}{W}_\nu + \underset{3}{V}_\nu \underset{1}{W}_\lambda + \underset{1}{V}_\lambda \underset{2}{W}_\mu - \underset{2}{V}_\mu \underset{1}{W}_\lambda \\ B &= \underset{1}{U}_\lambda \underset{3}{W}_\nu - \underset{1}{U}_\lambda \underset{2}{W}_\mu - \underset{2}{U}_\mu \underset{3}{W}_\nu + \underset{2}{U}_\mu \underset{1}{W}_\lambda + \underset{3}{U}_\nu \underset{2}{W}_\mu - \underset{3}{U}_\nu \underset{1}{W}_\lambda \\ C &= \underset{1}{U}_\lambda \underset{2}{V}_\mu - \underset{1}{U}_\lambda \underset{3}{V}_\nu - \underset{2}{U}_\mu \underset{1}{V}_\lambda + \underset{2}{U}_\mu \underset{3}{V}_\nu + \underset{3}{U}_\nu \underset{1}{V}_\lambda - \underset{3}{U}_\nu \underset{2}{V}_\mu \end{aligned} \tag{872}$$

Relationen, die den (866) ähnlich sind. Hieraus gehen aber andere hervor, die von den darauffolgenden (867) in etwas differiren, in Gliedern nämlich, die dem T proportional sind. Sie sind:

$$\begin{aligned}
(\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu})\, B + (\underset{2}{U}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu})\, A &= T(\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{2}{W}_{\mu})\\
(\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda})\, B + (\underset{1}{U}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda})\, A &= T(\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{W}_{\lambda})\\
(\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda})\, B + (\underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda})\, A &= T(\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{1}{W}_{\lambda})\\
(\underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu})\, C - (\underset{2}{U}_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu})\, A &= T(\underset{2}{V}_{\mu} - \underset{3}{V}_{\nu})\\
(\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda})\, C - (\underset{1}{U}_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda})\, A &= T(\underset{1}{V}_{\lambda} - \underset{3}{V}_{\nu})\\
(\underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda})\, C - (\underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda})\, A &= T(\underset{1}{V}_{\lambda} - \underset{2}{V}_{\mu})
\end{aligned} \tag{873}$$

Führt man die daraus hervorgehenden Werthe von $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ in die verschiedenen Bestandtheile des Polynomes (865) ein, so gelangt man zu einem Werthe des Zählers von hL' der annoch mit $\frac{AK}{T}$ multiplizirt nach vorgängiger Substitution $u = \alpha$ zu dem Werthe von hL' selber leitet, welchem analog auch jene von hM' und hN' aufgezeichnet werden können. Sie sind:

$$\begin{aligned}
hL' &= AK' - \underset{1}{A}K\\
hM' &= BK' - \underset{1}{B}K\\
hN' &= CK' - \underset{1}{C}K
\end{aligned} \tag{874}$$

In diesen Formeln bedeutet K' den in Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden, einstweilen noch unbestimmt bleibenden Werth des Bruches

$$K' = \frac{(S + hT')K}{T} \tag{875}$$

unter $\underset{1}{A}$, $\underset{1}{B}$, $\underset{1}{C}$ hingegen werden die folgenden Werthe verstanden, deren Ableitung aus den A, B, C dieselbe ist, wie jene des $S + hT'$ aus dem T, d. h.

$$\begin{aligned}
\underset{1}{A} = {} & \underset{2}{V}_{\mu-1}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{V}_{\nu-1}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{1}{V}_{\lambda-1}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{3}{V}_{\nu-1}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{1}{V}_{\lambda-1}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu-1}\underset{1}{W}_{\lambda} +\\
& + \underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu-1} - \underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu-1} - \underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu-1} + \underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda-1} + \underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu-1} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda-1} +\\
& + h\left\{\begin{matrix} \underset{2}{V'}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{3}{V'}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{1}{V'}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{3}{V'}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{1}{V'}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{V'}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \\ + \underset{2}{V}_{\mu}\underset{3}{W'}_{\nu} - \underset{3}{V}_{\nu}\underset{2}{W'}_{\mu} - \underset{1}{V}_{\lambda}\underset{3}{W'}_{\nu} + \underset{3}{V}_{\nu}\underset{1}{W'}_{\lambda} + \underset{1}{V}_{\lambda}\underset{2}{W'}_{\mu} - \underset{2}{V}_{\mu}\underset{1}{W'}_{\lambda} \end{matrix}\right\}\\
\underset{1}{B} = {} & \underset{1}{U}_{\lambda-1}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{U}_{\lambda-1}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{U}_{\mu-1}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{U}_{\mu-1}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{U}_{\nu-1}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{U}_{\nu-1}\underset{1}{W}_{\lambda} +\\
& + \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu-1} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu-1} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu-1} + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda-1} + \underset{3}{U}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu-1} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda-1} +\\
& + h\left\{\begin{matrix} \underset{1}{U'}_{\lambda}\underset{3}{W}_{\nu} - \underset{1}{U'}_{\lambda}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{2}{U'}_{\mu}\underset{3}{W}_{\nu} + \underset{2}{U'}_{\mu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \underset{3}{U'}_{\nu}\underset{2}{W}_{\mu} - \underset{3}{U'}_{\nu}\underset{1}{W}_{\lambda} + \\ + \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{3}{W'}_{\nu} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{W'}_{\mu} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{3}{W'}_{\nu} + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{W'}_{\lambda} + \underset{3}{U}_{\nu}\underset{2}{W'}_{\mu} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{1}{W'}_{\lambda} + \end{matrix}\right\}\\
\underset{1}{C} = {} & \underset{1}{U}_{\lambda-1}\underset{2}{V}_{\mu} - \underset{1}{U}_{\lambda-1}\underset{3}{V}_{\nu} - \underset{2}{U}_{\mu-1}\underset{1}{V}_{\lambda} + \underset{2}{U}_{\mu-1}\underset{3}{V}_{\nu} + \underset{3}{U}_{\nu-1}\underset{1}{V}_{\lambda} - \underset{3}{U}_{\nu-1}\underset{2}{V}_{\mu} +\\
& + \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu-1} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu-1} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda-1} + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu-1} + \underset{3}{U}_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda-1} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu-1} +\\
& + h\left\{\begin{matrix} + \underset{1}{U'}_{\lambda}\underset{2}{V}_{\mu} - \underset{1}{U'}_{\lambda}\underset{3}{V}_{\nu} - \underset{2}{U'}_{\mu}\underset{1}{V}_{\lambda} + \underset{2}{U'}_{\mu}\underset{3}{V}_{\nu} + \underset{3}{U'}_{\nu}\underset{1}{V}_{\lambda} - \underset{3}{U'}_{\nu}\underset{2}{V}_{\mu} + \\ + \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{2}{V'}_{\mu} - \underset{1}{U}_{\lambda}\underset{3}{V'}_{\nu} - \underset{2}{U}_{\mu}\underset{1}{V'}_{\lambda} + \underset{2}{U}_{\mu}\underset{3}{V'}_{\nu} + \underset{3}{U}_{\nu}\underset{1}{V'}_{\lambda} - \underset{3}{U}_{\nu}\underset{2}{V'}_{\mu} + \end{matrix}\right\}.
\end{aligned} \tag{876}$$

Schreiten wir jetzt zur Fortsetzung der Rechnung zu der dritten Gruppe von Bestimmungsgleichungen, die wir aus den Systemen (837), (838), (839) herausheben. Sie sind:

$$
(877)\quad
\begin{aligned}
&{}_1U_{\lambda-2}L + {}_1V_{\lambda-2}M + {}_1W_{\lambda-2}N + \ldots\ldots\ldots\ldots +\\
&+ \binom{h}{1}\left[({}_1U_{\lambda-1}L)' + ({}_1V_{\lambda-1}M)' + ({}_1W_{\lambda-1}N)' + \ldots\ldots\right] +\\
&+ \binom{h}{2}\left[({}_1U_{\lambda}L)'' + ({}_1V_{\lambda}M)'' + ({}_1W_{\lambda}N)'' + \ldots\ldots\right] = 0\\
&{}_2U_{\mu-2}L + {}_2V_{\mu-2}M + {}_2W_{\mu-2}N + \ldots\ldots\ldots\ldots +\\
&+ \binom{h}{1}\left[({}_2U_{\mu-1}L)' + ({}_2V_{\mu-1}M)' + ({}_2W_{\mu-2}N)' + \ldots\ldots\right] +\\
&+ \binom{h}{2}\left[({}_2U_{\mu}L)'' + ({}_2V_{\mu}M)'' + ({}_2W_{\mu}N)'' + \ldots\ldots\right] = 0\\
&{}_3U_{\nu-2} + {}_3V_{\nu-2}M + {}_3W_{\nu-2}N + \ldots\ldots\ldots\ldots +\\
&+ \binom{h}{1}\left[({}_3U_{\nu-1}L)' + ({}_3V_{\nu-1}M)' + ({}_3W_{\nu-1}N)' + \ldots\ldots\right] +\\
&+ \binom{h}{2}\left[({}_3U_{\nu}L)'' + ({}_3V_{\nu}M)'' + ({}_3W_{\nu}N)'' + \ldots\ldots\right] = 0
\end{aligned}
$$

und sehen in entwickelter Gestalt, so wie zur Bestimmung von L'', M'', N'', ... dienlich, hingezeichnet, folgendermassen aus:

$$
(878)\quad
\begin{aligned}
&\binom{h}{2}\left[{}_1U_{\lambda}L'' + {}_1V_{\lambda}M'' + {}_1W_{\lambda}N'' + \ldots\ldots\right] =\\
&= -\binom{h}{1}\left[({}_1U_{\lambda-1} + (h-1)\,{}_1U'_{\lambda})L' + ({}_1V_{\lambda-1} + (h-1)\,{}_1V'_{\lambda})M' + ({}_1W_{\lambda-1} + (h-1)\,{}_1W'_{\lambda})N' + \ldots\ldots\right]\\
&-\left({}_1U_{\lambda-2} + \binom{h}{1}{}_1U'_{\lambda-1} + \binom{h}{2}{}_1U''_{\lambda}\right)L - \left({}_1V_{\lambda-2} + \binom{h}{1}{}_1V'_{\lambda-1} + \binom{h}{2}{}_1V''_{\lambda}\right)M -\\
&-\left({}_1W_{\lambda-2} + \binom{h}{1}{}_1W'_{\lambda-1} + \binom{h}{2}{}_1W''_{\lambda}\right)N - \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\binom{h}{2}\left[{}_2U_{\mu}L'' + {}_2V_{\mu}M'' + {}_2W_{\mu}N'' + \ldots\ldots\right] =\\
&= -\binom{h}{1}\left[({}_2U_{\mu-1} + (h-1)\,{}_2U'_{\mu})L' + ({}_2V_{\mu-1} + (h-1)\,{}_2V'_{\mu})M' + ({}_2W_{\mu-1} + (h-1)\,{}_2W'_{\mu})N' + \ldots\right]\\
&-\left({}_2U_{\mu-2} + \binom{h}{1}{}_2U'_{\mu-1} + \binom{h}{2}{}_2U''_{\mu}\right)L - \left({}_2V_{\mu-2} + \binom{h}{1}{}_2V'_{\mu-2} + \binom{h}{2}{}_2V''_{\mu}\right)M -\\
&-\left({}_2W_{\mu-2} + \binom{h}{1}{}_2W'_{\mu-1} + \binom{h}{2}{}_2W''_{\mu}\right)N - \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\binom{h}{2}\left[{}_3U_{\nu}L'' + {}_3V_{\nu}M'' + {}_3W_{\nu}N'' + \ldots\ldots\right] =\\
&= -\binom{h}{1}\left[({}_3U_{\nu-1} + (h-1)\,{}_3U'_{\nu})L' + ({}_3V_{\nu-1} + (h-1)\,{}_3V'_{\nu})M' + ({}_3W_{\nu-1} + (h-1)\,{}_3W'_{\nu})N' + \ldots\ldots\right] -\\
&-\left({}_3U_{\nu-2} + \binom{h}{1}{}_3U'_{\nu-1} + \binom{h}{2}{}_3U''_{\nu}\right)L - \left({}_3V_{\nu-2} + \binom{h}{1}{}_3V'_{\nu-1} + \binom{h}{2}{}_3V''_{\nu}\right)M -\\
&-\left({}_3W_{\nu-2} + \binom{h}{1}{}_3W'_{\nu-1} + \binom{h}{2}{}_3W''_{\nu}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Führt man in die zweiten Theile dieser Gleichungen die bereits aufgefundenen unter (845) und (874) erscheinenden Werthe ein von L, M, N, L′, M′, N′, ... so erhält man offenbar der Form nach:

$$\begin{aligned}\binom{h}{2}\left[\underset{1}{U}_\lambda L'' + \underset{1}{V}_\lambda M'' + \underset{1}{W}_\lambda N'' + \ldots\ldots\right] &= DK + GK' \\ \binom{h}{2}\left[\underset{2}{U}_\mu L'' + \underset{2}{V}_\mu M'' + \underset{2}{W}_\mu N'' + \ldots\ldots\right] &= EK + HK' \\ \binom{h}{2}\left[\underset{3}{U}_\nu L'' + \underset{3}{V}_\nu M'' + \underset{3}{V}_\nu N'' + \ldots\ldots\right] &= FK + IK' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\end{aligned} \tag{879}$$

Auch diese Gleichungen verweigern die Werthe von L″, M″, N″, ... indem sie, nach ihnen aufgelöst, gebrochene Werthe mit dem gemeinschaftlichen Nenner Null bieten, mithin diese Unbekannten für unendlich erklären, es sei denn, dass auch die sämmtlichen Zähler verschwinden. Diess findet aber jedesmal Statt, so oft auch die zweiten Theile der Gleichungen insoferne von einander nicht verschieden sind, wie die ersten, nämlich wenn irgend einer von ihnen hervorgeht aus den übrigen durch Multiplication mit denselben bestimmten Constanten und Addition. Diess erfordert eine einzige Beziehungsgleichung zwischen den genannten zweiten Theilen, mithin zwischen den unbestimmten Grössen K und K′, kraft deren K′ als dem K proportional erklärt wird, etwa:

$$K' = kK \tag{880}$$

Hiemit hört die Unbestimmtheit von K′ auf und es bleibt lediglich dem K der Character einer willkürlichen Integrationsconstante. Zu gleicher Zeit sind L′, M′, N′, ... als dem K proportional zur Bestimmung gebracht, nämlich:

$$hL' = (Ak - \underset{1}{A})\,K,\quad hM' = (Bk - \underset{1}{B})\,K,\quad hN' = (Ck - C)\,\underset{1}{K},\ \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{881}$$

und man vermag jetzt die in der asymptotischen Form, d. h. als Produkte aus einer Exponentialgrösse in eine absteigende Reihe erscheinenden ξ, η, ζ, ... wie sie aus der Entwicklung der angenommenen Substitutionswerthe (832) hervorgehen, nämlich:

$$\begin{aligned}\xi &= e^{ax}\left[Lx^h + \binom{h}{1}L'x^{h-1} + \binom{h}{2}L''x^{h-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] \\ \eta &= e^{ax}\left[Mx^h + \binom{h}{1}M'x^{h-1} + \binom{h}{2}M''x^{h-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] \\ \zeta &= e^{ax}\left[Nx^h + \binom{h}{1}N'x^{h-1} + \binom{h}{2}N''x^{h-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{882}$$

aufzuzeichnen in zwei Gliedern der Entwicklung, nämlich:

$$\begin{aligned}\xi = {} & K_1 e^{a_1 x}\left[A_1 x^{h_1} + (A_1 k_1 - \underset{1}{A}_1)\,x^{h_1-1}\right] + \\ & + K_2 e^{a_2 x}\left[A_2 x^{h_2} + (A_2 k_2 - \underset{1}{A}_2)\,x^{h_2-1}\right] + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{883}$$

$$\eta = K_1 e^{\alpha_1 x}\left[B_1 x^{k_1} + (B_1 k_1 - \underset{1}{B_1})\, x^{k_1 - 1}\right] +$$
$$+ K_2 e^{\alpha_2 x}\left[B_2 x^{k_2} + (B_2 k_2 - \underset{1}{B_2})\, x^{k_2 - 1}\right] +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ K_n e^{\alpha_n x}\left[B_n x^{k_n} + (B_n k_n - \underset{1}{B_n})\, x^{k_n - 1}\right]$$
$$\zeta = K_1 e^{\alpha_1 x}\left[C_1 x^{k_1} + (C_1 k_1 - \underset{1}{C_1})\, x^{k_1 - 1}\right] +$$
$$+ K_2 e^{\alpha_2 x}\left[C_2 x^{k_2} + (C_2 k_2 - \underset{1}{C_2})\, x^{k_2 - 1}\right] +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ K_n e^{\alpha_n x}\left[C_n x^{k_n} + (C_n k_n - \underset{1}{C_n})\, x^{k_n - 1}\right]$$

Während hiemit die sämmtlichen Variablen ξ, η, ζ in zwei Anfangsgliedern zur völligen Bestimmung gebracht sind, erfahren die dritten Glieder derselben, d. h. die Reihencoefficienten

$$\binom{h}{2}L'',\ \binom{h}{2}M'',\ \binom{h}{2}N'',\ \ldots\ldots\ldots$$

einstweilen nur eine provisorische Bestimmung aus den Gleichungen (879). Da nämlich ihre Werthe auch in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, so sind diese Gleichungen nicht von einander verschieden; man wird mithin, irgend eine derselben streichend, aus den übrigen etwa $\binom{h}{2}M''$, $\binom{h}{2}N''$, ... gewinnen können in Function von $\binom{h}{2}L''$ und K oder auch von einer irgendwie anstatt der $\binom{h}{2}L''$ eingeführten neuen Constanten K'' und von K. Geht man nun mit diesen so gewonnenen Werthen zu dem folgenden Systeme von Bestimmungsgleichungen über, welche

$$\binom{h}{3}L''',\ \binom{h}{3}M''',\ \binom{h}{3}N''',\ \ldots\ldots\ldots$$

liefern sollen, so sieht man auch hier, so wie bei den übrigen Coefficienten den gemeinschaftlichen Nenner $T = 0$ erscheinen, ist mithin auch hier genöthigt, die Zähler alle gleichfalls zum Verschwinden zu bringen, indem man zwischen K'' und K oder $\binom{h}{2}L''$ und K eine bestimmte Relation feststellt, wodurch dann auch $\binom{h}{2}M''$, $\binom{h}{2}N''$, ... zu vollkommen bestimmten, dem K proportionalen Werthen gelangen werden. Mit diesem Schritte in der Rechnung lassen sich dann die Werthe von ξ, η, ζ, ... bereits dreigliedrig aufzeichnen.

Dieser aus Operationen von einerlei Art zusammengesetzte Calcul, in dessen Einzelnheiten hier nicht näher eingegangen werden soll, weil ohnehin jeder Rechner nach getroffener Einleitung denjenigen Weg gehen wird, der für ihn der bequemste und sicherste zu sein scheint, lässt sich fortsetzen nach Belieben und wird auch nirgends unterbrochen durch eine besondere zum Abbrechen der Rechnung nöthigende Erscheinung. Wiewohl es sich nämlich treffen kann, dass irgend eine der aufeinanderfolgenden Coefficientengruppen etwa $L^{(r)}$, $M^{(r)}$, $N^{(r)}$, ... unendlich wird, so geschieht diess doch nur lediglich desshalb, weil ihnen der gemeinschaftliche Factor $\binom{h}{r}$ angehängt, d. h. weil die Rechnung eigentlich die Werthe der Unbekannten:

$$\binom{h}{r} \mathbf{L}^{(r)}, \ \binom{h}{r} \mathbf{M}^{(r)}, \ \binom{h}{r} \mathbf{N}^{(r)}, \ \ldots\ldots\ldots$$

gibt, und weil der Binomialcoefficient $\binom{h}{r}$ mitunter Null zu werden vermag, wenn der Differentiationsindex h gelegentlich in eine ganze positive Zahl übergeht. Das hiedurch herbeigeführte Unendlichwerden von $\mathbf{L}^{(r)}$, $\mathbf{M}^{(r)}$, $\mathbf{N}^{(r)}$ bewirkt aber unter diesen Umständen nur die Verwandlung der Werthe von $\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots$ in unendliche Reihen, denn die obangeführten Produkte sind es eigentlich, die in $\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots$ vorkommen und diese Produkte bleiben endlich, können aber auch gelegentlich in Null übergehen, wodurch dann die unendlichen Reihen, mit denen ξ, η, ζ multiplizirt erscheinen, sich in geschlossene algebraische Polynome zu verwandeln vermögen. Gewisse Bedingungsgleichungen zwischen den constanten Parametern der vorgelegten Differentialgleichungen müssen erfüllt sein, wenn dieses Abbrechen der Reihen erfolgen soll. Ihre Auffindung bietet für denjenigen keine Schwierigkeit, der sich mit der asymptotischen Integration einer einzigen Differentialgleichung zwischen nur zwei Variablen vollständig befreundet hat.

§. 19.

Integration von Systemen mehrerer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale.

So wie jede Form des Integrales einer Differentialgleichung oder eines Systemes von solchen ihre besonderen Vorzüge hat, und ihre besonderen Fälle vorzugsweiser Berechtigung; so ist es auch mit der des bestimmten Integrales. Man wird es nicht selten wünschenswerth finden, auch in dieser Gestalt die einem Systeme von Differentialgleichungen Genüge leistenden particulären Werthe entweder alle, oder wenigstens einige bestimmte Gruppen derselben zu besitzen und namentlich wird diess dann der Fall sein, wenn geringe Ansteigungen in den Anfangsgliedern der vorgelegten Differentialgleichungen auf particuläre Integrale in der Form $e^{\int \varphi dx}$ hindeuten von gebrochener Ordnungszahl der Function φ, mithin auf irrationale solche, und wenn man die irrationalen Formen durch die Anwendung des bestimmten Integrales zu umgehen wünscht. Das Integriren in dieser Gestalt, da es zu ganz ähnlichen Rechnungsformen führt, wie das im vorhergehenden Paragraphe abgehandelte asymptotische, kann, da es keine weiteren Schwierigkeiten bietet, hier um so kürzer in wenigen Grundzügen abgemacht werden.

Die vorgelegten Differentialgleichungen in beliebiger Anzahl zwischen den abhängigen Veränderlichen $\xi, \eta, \zeta \ldots$ und der einzigen unabhängigen x seien, wie im vorhergehenden Paragraphe:

$$P = 0 , \quad Q = 0 , \quad R = 0, \ldots\ldots$$

Die Gleichungspolynome $P, Q, R, \ldots$ denke man sich nicht nach Differentialquotienten der ξ, η, ζ, sondern nach Potenzen der unabhängigen Veränderlichen x geordnet. Hiedurch gestalte sich P zu einem Polynome in x vom Grade λ, Q vom Grade μ, R vom Grade ν u. s. w. und nun substituire man anstatt $\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots$ die folgenden Werthe in Form von bestimmten Integralen:

$$\xi = \int_{u'}^{u''} e^{ux} L du , \quad \eta = \int_{u'}^{u''} e^{ux} M du , \quad \zeta = \int_{u'}^{u''} e^{ux} N du , \ \ldots\ldots$$

Hier ist u eine neue Veränderliche, u' und u'' von x unabhängige Integrationsgrenzen, die aus der Rechnung zu bestimmen sind, L, M, N, ... aber bezeichnen schicklich gewählte Functionen von u, damit die so gestalteten ξ, η, ζ, ... sich in ein System Genüge leistender Werthe verwandeln.

Die Herstellung des Substitutionsresultates geschieht nun auf dieselbe Weise, wie bei der asymptotischen Integration. Man ersetzt nämlich ξ, ξ', ξ'', ... $\xi^{(r)}$ beziehlich durch: L, uL, u^2L,... u^rL; ebenso schreibt man anstatt η, η', η'', ... $\eta^{(r)}$ beziehlich die Produkte: M, uM, u^2M, ... u^rM; genau auf dieselbe Weise setzt man anstatt ζ, ζ', ζ'', ... $\zeta^{(r)}$ beziehlich: N, uN, u^2N,... u^rN, u. s. w. Angenommen nun, die Gleichungspolynome P, Q, R, ... gehen dadurch über in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, ... so sind die gesuchten Substitutionsresultate, wie sie zunächst gewonnen werden, die folgenden:

$$\int_{u'}^{u''} e^{ux}\mathfrak{P}du = 0\ , \quad \int_{u'}^{u''} e^{ux}\mathfrak{Q}du = 0\ , \quad \int_{u'}^{u''} e^{ux}\mathfrak{R}du = 0\ , \ \ldots\ldots \tag{885}$$

Allhier bedeuten, wie gesagt: $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, ... die Ergebnisse der so eben genannten Substitutionen in P, Q, R, ... die in entwickelterer Gestalt hingezeichnet, die folgenden sind:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P} = {} & \underset{1}{U}_0 L + \underset{1}{V}_0 M + \underset{1}{W}_0 N + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + x\,[\underset{1}{U}_1 L + \underset{1}{V}_1 M + \underset{1}{W}_1 N + \ldots\ldots] + \\
& + x^2[\underset{1}{U}_2 L + \underset{1}{V}_2 M + \underset{1}{W}_2 N + \ldots\ldots] + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + x^\lambda[\underset{1}{U}_\lambda L + \underset{1}{V}_\lambda M + \underset{1}{W}_\lambda N + \ldots\ldots] \\
\mathfrak{Q} = {} & \underset{2}{U}_0 L + \underset{2}{V}_0 M + \underset{2}{W}_0 N + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + x\,[\underset{2}{U}_1 L + \underset{2}{V}_1 M + \underset{2}{W}_1 N + \ldots\ldots] + \\
& + x^2[\underset{2}{U}_2 L + \underset{2}{V}_2 M + \underset{2}{W}_2 N + \ldots\ldots] + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + x^\mu[\underset{2}{U}_\mu L + \underset{2}{V}_\mu M + \underset{2}{W}_\mu N + \ldots\ldots] \\
\mathfrak{R} = {} & \underset{3}{U}_0 L + \underset{3}{V}_0 M + \underset{3}{W}_0 N + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + x\,[\underset{3}{U}_1 L + \underset{3}{V}_1 M + \underset{3}{W}_1 N + \ldots\ldots] + \\
& + x^2[\underset{3}{U}_2 L + \underset{3}{V}_2 M + \underset{3}{W}_2 N + \ldots\ldots] + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + x^\nu[\underset{3}{U}_\nu L + \underset{3}{V}_\nu M + \underset{3}{W}_\nu N + \ldots\ldots]
\end{aligned} \tag{886}$$

Diese Formeln stimmen mit den (833) des vorigen Paragraphes Seite 579 vollkommen überein und es bedeuten hier und dort die mit U, V, W bezeichneten Coefficienten genau dieselben Polynome in u. Man ordne nun die Polynome der Substitutionsgleichungen (885) nach Potenzen von x

absteigend und unterwerfe ein jedes Glied, dem irgend eine r^{te} Potenz von x als Factor zugefallen ist, dem Verfahren des theilweisen Integrirens r-Mal, bemerkend, dass ganz allgemein für eine beliebige Function von u, anstatt S gesetzt, die folgende Formel bestehe:

$$x^r\int_{u'}^{u''} e^{ux} S\,du = \Big\{e^{ux}\big[x^{r-1}S - x^{r-2}S' + x^{r-3}S'' - \ldots\ldots + (-1)^{r-1}S^{(r-1)}\big]\Big\}_{u'}^{u''} + (-1)^r\int_{u'}^{u''} e^{ux}S^{(r)}du \tag{887}$$

Von dieser Formel mache man zur Umgestaltung der Gleichungspolynome (885) Gebrauch, indem man sie alle in zwei Theile zerlegt, einen vom Integralzeichen freien und einen anderen noch damit behafteten, welcher letztere aber kein x mehr, ausgenommen im Exponenten der Exponentiellen e^{ux} besitzen darf. Die auf solche Weise umgestalteten Gleichungen sind:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{u'}^{u''} e^{ux} y\,du = \\
&= \int_{u'}^{u''} e^{ux}du\,\Big[\underset{1}{U}_0 L + \underset{1}{V}_0 M + \underset{1}{W}_0 N + \ldots\ldots\ldots - \\
&\qquad - (\underset{1}{U}_1 L)' - (\underset{1}{V}_1 M)' - (\underset{1}{W}_1 N)' - \ldots\ldots + \\
&\qquad + (\underset{1}{U}_2 L)'' + (\underset{1}{V}_2 M)'' + (\underset{1}{W}_2 N)'' + \ldots\ldots + \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + (-1)^\lambda\big[(\underset{1}{U}_\lambda L)^{(\lambda)} + (\underset{1}{V}_\lambda M)^{(\lambda)} + (\underset{1}{W}_\lambda N)^{(\lambda)} + \ldots\ldots\big]\Big] + \\
&\quad + \Big\{e^{ux}\Big\{x^{\lambda-1}\big[\underset{1}{U}_\lambda L + \underset{1}{V}_\lambda M + \underset{1}{W}_\lambda N + \ldots\ldots\ldots\big] + \\
&\qquad + x^{\lambda-2}\begin{bmatrix} \underset{1}{U}_{\lambda-1} L + \underset{1}{V}_{\lambda-1} M + \underset{1}{W}_{\lambda-1} N + \ldots\ldots - \\ -(\underset{1}{U}_\lambda L)' - (\underset{1}{V}_\lambda M)' - (\underset{1}{W}_\lambda L)' - \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \\
&\qquad + x^{\lambda-3}\begin{bmatrix} \underset{1}{U}_{\lambda-2} L + \underset{1}{V}_{\lambda-2} M + \underset{1}{W}_{\lambda-2} N + \ldots\ldots\ldots \\ -(\underset{1}{U}_{\lambda-1} L)' - (\underset{1}{V}_{\lambda-1} M)' - (\underset{1}{W}_{\lambda-1} N)' - \ldots\ldots \\ +(\underset{1}{U}_\lambda L)'' + (\underset{1}{V}_\lambda M)'' + (\underset{1}{W}_\lambda N)'' + \ldots\ldots \end{bmatrix} \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + \underset{1}{U}_1 L + \underset{1}{V}_1 M + \underset{1}{W}_1 N + \ldots\ldots\ldots \\
&\qquad - (\underset{1}{U}_2 L)' - (\underset{1}{V}_2 M)' - (\underset{1}{W}_2 N)' - \ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + (\underset{1}{U}_3 L)'' + (\underset{1}{V}_3 M)'' + (\underset{1}{W}_3 N)'' + \ldots\ldots\ldots \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + (-1)^{\lambda-1}\big[(\underset{1}{U}_\lambda L)^{(\lambda-1)} + (\underset{1}{V}_\lambda M)^{(\lambda-1)} + (\underset{1}{W}_\lambda N)^{(\lambda-1)} + \ldots\ldots\big]\Big\}\Big\}_{u'}^{u''}
\end{aligned}
\tag{888}
$$

$$0 = \int_{u'}^{u''} e^{ux}\mathfrak{Q}\,du =$$

$$\begin{aligned}
= \int_{u'}^{u''} e^{ux} du \Big[\quad & \underset{2}{U}_0 L + \underset{2}{V}_0 M + \underset{2}{W}_0 N + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - (\underset{2}{U}_1 L)' - (\underset{2}{V}_1 M)' - (\underset{2}{W}_1 N)' - \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (\underset{2}{U}_2 L)'' + (\underset{2}{V}_2 M)'' + (\underset{2}{W}_2 N)'' + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (-1)^{\mu}[(\underset{2}{U}_{\mu} L)^{(\mu)} + (\underset{2}{V}_{\mu} M)^{(\mu)} + (\underset{2}{W}_{\mu} N)^{(\mu)} + \ldots\ldots] \Big] + \\
+ \Big\{ e^{ux} \Big\{ & x^{\mu-1} [\underset{2}{U}_{\mu} L + \underset{2}{V}_{\mu} M + \underset{2}{W}_{\mu} N + \ldots\ldots\ldots\ldots] + \\
& + x^{\mu-2} \begin{bmatrix} \underset{2}{U}_{\mu-1} L + \underset{2}{V}_{\mu-1} M + \underset{2}{W}_{\mu-1} N + \ldots\ldots \\ -(\underset{2}{U}_{\mu} L)' - (\underset{2}{V}_{\mu} M)' - (\underset{2}{W}_{\mu} N)' - \ldots\ldots \end{bmatrix} \\
& + x^{\mu-3} \begin{bmatrix} \underset{2}{U}_{\mu-2} L + \underset{2}{V}_{\mu-2} M + \underset{2}{W}_{\mu-2} N + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -(\underset{2}{U}_{\mu-1} L)' - (\underset{2}{V}_{\mu-1} M)' - (\underset{2}{W}_{\mu-1} N)' - \ldots\ldots \\ + (\underset{2}{U}_{\mu} L)'' + (\underset{2}{V}_{\mu} M)'' + (\underset{2}{W}_{\mu} N)'' + \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \underset{2}{U}_1 L + \underset{2}{V}_1 M + \underset{2}{W}_1 N + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - (\underset{2}{U}_2 L)' - (\underset{2}{V}_2 M)' - (\underset{2}{W}_2 N)' - \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (\underset{2}{U}_3 L)'' + (\underset{2}{V}_3 M)'' + (\underset{2}{W}_3 N)'' + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (-1)^{\mu-1} [(\underset{2}{U}_{\mu} L)^{(\mu-1)} + (\underset{2}{V}_{\mu} M)^{(\mu-1)} + (\underset{2}{W}_{\mu} N)^{(\mu-1)} + \ldots\ldots] \Big\} \Big\}_{u'}^{u''}
\end{aligned} \tag{888}$$

$$0 = \int_{u'}^{u''} e^{ux}\mathfrak{N}\,du =$$

$$\begin{aligned}
= \int_{u'}^{u''} e^{ux} du \Big[\quad & \underset{3}{U}_0 L + \underset{3}{V}_0 M + \underset{3}{W}_0 N + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - (\underset{3}{U}_1 L)' - (\underset{3}{V}_1 M)' - (\underset{3}{W}_1 N)' - \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (\underset{3}{U}_2 L)'' + (\underset{3}{V}_2 M)'' + (\underset{3}{W}_2 N)'' + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (-1)^{\nu}[(\underset{3}{U}_{\nu} L)^{(\nu)} + (\underset{3}{V}_{\nu} M)^{(\nu)} + (\underset{3}{W}_{\nu} N)^{(\nu)} + \ldots\ldots\ldots] + \\
+ \Big\{ e^{ux} \Big\{ & x^{\nu-1} [\underset{3}{U}_{\nu} L + \underset{3}{V}_{\nu} M + \underset{3}{W}_{\nu} N + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] + \\
& + x^{\nu-2} \begin{bmatrix} \underset{3}{U}_{\nu-1} L + \underset{3}{V}_{\nu-1} M + \underset{3}{W}_{\nu-1} N + \ldots\ldots \\ -(\underset{3}{U}_{\nu} L)' - (\underset{3}{V}_{\nu} M)' - (\underset{3}{W}_{\nu} N)' - \ldots\ldots \end{bmatrix} +
\end{aligned}$$

$$+ x^{\nu-2}\left[\begin{array}{l} \underset{2}{U}_{\nu-2}L + \underset{2}{V}_{\nu-2}M + \underset{2}{W}_{\nu-2}N + \ldots\ldots \\ -(\underset{2}{U}_{\nu-1}L)' - (\underset{2}{V}_{\nu-1}M)' + (\underset{2}{W}_{\nu-1}N)' + \ldots\ldots \\ +(\underset{2}{U}_{\nu}L)'' + (\underset{2}{V}_{\nu}M)'' + (\underset{2}{W}_{\nu}N)'' + \ldots\ldots \end{array}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \underset{2}{U}_1L + \underset{2}{V}_1M + \underset{2}{W}_1N + \ldots\ldots\ldots$$

$$- (\underset{2}{U}_2L)' - (\underset{2}{V}_2M)' - (\underset{2}{W}_2N)' + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ (\underset{2}{U}_3L)'' + (\underset{2}{V}_3M)'' + (\underset{2}{W}_3N)'' + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{\nu-1}[(\underset{2}{U}_{\nu}L)^{(\nu-1)} + (\underset{2}{V}_{\nu}M)^{(\nu-1)} + (\underset{2}{W}_{\nu}N)^{(\nu-1)} + \ldots\ldots]\Big\}\Big\}_{u'}^{u''}$$

tzt diesen Gleichungen Genüge zu leisten durch schickliche Wahl der mit L, M, N, ... hneten Functionen von u und der Integrationsgrenzen u', u'' und diess zwar für beliebige Werthe , zerlegen wir eine jede dieser Substitutionsgleichungen in deren zwei, indem wir erstens den dem Integralzeichen stehenden Ausdruck, der alldort mit dem Factor $e^{ux}du$ multiplizirt erscheint, ch der Nulle gleich setzen, unter L, M, N, ... zu diesem Zwecke schicklich gewählte onen von u verstehend. Die so gewonnenen Gleichungen, ebenso viele an der Zahl, als der ıten Variablen ξ, η, ζ, ... sind Differentialgleichungen in L, M, N, ... beziehlich den ıgen λ, μ, ν, ... angehörig, nämlich:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \underset{1}{U}_0L + \underset{1}{V}_0M + \underset{1}{W}_0N + \ldots\ldots\ldots \\ & - (\underset{1}{U}_1L)' - (\underset{1}{V}_1M)' - (\underset{1}{W}_1N)' - \ldots\ldots\ldots \\ & + (\underset{1}{U}_2L)'' + (\underset{1}{V}_2M)'' + (\underset{1}{W}_2N)'' + \ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{\lambda}[(\underset{1}{U}_{\lambda}L)^{(\lambda)} + (\underset{1}{V}_{\lambda}M)^{(\lambda)} + (\underset{1}{W}_{\lambda}N)^{(\lambda)} + \ldots\ldots] \\ 0 = {} & \underset{2}{U}_0L + \underset{2}{V}_0M + \underset{2}{W}_0N + \ldots\ldots\ldots \\ & - (\underset{2}{U}_1L)' - (\underset{2}{V}_1M)' - (\underset{2}{W}_1N)' - \ldots\ldots\ldots \\ & + (\underset{2}{U}_2L)'' + (\underset{2}{V}_2M)'' + (\underset{2}{W}_2N)'' + \ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{\mu}[(\underset{2}{U}_{\mu})^{(\mu)} + (\underset{2}{V}_{\mu}M)^{(\mu)} + (\underset{2}{W}_{\mu}N)^{(\mu)} + \ldots\ldots] \\ 0 = {} & \underset{3}{U}_0L + \underset{3}{V}_0M + \underset{3}{W}_0N + \ldots\ldots\ldots \\ & - (\underset{3}{U}_1L)' - (\underset{3}{V}_1M)' - (\underset{3}{W}_1N)' - \ldots\ldots\ldots \\ & + (\underset{3}{U}_2L)'' + (\underset{3}{V}_2M)'' + (\underset{3}{W}_2N)'' + \ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{\nu}[(\underset{3}{U}_{\nu}L)^{(\nu)} + (\underset{3}{V}_{\nu}M)^{(\nu)} + (\underset{3}{W}_{\nu}N)^{(\nu)} + \ldots\ldots] \end{aligned} \tag{889}$$

Gelingt es, sie allgemein zu integriren, so erhält man Systeme von Werthen für $\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots$ und zwar $\lambda+\mu+\nu+\ldots\ldots=\sigma$ an der Zahl mit eben so vielen Integrationsconstanten. Von diesen Constanten nun macht man unter gleichzeitig passender Wahl der Integrationsgrenzen u', u'' Gebrauch, um die übrigen Bestandtheile der Gleichungspolynome (888), die, nach x geordnet gedacht, aus Gliedern $\lambda+\mu+\nu+\ldots\ldots=\sigma$ an der Zahl bestehen, und zwar Glied für Glied verschwinden zu machen. Diess wäre im Allgemeinen der Gang der Rechnung; es gibt jedoch specielle Fälle und namentlich der gleich im Anfange dieses Paragraphes berührten von geringen Ansteigungen mit gebrochener Repartitionszahl in den Anfangsgliedern der Differentialgleichungen, Fälle, in denen gerade das Integriren in Gestalt von bestimmten Integralen von besonderer Wichtigkeit ist, und wo man gar nicht nöthig hat, die allgemeinen Integrale der Hilfsgleichungen (889) wirklich zu ermitteln, wo es mitunter zureicht, ein einzelnes particuläres Integral, oder eine Gruppe von wenigen solchen für $L, M, N, \ldots$ aufzufinden, und wo aus diesem einzigen oder jener Gruppe die Genüge leistenden Werthe von $\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots$ entweder alle, oder doch mindestens ein grosser Theil derselben unmittelbar hervorgehen. Diess geschieht nämlich dann, wenn in den Hilfsgleichungen für $L, M, N, \ldots$ sehr bedeutende Ansteigungen in den Anfangscoefficienten vorkommen, welche bekanntlich die reciproken Werthe der Ansteigungen in den vorgelegten Differentialgleichungen sind, mithin in den Hilfsgleichungen r Einheiten betragen, wenn die vorgelegten Differentialgleichungen in $\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots$ die gebrochene Repartitionszahl $\frac{1}{r}$ wiesen. Hiemit ist nämlich jedesmal eine Gruppe von Werthen für $L, M, N, \ldots$ angedeutet, versehen mit einem gemeinschaftlichen exponentiellen Factor von der Form $e^{\int\varphi du}$, allwo φ eine Function der ersten Classe in u von der Ordnung r andeutet, so zwar, dass das absteigend geordnete φ mit einem Gliede au^r anfängt und die Functionen $L, M, N, \ldots\ldots$, zerlegt in ihre zwei Factoren, den der zweiten nämlich und den der ersten Classe angehörigen, aussehen, wie folgt:

$$
\begin{aligned}
L &= e^{\frac{au^{r+1}}{r+1}+\cdots\cdots}\,\mathfrak{L}\\
M &= e^{\frac{au^{r+1}}{r+1}+\cdots\cdots}\,\mathfrak{M}\\
N &= e^{\frac{au^{r+1}}{r+1}+\cdots\cdots}\,\mathfrak{N}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{890}
$$

Diese Werthe nun werden als particuläre Integrale die Hilfsgleichungen (889) identisch erfüllen und auch die übrigen Glieder der Substitutionsgleichungen (888) offenbar auf Null bringen, wenn man die Integrationsgrenzen u', u'' unter den Wurzeln der binomischen Gleichung wählt:

$$au^{r+1} = -\infty$$

Man wird aber auch zu diesen $r+1$ an der Zahl vorhandenen unendlichen Wurzeln noch einen anderen beliebigen Werth $u=h$ oder $u=0$ hinzufügen können im Einklange mit der beim Integriren einer einzigen Differentialgleichung an mehreren Orten dieses Werkes geübten Gepflogenheit, und wird dann die untere Grenze h oder 0 sein lassen, die obere hingegen unter den unendlichen Wurzeln der

obigen algebraischen Gleichung wählen. Hiemit wird man Ausdrücke bilden für ξ, η, ζ, ... $r+1$ an der Zahl, von denen zwar keiner die Eigenschaft eines particulären Integrales besitzt, die aber die Substitutionsgleichungen, wenn nicht auf Null, doch wenigstens auf einen und denselben Werth bringen. Fügt man nun einem jeden von ihnen noch eine willkürliche Constante als Factor hinzu und lässt die Summe aller dieser Constanten gleich Null sein, so wird die Summe aller so gewonnenen Werthsysteme von ξ, η, ζ, ... die Eigenschaft besitzen, die Differentialgleichungen identisch zu erfüllen und man wird entweder das allgemeine Integral, oder auch nur ein particuläres gewonnen haben, je nachdem $r = \sigma$ oder $r < \sigma$ ist.

Die Entwicklung der Hilfsgleichungen, die in der Regel nothwendig sein wird, bevor man zur Integration schreitet, kann man entweder durch directes Differenziren der darin enthaltenen Produkte, oder auch mit Hilfe der allgemeinen Formel (579) Seite 476 vornehmen, indem man erst die mit L, dann die mit M, sodann die mit N verbundenen Glieder mittelst derselben erledigt. Der nächste Rechnungsact ist dann die Abscheidung des exponentiellen Fatcors zweiter Classe von L, M, N, ... durch Transformation oder Einführung neuer abhängigen Veränderlichen anstatt L, M, N, ... Nachdem diese Abscheidung des Factors zweiter Classe gelungen ist, hat man noch die der ersten Classe angehörigen multiplicativen Bestandtheile $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, ... durch asymptotische Integration der so weit transformirten Hilfsgleichungen zu ermitteln; die sodann aus diesen Elementen zusammengesetzten ξ, η, ζ, ... mit einer oder mehreren hinzugefügten Beziehungsgleichungen zwischen den Integrationsconstanten schliessen den Rechnungsact ab.

VI. Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen.

§. 1.

Einleitung.

Es steht zu vermuthen, dass das bisher aufgeführte Lehrgebäude der linearen Differentialgleichungen die Erwartungen der Mehrzahl der Leser und namentlich derjenigen, die selbst bemüht waren, sich auf diesem Felde neue Wege zu eröffnen, getäuscht haben wird. Auch der Verfasser hat Anderes gewünscht und gehofft und wieder Anderes errungen. Der jugendliche Wunsch nach Genüge leistenden, wo möglich geschlossenen Formen, der nicht befriedigt werden konnte, musste am Ende der practischeren Tendenz Platz machen, die Sprache der Differentialgleichungen verstehen zu wollen. Nachdem hiezu durch eine neue Eintheilung der Functionen in Classen der Grund gelegt, und eine Formenlehre gebildet war, in deren Besitze der Mathematiker aus dem unmittelbaren Anblicke der Differentialgleichung oft schon mehr erschliesst, als der alte Analyst, wenn er schon integrirt hatte, zu sagen vermochte, trat uns nicht eine Form des Integrales, sondern eine Fülle von solchen, entsprechend den speciellen Werthen der constanten Parameter der Gleichung vor das Auge und die Integration verwandelte sich naturgemäss in eine Discussion aller dieser verschiedenen Formen, die das Integral in den zahlreichen verschiedenen Fällen anzunehmen vermag, die die wechselnde Beschaffenheit jener Parameter bietet und die sich oft bei der geringsten Veränderung an denselben, wie die Bilder eines Kaleidoskopes verdrängen können. Da sich nun solchergestalt das Integriren oft als ein mühsames, mit der wachsenden Anzahl der Parameter langwieriger werdendes Geschäft ausweist, sogar die verwandte Discussion der Curven höherer Ordnungen wegen des grösseren Reichthumes an Formen überbietend, so ist es für ihn auch ein ernstes Geschäft, zu welchem schon in der Regel Muth und Ausdauer gehört, und welches daher nicht leicht Jemand bloss zu seiner Unterhaltung an einer willkürlich hingestellten und complizirten Differentialgleichung vornehmen wird mit der wenig ermuthigenden Aussicht, um den Preis grosser Mühen die Masse überflüssigen Wissens zu vermehren. Diese Betrachtungen dringen uns die grosse Wahrheit auf, dass die Integration der linearen Differentialgleichungen, so wie überhaupt die formale mathematische Wissenschaft nicht Zweck sei, sondern Mittel zu einem höheren Zwecke, und dieser letztere ist hauptsächlich Studium der Natur. Die Mechanik also und die mathematische Physik sind die eigentlichen Tummelplätze des Analysten, und wenn in vergangenen Zeiten die Integration von Differentialgleichungen, wie die Ricati'sche, die Pfaff'sche, die Aufmerk-

samkeit der Gelehrten vielfach beschäftigen konnten, Gleichungen, die kein anderes Verdienst haben, als dass sie sich integriren lassen, so war diess in jenen Zeiten nur darum nicht zu tadeln, weil in solchen Bestrebungen der Keim liegen konnte zu einer allgemeinen und befriedigenden Theorie der Differentialgleichungen. Jetzt aber, wo man bereits eine solche hat, ziemt es dem mathematischen Wissenschaftsforscher, ein höheres Ziel anzustreben, und mit den neu gewonnenen Kräften der Analysis die Lösung der vielen mechanisch-physikalischen Probleme vorzunehmen, die man wegen des Mangels an zureichenden Integrationsmethoden entweder ganz aufzugeben, oder auf Unwegen zu bewerkstelligen genöthigt war.

Wiewohl es nicht im Zwecke dieses Werkes liegt, eine neue mathematische Physik, wenn auch nur theilweise zu construiren, so ist es doch nothwendig, hier aufmerksam zu machen auf die Natur der mechanisch-physikalischen Probleme im Allgemeinen, weil nur dadurch der Nutzen, den die Theorie der Differentialgleichungen bieten kann, klar an den Tag gelegt und über die Art und Weise ihrer Verwendung in umfassender Weise Aufschluss gewonnen werden kann. Es ist nichts geeigneter, dem nutzlosen Schwelgen in analytischen Formen Einhalt zu thun, als eine gründliche Bekanntschaft mit diesen Problemen, die erst recht eindringlich lehrt, was Noth thue, und eine jede Form nach ihrem wahren und auf den jedesmaligen Zweck richtig bezogenen Werth abschätzt. Wir schenken ihnen desshalb hier eine erhöhte Aufmerksamkeit, indem wir ihre Natur so gründlich zu erfassen suchen, als diess zu unserem Zwecke nöthig, und ohne viel in das Detail der Rechnungen einzugehen, möglich ist.

Die Probleme der Mechanik lassen sich alle auf ein Hauptproblem zurückführen, welches folgendermassen lautet: man soll die Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung irgend wie angeordneter und irgend wie auf einander wirkender materieller Massen angeben. In dieser Fassung begreift es in sich die ganze Mechanik des Himmels, Schwingungen elastischer Körper, die Theorie des Lichtes, der Electricität, des Magnetismus u. s. w. und es unterscheiden sich diese so viele verschiedene Namen habenden physikalischen Theorien nicht in ihrer inneren Natur, sondern nur in ihrer Auffassungsweise, die der Natur des menschlichen Geistes und seinem Fassungsvermögen angepasst ist. Es ist hier nothwendig, die verschiedenen Arten der Auffassung dieses Hauptproblemes so viel als möglich kurz und scharf zu kennzeichnen. Sie sind:

Erstens: Man kann zu wissen wünschen, welchen Platz eine jede der zum Systeme gehörigen materiellen Massen entweder beständig, oder nach einer bestimmten Zeit t einnehmen werde, je nachdem vom Gleichgewichte oder Bewegung die Rede ist. Dieser Ort im Raume erfordert für jede der Massen die Angabe von drei Coordinaten, die hier sämmtlich als Functionen von t aufgefasst werden, die mithin $3n$ an der Zahl vorhanden sind, wenn n die Anzahl der materiellen Massen andeutet, aus denen das System zusammengesetzt ist und wenn man auf die drehende Bewegung dieser Bestandtheile keine Rücksicht nimmt. Es sind hiezu $3n$ Gleichungen erforderlich, die schon desshalb Differentialgleichungen sind und zwar der zweiten Ordnung angehörig, weil der in ihnen erscheinende Ausdruck der Kraft, welche die wirkliche Bewegung des Punktes erzeugen kann, ein zweiter Differentialquotient der Coordinaten ist, nach der Zeit t gewonnen. Wünscht man auch die Gesetze der drehenden Bewegun-

gen kennen zu lernen, so geschieht diess durch Angabe von $6n$ Functionen von t vermittelst eben so vieler Gleichungen.

Die Aufstellung aller dieser Gleichungen bietet keine Schwierigkeit, allein man reicht damit auch nicht weit. Sie besagen so Viel und so sehr Verwickeltes, dass der menschliche Geist mit seinem beschränkten Fassungsvermögen nur eben eine geringe Anzahl allerdings sehr werthvoller und grosser Naturgesetze aus ihnen ableiten kann und zur Vervollständigung der Detailkenntniss genöthigt ist, den besonderen Weg, der so zu sagen zersetzenden Analysis einzuschlagen, der in der Natur durch die obwaltenden besonderen Umstände begünstigt ist. Unvermögend, die sehr complizirten Wirkungen sehr vieler Ursachen selbst dann zu überschauen, wenn sie ihm durch eine weitläufige mathematische Formel wirklich geboten werden, nimmt er eine Eintheilung der einen sowohl, wie auch der anderen seinen Bedürfnissen gemäss in Sorten und Ordnungen vor und frägt z. B.: wenn es nur zwei Himmelskörper gäbe, einen grossen und einen kleinen, welche krumme Linie würde dann einer um den anderen beschreiben. Gelangt er auf diese Weise zur elliptischen Bewegung als erster Approximation und Hauptwirkung, so fasst er dann die Wirkungen der übrigen Anziehungen als Störungen auf, die nichts weiter zur Folge haben, als eine allmäliche Aenderung der Form und Lage dieser Curve oder der sogenannten elliptischen Elemente. Diese Aenderungen nennt er theilweise eine seculäre oder periodische, fasst sie aber immer als sehr klein auf, vernachlässigt somit die höheren Potenzen und gelangt so nothwendig zu Differentialgleichungen von linearer Form, hier erst der Theorie dieser analytischen Gebilde einen passenden Angriffspunkt bietend. Diese Gleichungen sind gewöhnliche oder sogenannte totale Differentialgleichungen von der Art der in diesem Werke abgehandelten. Diese wäre also die erste Art, wie man bei mechanischen Problemen zu linearen Differentialgleichungen geführt wird. In der Mechanik des Himmels findet sich ihr grosses Muster, und da diess eine beinahe abgeschlossene Wissenschaft ist, so lässt sich auch hier darüber nicht viel erheblich Neues sagen.

Zweitens: Hat man ein System materieller Theilchen von im Zustande des Gleichgewichtes regelmässiger Anordnung, etwa einen festen oder flüssigen Körper von bestimmter innerer Textur, so thut man besser, nicht zu fragen nach den von einzelnen Punkten durchmessenen Curven, sondern wie folgt: Welche ist die Bewegungsweise, die sich nicht an ein bestimmtes Theilchen, sondern an einen bestimmten Punkt des Raumes knüpft, oder mathematisch gesprochen: Welche Bewegung nimmt das Theilchen an, das sich im Zustande des Gleichgewichtes im Punkte des Raumes x, y, z befinden würde. Die Componenten seiner Bewegung werden mithin nicht mehr aufgefasst als reine Functionen der Zeit, sie enthalten vielmehr im Allgemeinen vier Variable, nämlich x, y, z, t; die Bewegungsgleichungen schliessen in sich Differentialquotienten nach t als Ausdrücke der die Bewegung zu erzeugen fähigen Kräfte und Differentialquotienten nach den Coordinaten, als gehörig zum analytischen Ausdruck der Wirkungen der Nachbartheilchen, die sich, von allen Seiten und nach allen Richtungen stattfindend, nothwendig theilweise gegenseitig aufheben, mithin als Gesammtwirkung nur in Differenzform, oder was dasselbe ist, in Gestalt eines Differentiales erscheinen können. Die Differentialgleichungen der Bewegungen sind also partielle mit höchstens vier unabhängigen Veränderlichen, was einer-

seits das Problem verwickelt; andererseits aber hat man den Vortheil, dass man unabhängig wird von der Anzahl der Punkte des Systemes, und nur drei Differentialgleichungen der progressiven Bewegung zu integriren hat und höchstens noch drei andere der drehenden, weil ja der Punkt x, y, z jeder beliebige des Systemes sein kann. Diess alles ist der Fall, wenn das System eine Ausdehnung nach drei Dimensionen im Raume hat. Sind jedoch sämmtliche materielle Massentheilchen längs einer geraden oder krummen Linie angeordnet, so hat man nur eine einzige Coordinate als zweite nebst der Zeit t auftretende unabhängige Veränderliche in den partiellen Differentialgleichungen der Bewegung, und eben so treten bei längs einer Ebene oder krummen Fläche ausgedehnten materiellen Systemen der unabhängigen Veränderlichen drei auf, nämlich zwei Coordinaten und die Zeit. Die abhängigen Veränderlichen sind hier ihrer Zahl nach abhängig von der Beschaffenheit des Systemes und in linearer Form, wenn die Voraussetzung zu Grunde gelegt wird, dass jeder materielle Massenbestandtheil sich im Zustande der Bewegung nur sehr wenig von seiner Ruhelage entferne, also um dieselbe nur Schwingungen von sehr geringen Amplituden ausführe. Diese Anschauungsweise passt aber nur auf Systeme regelmässig angeordneter, im stabilen Gleichgewichte sich befindender Massentheilchen, ist aber dennoch, wiewohl sie vorzugsweise den festen elastischen Körpern angehört, auch bei flüssigen elastischen Körpern anwendbar, insoferne diese ebenfalls als Systeme betrachtet werden können, im stabilen Gleichgewichte, wenn auch der Grad der Stabilität ein sehr geringer ist, weil man ja die Schwingungen eines solchen Systemes dermassen klein annehmen und die Kräfte, durch die sie hervorgebracht und unterhalten werden, dermassen gering voraussetzen kann, dass sich der flüssige Körper unter solchen Umständen wie ein fester elastischer benimmt.

Drittens: Handelt es sich bei flüssigen Massen um heftigere Bewegungen, bei welchen es bereits nothwendig ist, das System von materiellen Theilchen als ein im Zustande des labilen Gleichgewichtes befindliches anzusehen, so tritt eine dritte Behandlungsweise solcher Bewegungsprobleme auf, die von den zwei früher erwähnten wieder wesentlich verschieden ist. Sehr geringe Kräfte, ja oft die unbedeutendsten Umstände, die keine Kräfte sind, reichen hier hin, um die Umstände der Bewegung sehr wesentlich zu verändern. Gewiss muss es jemals geschienen haben, dass sich dieser Gegenstand in seiner Regellosigkeit der mathematischen Analysis schwerlich werde unterwerfen lassen. Dem forschenden Menschengeiste ist es gleichwohl gelungen, diese Schwierigkeiten zu umgehen, indem er das Regelmässige in der Regellosigkeit der Erscheinungen herausgehoben und seinen Rechnungen zu Grunde gelegt hat, die flüssigen Körper als stetige Systeme betrachtend, welche die Eigenschaft besitzen, den inneren Druck nach allen Seiten gleich zu vertheilen und auf eine jede Ebene senkrecht zu gestalten. Diese Grundansicht nöthigt nun weiter den Analysten mit Ausserachtlassung der Geschichte eines jeden einzelnen Theilchens, nur den Vorgang an einem bestimmten Orte ins Auge zu fassen und nach dem alldort vorhandenen Druck, Dichte, Bewegungsintensität und Richtung zu fragen. Er gelangt dadurch zu Differentialgleichungen, die zwar ursprünglich die lineare Form nicht besitzen, die jedoch auf dieselbe in zahlreichen Fällen undulatorischer und strömender Bewegung zurückgeführt zu werden vermögen.

Diese dritte nun und mehr noch die früher erwähnte zweite Art, in der Mechanik zu un-
…erentialgleichungen zu gelangen, sind es, die unser Interesse darum vorzugsweise in Anspruch neh-
…n, weil gerade hier noch viel zu leisten ist für die Theorie der linearen Differentialgleichungen.
… genügt aber nicht, das Instrument bloss zu besitzen, man muss auch wissen, wo und wie es an-
…uwenden ist und je complizirter und kunstvoller das Werkzeug, desto nothwendiger wird die Ausein-
…andersetzung der wissenschaftlichen Principien seiner Handhabung, sonst liegt die Gefahr nahe, dass
man erklärt, unsere Vorgänger haben es nicht gebraucht, folglich braucht man es überhaupt nicht. Einem
ähnlichen Urtheile kann man gründlich nur dadurch begegnen, dass man erklärt: Unsere Vorfahren
konnten es nicht gebrauchen, weil sie es nicht hatten; hätten sie es aber gehabt, so würden sie auch
davon Gebrauch gemacht haben und zwar auf folgende Weise.

Es ist mithin von Wichtigkeit, die verschiedenen Formen der partiellen Differentialgleichun-
gen vorzunehmen, die im Gebiete der Physik und Mechanik integrirt worden sind, die hiezu verwen-
deten Methoden mit kritischem Blicke zu prüfen, ihre mangelhaften Seiten hervorzuheben und darzu-
thun, welchen besonderen Nutzen die in diesem Werke entwickelte Theorie der linearen Differentia…
gleichungen selbst auf diese allereinfachsten der Differentialgleichungen, die dieser Theorie allerdi…
nicht nothwendig bedürfen, gehabt haben würden. Die bekanntesten sind:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2} \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -b^2 \frac{d^4y}{dx^4} \tag{2}$$

$$\frac{d\varepsilon^2}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2}\right) \tag{3}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -b^2 \left(\frac{d^4\varepsilon}{dx^4} + 2\frac{d^4\varepsilon}{dx^2dy^2} + \frac{d^4\varepsilon}{dy^4}\right) \tag{4}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dz^2}\right) \tag{5}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dz^2}\right) \tag{6}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a^2 \left[3\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dy^2} + \frac{d^2\varepsilon}{dz^2} + 2\frac{d^2\eta}{dxdy} + 2\frac{d^2\zeta}{dxdz}\right]$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = a^2 \left[\frac{d^2\eta}{dx^2} + 3\frac{d^2\eta}{dy^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2} + 2\frac{d^2\zeta}{dydz} + 2\frac{d^2\varepsilon}{dxdy}\right] \tag{7}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = a^2 \left[\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + 3\frac{d^2\zeta}{dz^2} + 2\frac{d^2\varepsilon}{dxdz} + 2\frac{d^2\eta}{dydz}\right]$$

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}$$

$$\ldots \frac{dw}{} \ldots u\frac{dw}{} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}$$

Von ihnen enthält die erste die Gesetze der Schwingungen gespannter Saiten und auch die Fortpflanzung des Schalles in einem Rohre. Die zweite ist aufgestellt für die Schwingungen eines elastischen Stabes. Die dritte gilt für schwingende Membranen; die vierte für elastische Platten; die fünfte enthält die Theorie des Schalles; die sechste jene der Wärme und das System der drei folgenden ist für elastische Körper sowohl, wie auch für die Lichttheorie aufgestellt; die drei letzten endlich gehören einer flüssigen Masse als Systeme im labilen Gleichgewichte an. Sie sind alle versehen mit constanten Coefficienten und ein grosser Theil von ihnen ist noch überdiess homogen. Sie scheinen zum grössten Theil durch die älteren Methoden, die man für solche Gleichungen besitzt, integrabel und der neueren, die auf variable Coefficienten Bezug nehmen, gar nicht bedürftig. Ein etwas tieferes Eingehen in die Natur der Sache wird uns aber vom Gegentheile belehren, vorderhand aber soll in Bezug auf diese Gleichungen nur Folgendes bemerkt werden:

Die (1) setzt eine allenthalben gleich-dicke Saite voraus ohne Gewicht, welche daher in einer jeden Lage vollkommen geradlinig gedehnt und auch in allen ihren Punkten einerlei Spannung unterworfen ist. Wird jedoch auf das Gewicht der Saite Rücksicht genommen, so geht sie allsogleich in eine andere mit variablen Coefficienten über, und verwandelt sich in:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \left(x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\right) \tag{9}$$

wenn von einem vertical gespannten Seile oder einer Kette mit Rücksicht auf das Gewicht derselben die Rede ist. Ebenso verhält es sich mit der Mehrzahl der übrigen Gleichungen auch. Sie setzen alle geradlinige oder ebene Systeme materieller Punkte voraus von allerwärts gleicher Dichte und Vertheilung und auch von gleicher Spannung oder Druck in allen Punkten, mithin einen imaginären Zustand, der nirgends in der Natur anzutreffen ist. Es soll hiemit durchaus kein Tadel dieser Gleichungen oder der Analysis, die dazu geführt hat, ausgesprochen sein; es ist vielmehr rationell, im Bereiche der mathematischen Wissenschaftsforschung, sich vor allem den einfachsten, aller variablen Nebenumstände möglichst entkleideten Fall vorzulegen und gründlich zu erledigen, sodann aber zur Erörterung der selten fehlenden Nebenumstände und Nebenwirkungen zu schreiten, die man dann als Störungen aufzufassen das Recht hat. Das Erstere ist nun geschehen, hätte aber weit klarer und eleganter geschehen können, wenn man Integrationsmethoden für Gleichungen mit veränderlichen Coefficienten besessen hätte, das zweite aber überstieg bisher die Kräfte der vorhandenen Analysis.

Da sich ohne eine, wenn auch nur oberflächliche Auseinandersetzung der älteren Integrationsmethoden nicht gut die Lücken erkennen lassen, welche übrig geblieben sind und durch unsere neueren Methoden ausgefüllt werden können, und weil zu diesem Zwecke das einfachste Beispiel nicht bloss genügt, sondern eben wegen seiner Einfachheit auch das geeignetste ist; so nehmen wir die Differentialgleichung für die Schwingungen gespannter Saiten vor und integriren sie nach den bisher in Anwendung gebrachten Hauptmethoden, zugleich zwischen denselben vom Standpunkte der entwickelten Wissenschaft aus Parallelen ziehend, um zu sehen, welche derselben zur weiteren Fortbildung für

unsere Zwecke die fähigste und würdigste sei. Besonders elegant integrirt sich zuvörderst diese Differentialgleichung durch willkürliche Functionen. Man setzt nämlich:

$$y = f(x + \alpha t) \tag{10}$$

voraus, und gewinnt durch Substitution dieses Werthes in die Differentialgleichung (1) allsogleich:

$$\alpha^2 = a^2 \quad \text{mithin} \quad \alpha = \pm a$$

woraus sich das allgemeine Integral als Aggregat von zwei Functionen willkürlicher Form ableiten lässt, also:

$$y = f(x + at) + F(x - at) \tag{11}$$

Könnte man eine jede partielle Differentialgleichung eben so leicht integriren, so brauchte man allerdings gar keine Theorie und hätte nicht bloss die Auflösung der gestellten Aufgabe in sehr bequemer analytischer Form, sondern zugleich auch die Auflösung unzählig vieler anderer Probleme errungen, die zu derselben Differentialgleichung führen und vielleicht nicht einmal Schwingungsprobleme sind; denn es liegt auf der Hand, dass vermöge der Willkürlichkeit der Functionen f und F auch Ausdrücke, wie: $Ax + Bt$, oder $Ax + Bt + Cxt$ und unzählige andere dieser Art, in welchen A, B, C willkürliche Constante sind, die Eigenschaft haben, die Differentialgleichung zu erfüllen, ohne einen Schwingungszustand darzustellen. Noch mehr bestochen wird dann das jugendliche Gemüth von der Leichtigkeit, mit der dieser Ausdruck den Bedingungen an den Grenzen des Systemes, d. h. an den beiden Befestigungspunkten der Saite durch die Erklärung der periodischen Beschaffenheit des f und F Genüge leistet und endlich durch die Bereitwilligkeit in die Bedingungen des ursprünglichen Erregungszustandes einzugehen. Der erfahrene Analyst jedoch, der sich viele Jahre hindurch mit Differentialgleichungen beschäftigt hat, und dem unzählige Male die Regel eingeprägt worden ist, dass man die Analysis nie um zu viel auf einmal und wo möglich nur um Eines fragen dürfe, wenn man die Antwort darauf verstehen will, sieht in diesem Verfahren einen mathematischen Formfehler, der eben darin besteht, dass man nach Allem auf Einmal frägt, und der sich im gegenwärtigen Falle nur darum nicht rächt, weil die Antwort auf die gestellte Frage eine äusserst einfache ist. In allen anderen nur etwas complizirteren Fällen verweigert die Analysis die Antwort auf solche Fragen entweder ganz und gar, oder diese Antwort ist dem Fragenden unverständlich. Es muss wohl zugegeben werden, dass die Gleichung (1) nicht die einzige sei, die durch den Kunstgriff der Substitution (10) integrirt werden kann. Alle homogenen linearen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen x und t weichen diesem Verfahren. In der That, wenn:

$$A_0 \frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^n y}{dt^{n-1} dx} + A_2 \frac{d^n y}{dt^{n-2} dx^2} + \ldots\ldots + A_n \frac{d^n y}{dx^n} = 0 \tag{12}$$

vorliegt, wird man vermittelst derselben Substitution die algebraische Gleichung:

$$A_0 \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + \ldots\ldots + A_n = 0 \tag{13}$$

gewinnen, welche in der Regel n verschiedene Wurzeln: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$ darbietet und das folgende allgemeine Integral:

$$y = F_1(x + \alpha_1 t) + F_2(x + \alpha_2 t) + F_3(x + \alpha_3 t) + \ldots\ldots + F_n(x + \alpha_n t) \qquad (14)$$

liefert. Es lässt sich auch allgemein nachweisen, dass nichthomogene lineare Differentialgleichungen zwischen einer abhängigen und zwei unabhängigen Veränderlichen als Integral ein Aggregat so vieler willkürlicher Functionen bestimmter Grundgrössen liefern, als ihre Ordnungszahl Einheiten enthält. Gleichwohl ist dieses Verfahren bei keiner der folgenden hier aufgezählten Differentialgleichungen von Nutzen und schon die zweite muss nach einer anderen Methode behandelt werden, die den Gesetzen der mathematischen Wissenschaftsforschung besser entspricht und die wir hier ebenfalls auseinandersetzen wollen, der Einfachheit und Klarheit wegen jedoch wieder in Anwendung auf die erste und zwar speciell mit Rücksicht auf die Schwingungen gespannter Saiten.

Einen Schwingungszustand im Auge behaltend, stellt man vor allem andern die sehr specielle Frage an die Differentialgleichung, ob ein solcher, mithin in der Zeit t periodischer Zustand möglich sei, indem man

$$y = X \; Sin \; \alpha t \quad \text{oder} \quad y = X \; Cos \; \alpha t \qquad (15)$$

statuirt. Hiemit schliesst man im Vorhinein alle diejenigen Werthe aus, die die partiellen Differentialgleichungen zwar erfüllen und die Auflösung sehr vieler anderer Aufgaben bilden, welche zu dieser Differentialgleichung führen, aber keinen Schwingungszustand darstellen können. Die Antwort ist für beide Substitutionen in der einzigen Gleichung:

$$a^2 \frac{d^2X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0 \qquad (16)$$

enthalten. Mithin leistet ein jedes y von der folgenden Form der Differentialgleichung Genüge:

$$y = X \,(A \; Cos \; \alpha t + B \; Sin \; \alpha t) \qquad (17)$$

wenn X ein Integral ist der gewöhnlichen Differentialgleichung (16) mit constanten Coefficienten, d. h. wenn

$$X = G \; Cos \frac{\alpha x}{a} + H \; Sin \frac{\alpha x}{a} \qquad (18)$$

wird, allwo A, B, G, H und auch α vorderhand noch unbestimmte Constanten andeuten. Man hat mithin:

$$y = \left[G \; Cos \frac{\alpha x}{a} + H \; Sin \frac{\alpha x}{a}\right] \left[A \; Cos \; \alpha t + B \; Sin \; \alpha t\right] \qquad (19)$$

und in dieser Gleichung liegt die vollständige Antwort auf die gestellte Frage nach einem Schwingungszustande, der, wie man aus ihr ersieht, ein vollkommen periodischer nach t sowohl, wie auch nach x und wegen der darin enthaltenen Constanten: A, B, G, H und α unendlich vieler verschiedener Modificationen fähig ist.

Nun frägt aber die Methode weiter: Was ist der Einfluss der Bewegung eines solchen Systemes von materiellen Punkten. Die Saite ist nämlich nicht unendlich lang, sondern reicht nur von $x = 0$ bis $x = l$ und ihre beiden Endpunkte sind fest, vermögen mithin weder eine Verschiebung y noch eine Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ anzunehmen. Die Antwort erfolgt, dass auch diesen Bedingungen für beliebige t der Ausdruck für y sich füge, wenn nur die Constanten G, H und α schicklich gewählt werden. Es muss nämlich $G = 0$ und α gleich einer Wurzel erkiesen werden der einfachen transcendenten Gleichung:

$$Sin\,\frac{\alpha l}{a} = 0 \tag{20}$$

Diese aber sind enthalten in folgender Reihe:

$$\alpha = 0,\ \frac{a\pi}{l},\ \frac{2a\pi}{l},\ \frac{3a\pi}{l},\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{ra\pi}{l} \tag{21}$$

geben mithin mehrere Ausdrücke für y, von welchen der erste der Nulle gleich ist, was zwar einen Genüge leistenden Werth, aber keinen Schwingungszustand, mithin nichts zur Sache Gehöriges gibt. Die übrigen enthalten die unendlich vielen einfachen Schwingungsweisen des Systemes und die Art ihres Bestehens in der Zeit. Diese unendlich vielen einfachen Ausdrücke für y lassen sich dann noch vermöge der linearen Form der Differentialgleichungen mit willkürlichen Constanten multipliziren und addiren. Die Summe ist wieder ein zulässiger Werth von y, nämlich:

$$y = \mathrm{S}\left\{Sin\,\frac{r\pi x}{l}\left[A_r\,Cos\,\frac{ra\pi t}{l} + B_r\,Sin\,\frac{ra\pi t}{l}\right]\right\} \tag{22}$$

Endlich stellt die Methode die Frage: Welcher ist der Einfluss der anfänglichen Erregung, durch die die Saite in Schwingungen versetzt wird? Um diese zu characterisiren, nimmt man an, dass im Augenblicke $t = 0$, $y = f(x)$ und $\frac{dy}{dt} = F(x)$ gewesen sei, d. h. dass die Saite eine bestimmte gegebene Form und eine bestimmte Geschwindigkeit ihrer einzelnen Theile in diesem Zeitmomente besessen habe. Diess bestimmt die Werthe der Constanten A und B, die sich annoch in y vorfinden, und die man, um diesen anfänglichen Bedingungen Genüge zu leisten, so wählen muss, dass

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{S}\left[A_r\,Sin\,\frac{r\pi x}{l}\right] = A_1\,Sin\,\frac{\pi x}{l} + A_2\,Sin\,\frac{2\pi x}{l} + A_3\,Sin\,\frac{3\pi x}{l} + \ldots\ldots\ldots \\ F(x) &= \mathrm{S}\left[\frac{ra\pi}{l}\,B_r\,Sin\,\frac{r\pi x}{l}\right] + \frac{a\pi}{l}\left[B_1\,Sin\,\frac{\pi x}{l} + 2B_2\,Sin\,\frac{2\pi x}{l} + 3B_3\,Sin\,\frac{3\pi x}{l} + \ldots\ldots\ldots\right] \end{aligned} \tag{23}$$

wird. Um diesen beiden Gleichungen die Werthe der Constanten A_1, A_2, A_3, ... wie der B_1, B_2, B_3, ... zu entringen, sucht man sie durch ein Verfahren, welches sich allgemein anwendbar herausgestellt hat, zu isoliren. Man multiplizirt nämlich beide Theile der Gleichung mit einer gewissen Differentialfunction $\varphi(x)\,dx$ und integrirt dann zwischen den Grenzen 0 und l, die zugleich die Grenzen des linearen Systemes sind, und sucht hiebei die Function φ so zu wählen, dass in dem zweiten Theile der Gleichung das Integrationsresultat bei allen Gliedern mit Ausnahme eines einzigen der Nulle

gleich wird. Diese Function φ ist hier leicht gefunden. Sie ist nämlich $Sin\,\frac{r\pi x}{l}$ selber, wenn man A_r oder B_r haben will, weil sich sehr leicht beweisen lässt, dass so lange r und s zwei von einander verschiedene ganze Zahlen sind:

$$\int_0^l Sin\,\frac{r\pi x}{l}\,Sin\,\frac{s\pi x}{l}\,dx = 0 \tag{24}$$

ausfalle und nur für $r = s$ besteht:

$$\int_0^l Sin^2\,\frac{r\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2} \tag{25}$$

Daher allgemein:

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,Sin\,\frac{r\pi x}{l}\,dx \\ B_r &= \frac{ra\pi}{2}\int_0^l F(x)\,Sin\,\frac{r\pi x}{l}\,dx \end{aligned} \tag{26}$$

erhalten wird, und hiemit ist die Theorie der Schwingungen gespannter Saiten, insoferne sie aus der ersten der partiellen Differentialgleichungen (1) abgeleitet zu werden vermag, vollständig erledigt.

Diese Methode ist es nun, die man als die ausbildungsfähigste und von demselben Geiste durchwehte zu betrachten hat, der die Entstehung dieses Werkes ermöglichte, dem Geiste der stufenweise vorgehenden klaren und besonnenen Forschung. Sie frägt nie mehr, als Einerlei auf Einmal und ordnet die Fragen zudem nach der ihnen zukommenden Wichtigkeit und zwar erstens nach dem Bestehen eines periodischen oder undulatorischen Zustandes im unbegrenzten Systeme und seinen Gesetzen, zweitens nach dem Einflusse der Bewegung, oder mit anderen Worten nach den Gesetzen der Reflexion der schwingenden Bewegung und endlich drittens nach dem Einfluss der irgendwie gearteten anfänglichen Erregung und es ist offenbar, dass, wenn man auch nicht alle drei, sondern nur zwei oder auch nur eine einzige dieser Fragen beantwortet erhält, die Ausbeute jedenfalls eine lohnende genannt werden kann, während demjenigen, der nach allem auf Einmal frägt, gewöhnlich gar keine oder wenigstens eine solche Antwort zu Theil wird, die er nicht versteht. Ihrer Ausbildung ist hier eine besondere Sorgfalt gewidmet, man sieht sich jedoch genöthigt, um in demselben Geiste fortzuschreiten, in verwickelteren Fällen die Anzahl der an die Analysis zu stellenden Fragen zu vermehren. Die Veranlassung dazu soll im Folgenden zur Sprache kommen.

Nebst den zwei hier in dem einfachen Beispiele der Schwingungen gespannter Saiten erörterten Behandlungsweisen der Undulationsprobleme sind wohl noch andere vorhanden, die aber von den zweien nicht wesentlich abweichen; so ist das oft geübte Integriren linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten vermittelst der Fourier'schen Formel nichts, als eine Integration vermittelst willkürlicher Functionen bestimmter Grundgrössen, und führt desshalb auch alle Nachtheile im Gefolge,

die mit einer Methode verbunden sind, welche nach Allem auf Einmal ... werden soll.

Das Integriren durch willkürliche Functionen bestimmter Grundgrössen ist bei den meisten der angeführten partiellen Differentialgleichungen und namentlich bei den (3), (5), (7) den homogenen nämlich unter ihnen der Einfachheit wegen gerne geübt worden. In der That lässt sich die (3) dadurch unmittelbar zur Integration bringen, dass man

$$\xi = f(\alpha x + \beta y - st) \tag{27}$$

voraussetzt. Das Substitutionsresultat ist:

$$s^2 = a^2 (\alpha^2 + \beta^2) \tag{28}$$

woraus ein zweiwerthiges s, nämlich:

$$s = \pm a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{29}$$

folgt, und ein allgemeines Integral mit zwei willkürlichen Functionen hervorgeht, nämlich:

$$\xi = f(\alpha x + \beta y - at\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) + F(\alpha x + \beta y + at\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \tag{30}$$

allein man hat schon hier die Wahl zwischen unendlich vielen Grundgrössen, die der Willkürlichkeit von α und β entkeimen, und weil $\alpha x + \beta y \mp at\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0$ die Gleichung ist einer geraden Linie in der Ebene zwischen x, y, die parallel zu sich selbst nach zwei entgegengesetzten Richtungen und mit der Geschwindigkeit $a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ im Raume fortschreitet, so spricht das so erhaltene Integral offenbar von längs einer unendlichen geraden Linie stattfindenden, an derselben überall gleich intensiven Bewegungen, d. h. geradlinigen unendlichen Wellen, die in der Natur nirgends vorhanden sind. Diese Betrachtung eines hypothetischen Zustandes kann zwar nicht getadelt werden, weil, wie gesagt, auch alle hier aufgezählten partiellen Differentialgleichungen von der Voraussetzung eines hypothetischen Zustandes ausgehen, was gerade nothwendig ist, wenn man zu den reinen Wirkungen möglichst isolirter Ursachen gelangen will; aber die Forschung kann hiemit nicht als abgeschlossen angesehen werden, denn es lässt sich schon aus einem sehr populären Grunde nachweisen, dass die Differentialgleichung für Schwingungen gespannter Membranen, von der hier die Rede ist, auch noch andere Integrale zulassen müsse, mit Functionen anderer, als linearer Grundgrössen und namentlich mit Functionen des Ausdruckes $x^2 + y^2$. Diess folgt nämlich schon daraus, weil in einem Systeme von materiellen Punkten von überall gleicher Dichte und Spannung und gleicher Elasticität nach allen Seiten jede in irgend einem Punkte erregte schwingende Bewegung sich nothwendig auf gleiche Weise und mit derselben Geschwindigkeit nach allen Richtungen fortpflanzen muss. Diess gibt hier den Kreis als natürliche Wellenform, die offenbar zugleich diejenige ist, welche den treuesten Ausdruck der Erscheinungen enthalten muss; wenn man aber nach ihr frägt, so verschwindet die lineare Gleichung mit constanten Coefficien-... der Character der Homogenität geht verloren und man erhält als Antwort zunächst eine ... Coefficienten. Mithin wird man zu Differentialgleichungen dieser Art

nämlich mit veränderlichen Coefficienten auch noch dadurch geführt, dass man sich auf analytischem Wege nach den Grundgrössen erkundigt derjenigen Functionen, die im Integrale erscheinen können, wenn dieses den naturgemässesten Ausdruck der Erscheinungen in sich enthalten soll, oder mit anderen Worten, man erhält Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, wenn man nach der Wellenlinie oder nach der Wellenfläche frägt.

Die Sache verhält sich nicht anders, wenn anstatt einer einzigen Partialgleichung ein System von mehreren mit mehreren abhängigen Veränderlichen vorliegt, z. B. das (7). Vermöge der homogenen Beschaffenheit lassen sich nämlich auch hier zusammenhängende Integralwerthe für ξ, η, ζ denken als Functionen linearer Grundgrössen, und man bekömmt:

$$\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{A} f(\alpha x + \beta y + \gamma z - st) \\ \eta &= \mathfrak{B} f(\alpha x + \beta y + \gamma z - st) \\ \zeta &= \mathfrak{C} f(\alpha x + \beta y + \gamma z - st) \end{aligned} \tag{31}$$

substituirend, das folgende Resultat:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} s^2 &= a^2 \left[\mathfrak{A}(3\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\mathfrak{B}\alpha\beta + 2\mathfrak{C}\alpha\gamma\right] \\ \mathfrak{B} s^2 &= a^2 \left[\mathfrak{B}(\alpha^2 + 3\beta^2 + \gamma^2) + 2\mathfrak{C}\beta\gamma + 2\mathfrak{A}\alpha\beta\right] \\ \mathfrak{C} s^2 &= a^2 \left[\mathfrak{C}(\alpha^2 + \beta^2 + 3\gamma^2) + 2\mathfrak{A}\alpha\gamma + 2\mathfrak{B}\beta\gamma\right] \end{aligned} \tag{32}$$

Es beweist diess die Möglichkeit, den Gleichungen durch willkürliche Functionen linearer Grundgrössen zu genügen. Da aber

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - st = 0 \tag{33}$$

die Gleichung einer Ebene ist, die sich parallel zu sich selber im Raume mit dem Wachsen der Zeit t fortbewegt; so erhält man hier nichts als die Fortpflanzungsgesetze solcher hypothetischer, in der Natur nirgends vorhandener unendlicher ebenen Wellen, denn diese würden nur da sein, wenn sich irgendwo eine leuchtende Ebene von unendlicher Ausdehnung im Raume befände. Gleichwohl ist auch hier nicht zu übersehen, dass der Natur der Sache nach in einem Mittel von gleicher Beschaffenheit in allen Punkten und von gleicher Elasticität nach allen Seiten die Kugelform die natürliche Form der Wellenfläche sei. Mithin hätte man, um zu einem practisch brauchbaren Integrale zu gelangen, lieber durch Functionen der Grundgrösse: $x^2 + y^2 + z^2$ integriren sollen. Man vermag diess auch und zwar durch schicklich gestellte analytische Anfragen auf mehrere verschiedene Arten, aber jedesmal gehen die Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten in solche mit veränderlichen über, und man sieht sich genöthigt, zu den Methoden seine Zuflucht zu nehmen, die in diesem Werke auseinandergesetzt sind.

Die eingeleitete Integration durch Functionen linearer Grundgrössen ist aber desshalb nicht ohne Nutzen, denn sie lehrt z. B. schon unter Voraussetzung des speciellen Falles $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$ die aber die Allgemeinheit der Untersuchung keineswegs beschränkt, dass man auf zwei verschiedene Arten Genüge leisten könne, einmal nämlich dadurch, dass man:

$$s = \mp a, \; \mathfrak{A} = 0 \tag{34}$$

𝔅 und ℭ willkürlich, das andere Mal dadurch, dass man:

(35) $$s = \pm a\sqrt{3},\ \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$$

und 𝔄 willkürlich nimmt. Die erste Auflösung entspricht einer schwingenden Bewegung, die ihrer Richtung nach in der Wellenebene enthalten ist, die zweite einer darauf senkrechten. Ihnen entsprechen verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten: die der transversalen Welle eigene ist nämlich a, die der longitudinalen zukommende ist $a\sqrt{3}$. Das Experiment weiss nun freilich Nichts von dieser letzteren und macht hiemit den Argwohn rege, als wären die Differentialgleichungen (7) mindestens diejenigen nicht, welche den analytischen Ausdruck der Lichterscheinung enthalten. Darauf kommt indessen hier Nichts an, da hier nicht der Zweck verfolgt wird, eine neue Undulationslehre aufzustellen, sondern nur ein passendes Integrationsverfahren für Schwingungsprobleme zu begründen.

Poisson hat den ebenen Wellen Cauchy's den Vorwurf gemacht, sie seien unpractisch und in der Natur nirgends zu finden. Diesem Vorwurfe zu entgehen, hat dieser grosse Mathematiker die Fourier'sche Formel zur Integration seiner Differentialgleichungen verwendet und es liegt wirklich in dieser Formel der Beweis, dass man sich eine jede beliebige Bewegungsweise als aus lauter ebenen Wellen zusammengesetzt denken kann, in deren jeder die stattfindende Bewegungsintensität unendlich klein ist. Allein es erscheinen in Cauchy's Theorie die mit der Fourier'schen Formel gewonnenen Werthe von ξ, η, ζ ursprünglich als sechsfache bestimmte Integrale, die sich dann allgemein auf vierfache und in einem homogenen Mittel von gleicher Elasticität nach allen Seiten speciell auf bestimmte Integrale mit doppeltem Integralzeichen zurückführen lassen. Alle diese Ausdrücke aber sind dermassen undurchsichtig, dass ihnen in Bezug auf Erklärung und Angabe des Verlaufes der Lichterscheinungen beinahe gar Nichts zu entnehmen ist. Diess ist aber auch ganz natürlich. Mit der Fourier'schen Formel integriren nämlich heisst, diess mit willkürlichen Functionen thun und diess heisst wieder nichts anderes, als nach allem und jedem auf Einmal fragen: nach allen möglichen Gestalten der Wellenfläche, nach den von Punkt zu Punkt veränderlichen Schwingungsintensitäten in derselben u. s. w. Es ist mithin kein Wunder, wenn auf alles zusammen geantwortet wird mit einer der Frage entsprechenden Unbestimmtheit und in einer Weise, die beinahe gar keiner Antwort äquivalent ist.

Um nun diejenigen Aufschlüsse, welche die allgemeinen Integralformeln zu geben verweigerten, auf einem anderen Wege zu erringen, hat Cauchy die Wellenfläche betrachtet als das Resultat der Uebereinanderlagerung unzähliger, in den verschiedensten Richtungen sich kreuzender und für $t = 0$ durch den Anfangspunkt der Coordinaten geführter Wellensysteme. Dass man diess thun dürfe, beweist ja eben, wie schon gesagt, die Fourier'sche Formel. Diejenige krumme Fläche nun, welche alle diese ebenen Wellen am Ende der Zeit t berührt, oder, wie man zu sagen pflegt, die Einhüllende derselben ist die Wellenfläche. Auf diese Weise aber wird ein mechanisches Problem übertragen auf den Boden der Geometrie und die nächste Folge davon ist der Verlust aller mechanischen Errungenschaften. Man lernt nämlich nur eben die Gleichung der Wellenfläche kennen. Von Schwingungsrichtung und Intensität in den verschiedensten Punkten der Wellenfläche erfährt man aber gar Nichts mehr und

kann offenbar so lange Nichts erfahren, als man den geometrischen Weg nicht verlässt und den mechanischen wieder betritt.

Es kann hier zu wiederholten Malen bemerkt werden, dass die Einseitigkeit in der Richtung der Cauchy'schen Analyse, so wie überhaupt die Einseitigkeit in den analytischen Untersuchungen vornehmlich im Gebiete der Differentialgleichungen keineswegs ein Tadel, sondern vielmehr ein Lob sei. Cauchy hat sehr wohl daran gethan, zur Bestimmung der Wellenfläche den sehr eleganten geometrischen Weg einzuschlagen. Die Wissenschaft darf aber dabei nicht stehen bleiben, sondern sie muss mit der bereits ihrer Gestalt nach ermittelten Wellenfläche zurückkehren zu den Differentialgleichungen und ihnen die übrigen Umstände der Bewegung möglichst stufenweise und Stück um Stück abfragen, mit Klarheit und Präcision analytisch ausgedrückt sämmtliche Fragen stellend, auf dass man eben so klare und präcise Antworten erhalte. Wie diess beiläufig zu geschehen habe mit denjenigen neuen Hilfsmitteln der Analysis, die das vorliegende Werk bringt, soll in den einfachsten, aber auch desshalb vorwiegend wichtigsten Beispielen der hier angeführten partiellen Differentialgleichungen auseinandergesetzt werden. Da hier, wie bereits dargethan, die natürliche Wellenlinie ein Kreis, die natürliche Wellenfläche aber eine Kugel ist, so erleichtert diess die Untersuchungen insoferne, als man zur Ermittlung der Wellenfläche keinerlei Nebenbetrachtungen vonnöthen hat und z. B. überzeugt ist, dass den Gleichungen (3) und (4), die die Schwingungen gespannter Membranen und Platten in sich enthalten, nothwendig Genüge zu leisten sein muss durch solche Werthe der abhängigen Veränderlichen ξ, die nur t und eine Coordinate r in sich enthalten, welche mit den orthogonalen x und y zusammenhängt durch die Gleichung des Kreises, nämlich:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (\;$$

also durch

$$\xi = \varphi(t, r) \qquad (\;$$

Ausdrücke, welche x und y nur insoferne in sich begreifen, als solches in r enthalten ist. Ist diese Voraussetzung richtig, so wird man, anstatt der Differentialquotienten nach x und y solche nach r einführend, zu neuen Differentialgleichungen anstatt der (3) und (4) gelangen müssen, welche von x und y keine Spur mehr enthalten, sondern nur t und r als unabhängige und ξ als von ihnen abhängige Veränderliche. Man hat aber:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{x}{r}\frac{d\xi}{dr}, \quad \frac{d\xi}{dy} = \frac{y}{r}\frac{d\xi}{dr}$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{d^2\xi}{dr^2} + \frac{y^2}{r^3}\frac{d\xi}{dr}, \quad \frac{d^2\xi}{dy^2} = \frac{y^2}{r^2}\frac{d^2\xi}{dr^2} + \frac{x^2}{r^3}\frac{d\xi}{dr} \qquad (\;$$

$$\frac{d^4\xi}{dx^4} = \frac{x^4}{r^4}\frac{d^4\xi}{dr^4} + \frac{6x^2y^2}{r^5}\frac{d^3\xi}{dr^3} + \frac{3y^4 - 12x^2y^2}{r^6}\frac{d^2\xi}{dr^2} + \frac{12x^2y^2 - 3y^4}{r^7}\frac{d\xi}{dx}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a^2\left[\frac{d^2\varepsilon}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varepsilon}{dr}\right] \tag{39}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\,b^2\left[\frac{d^4\varepsilon}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\varepsilon}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\varepsilon}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\varepsilon}{dr}\right] \tag{40}$$

womit die Möglichkeit der Fortpflanzung kreisrunder Wellen in einer gespannten Membrane und in einer elastischen Platte erwiesen ist. Die Gesetze der Fortpflanzung dieser Bewegungen aber müssen durch Integration dieser beiden Gleichungen errungen werden. Sie sind, wie schon oben bemerkt, bereits versehen mit veränderlichen Coefficienten und wenigstens die zweite von ihnen konnte mit den älteren Hilfsmitteln der Analysis nicht mehr bewältiget werden, erheischt mithin die Anwendung unserer neuen Integrationsmethoden.

Aehnlich und nur noch etwas verwickelter ist der Sachverhalt, wenn man Systeme von mehreren Differentialgleichungen mit mehreren abhängigen Veränderlichen, wie z. B. das System (7) ins Auge fasst. Willkürliche Functionen von unzählig vielen Grundgrössen sind hier im Stande, die Gleichungen zu erfüllen: Ebene, cylindrische, Kugelwellen vermögen sich fortzupflanzen im Raume je nach ihren eigenen Gesetzen und die Art und Weise der Uebertragung aller dieser Bewegungssorten von Theilchen zu Theilchen im Raume ist jedenfalls ein würdiger Forschungsgegenstand; allein am meisten muss denn doch die Fortpflanzung der Kugelwellen interessiren schon darum, weil in der Natur die vorhandenen Leuchtquellen entweder selbst Kugelgestalt oder zum mindesten ziemlich geringe Ausdehnung haben, demnach entweder in aller Strenge oder doch mindestens nahe genug Kugelwellen aussenden. Es ist mithin vor allem anderen wichtig, sich nach den Fortpflanzungsgesetzen sphärischer Wellen zu erkundigen, nur ist es hier etwas schwieriger, die diessfällige Anfrage an die Differentialgleichungen (7) gehörig analytisch zu formuliren, weil ja die in Rede stehende sphärische Wellenfläche verschiedene Bewegungen beherbergen kann mit den mannigfaltigsten Componenten ξ, η, ζ. Wir haben nämlich schon in der Wellenebene longitudinale und transversale Schwingungen kennen gelernt und wahrscheinlich werden sowohl die einen, wie die anderen in der Kugelwelle stattfinden können. Diese Schwingungen können erstens erfolgen radial, d. h. senkrecht auf die Oberfläche der Wellenkugel und können dann etwa auf allen Punkten der Wellenoberfläche einerlei absoluten Werth besitzen. Die Frage nach der Möglichkeit solcher Bewegungen ist eine vollkommen bestimmte, und lässt sich mit Präcision in die Sprache der Analysis übertragen. Zweitens, die Undulationen können aber auch stattfinden in der Wellenfläche selber und zwar auf unzählige verschiedene Weisen. Die Theile können z. B. schwingen geradlinig, sie können aber auch geschlossene Curven beschreiben, um die Position ihres Gleich-

gewichtes, die in der Wellenfläche liegen. Die Frage nach solchen transversalen Schwingungen wäre demnach noch keine bestimmte Frage. Man wird also z. B. fragen können, ob und nach welchen Gesetzen sich eine transversale undulatorische Bewegung fortzupflanzen vermöge, die so stattfindet, als ob die schwingenden Theilchen an die sphärische Fläche angeklebt wären und als ob diese sphärische Fläche selbst in sehr kleinen drehenden Schwingungen befangen wäre um ihre Rotationsaxe so zwar, dass die allerintensivsten Bewegungen am Aequator der Kugelfläche stattfinden, und dann gegen die Pole zu im Verhältnisse des Halbmessers des ihnen zugehörigen Parallelkreises abnehmen würden bis zu Null. So gestellt an die Analysis, hat die Frage ebenfalls mathematische Präcision und man vermag sie in Rechnung zu setzen.

Erledigen wir zuerst den Fall der longitudinalen Schwingungen. Nennen wir die absolute Verschiebung aus der Ruhelage eines beliebigen Theilchens φ, und sehen wir dieses φ als gleich an in allen Punkten der um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen Kugelfläche, somit als gleich in allen Punkten, in welchen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{41}$$

denselben Werth hat; so ist φ eine Function der zwei Variablen r und t, die mit Ausnahme des in r vorfindigen kein weiteres x, y, z mehr in sich schliesst; ξ, η und ζ aber sind die drei Projectionen des φ auf die drei Coordinatenaxen, mithin gegeben durch die drei Gleichungen:

$$\xi = \frac{x}{r}\varphi\,,\quad \eta = \frac{y}{r}\varphi\,,\quad \zeta = \frac{z}{r}\varphi \tag{42}$$

Führt man diese Werthe in die Differentialgleichungen (7) ein, alle Differentialquotienten nach x, y, z in solche nach r umsetzend, so muss man allerdings drei Differentialgleichungen erhalten, die aber, nachdem sie eine und dieselbe Function φ bestimmen, alle drei zusammenfallen müssen in eine einzige, die keine Spur mehr von x, y, z in sich enthalten darf. Man hat zum Behufe dieser Substitution:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}\,,\quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}\,,\quad \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r}$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{x^2}{r^2}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{y^2+z^2}{r^3}\varphi\,,\quad \frac{d\eta}{dy} = \frac{y^2}{r^2}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{x^2+z^2}{r^3}\varphi\,,\quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{z^2}{r^2}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{x^2+y^2}{r^3}\varphi$$

$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx} = \frac{xy}{r^2}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{xy}{r^3}\varphi\,,\quad \frac{d\xi}{dz} = \frac{d\zeta}{dx} = \frac{xz}{r^2}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{xz}{r^3}\varphi\,,\quad \frac{d\eta}{dz} = \frac{d\zeta}{dy} = \frac{yz}{r^2}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{yz}{r^3}\varphi$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{3x(y^2+z^2)}{r^4}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{3x(y^2+z^2)}{r^5}\varphi \tag{43}$$

$$\frac{d^2\eta}{dy^2} = \frac{y^2}{r^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{3y(x^2+z^2)}{r^4}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{3y(x^2+z^2)}{r^5}\varphi$$

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} = \frac{z^2}{r^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{3z(x^2+y^2)}{r^4}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{3z(x^2+y^2)}{r^5}\varphi$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{d^2\xi}{dx\,dy} = \frac{x^2y}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{y(-2x^2+y^2+z^2)}{r^4}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{y(-2x^2+y^2+z^2)}{r^5}\varphi$$

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{d^2\xi}{dxdz} = \frac{x^2z}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{z(-2x^2+y^2+z^2)}{r^4}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{z(-2x^2+y^2+z^2)}{r^5}\varphi$$

$$\frac{d^2\xi}{dy^2} = \frac{d^2\eta}{dxdy} = \frac{xy^2}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{x(x^2-2y^2+z^2)}{r^4}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{x(x^2-2y^2+z^2)}{r^5}\varphi$$

$$\frac{d^2\zeta}{dy^2} = \frac{d^2\eta}{dydz} = \frac{y^2z}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{z(x^2-2y^2+z^2)}{r^4}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{z(x^2-2y^2+z^2)}{r^5}\varphi$$

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} = \frac{d^2\zeta}{dxdz} = \frac{xz^2}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{x(x^2+y^2-2z^2)}{r^4}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{x(x^2+y^2-2z^2)}{r^5}\varphi$$

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = \frac{d^2\zeta}{dydz} = \frac{yz^2}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{y(x^2+y^2-2z^2)}{r^4}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{y(x^2+y^2-2z^2)}{r^5}\varphi$$

und der Erfolg ist der vorherverkündete, wie auch zu erwarten war, nämlich die erhaltenen drei Differentialgleichungen in φ fallen in eine einzige zusammen, in der keine Spur der orthogonalen Coordinaten mehr wahrzunehmen ist, nämlich:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 3a^2\left[\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{2}{r}\varphi\right] \tag{44}$$

Sie hat auch veränderliche Coefficienten und vermag durch zwei willkürliche Functionen bestimmter aus r und t zusammengesetzter Grundgrössen integrirt zu werden, jedoch ist es immer weit vorzuziehen, die Integration durch einzelne Genüge leistende Werthe, die noch eine gewisse Anzahl Constanter in sich enthalten, zu bewerkstelligen, so wie bei der Integration der Differentialgleichungen gespannter Saiten und dann über diese Constanten entsprechend zu verfügen. Es erscheinen im gegenwärtigen Falle um drei mehr, denn eben so gut, wie man sich r gegeben denken kann durch die Gleichung (41), kann man auch voraussetzen:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2 \tag{45}$$

und der Erfolg würde dieselbe Differentialgleichung in φ sein. Man hat also, wie gesagt, um die drei willkürlichen Constanten α, β, γ mehr und braucht sie auch, um das Problem der Reflexion der Wellen zu erledigen.

Die Fortpflanzungsgesetze derjenigen Kugelwellen, bei denen die Schwingungsrichtung in der Wellenfläche selber liegt, hängen ab von einer anderen Differentialgleichung, die man aber gewinnt auf dieselbe Weise; und lässt man der Einfachheit wegen die Axe der z die Rotationsaxe sein, um welche die Bewegungen der kleinsten Theilchen stattfinden; so hat man nicht nur $\zeta = 0$, sondern es hängen noch überdiess ξ und η durch eine gewisse Relationsgleichung zusammen, zu der man auf folgende Weise gelangt: Man bezeichne die absolute Verschiebung aus der Ruhelage der Theilchen, die sich am Aequator der Kugelfläche befinden, mit φ; so steht zu dieser grössten Verschiebung die einem anderen Parallelkreise entsprechende in demselben Verhältnisse, wie der Radius ρ dieses Parallelkreises zum Kugelhalbmesser r. Zur Bestimmung von r und ρ hat man:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2\,, \quad \rho^2 = r^2 - z^2 = x^2 + y^2 \tag{46}$$

mithin ist diese absolute Verschiebung:

$$\frac{\rho}{r}\varphi = \psi \tag{47}$$

Ihre Componenten oder Projectionen auf die zwei Coordinatenaxen sind ξ und η, und denkt man sich die Bewegung in einem Sinne stattfindend, dass dadurch die Coordinate y des so bewegten Punktes vergrössert wird, mithin η positiv ausfällt, so wird zu gleicher Zeit die Coordinate x verkleinert, mithin ist ξ negativ und man überzeugt sich durch eine sehr einfache Zeichnung, die sich der Leser selbst vorlegen mag, dass:

$$\xi = -\frac{y}{\rho}\psi = -\frac{y}{r}\varphi\,,\quad \eta = \frac{x}{\rho}\psi = \frac{x}{r}\varphi\,,\quad \zeta = 0 \tag{48}$$

sei. Behufs der Substitution dieser Werthe in die Differentialgleichungen hat man:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}\,,\quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}\,,\quad \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dx} = -\frac{d\eta}{dy} = -\frac{xy}{r^2}\left[\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r}\varphi\right],\ \frac{d\xi}{dy} = -\frac{y^2}{r^2}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{x^2+z^2}{r^3}\varphi\\
&\frac{d\xi}{dz} = -\frac{yz}{r^2}\left[\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r}\varphi\right],\ \frac{d\eta}{dx} = \frac{x^2}{r^2}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{y^2+z^2}{r^3}\varphi,\ \frac{d\eta}{dz} = \frac{xz}{r^2}\left[\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r}\varphi\right]\\
&\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\frac{d^2\eta}{dxdy} = -\frac{x^2y}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{y}{r^4}(2x^2-y^2-z^2)\left[\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r}\varphi\right]\\
&\frac{d^2\xi}{dy^2} = -\frac{y^3}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{y}{r^4}(-3x^2-3z^2)\left[\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r}\varphi\right]\\
&\frac{d^2\xi}{dz^2} = -\frac{yz^2}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{y}{r^4}(-x^2-y^2+2z^2)\left[\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r}\varphi\right]\\
&\frac{d^2\eta}{dx^2} = +\frac{x^3}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{3x}{r^4}(y^2+z^2)\left[\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r}\varphi\right]\\
&\frac{d^2\eta}{dy^2} = -\frac{d^2\xi}{dxdy} = \frac{xy^2}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{x}{r^4}(x^2-2y^2+z^2)\left[\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r}\varphi\right]\\
&\frac{d^2\eta}{dz^2} = \frac{xz^2}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{x}{r^4}(x^2+y^2-2z^2)\left[\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r}\varphi\right]\\
&\frac{d^2\xi}{dxdz} = -\frac{d^2\eta}{dydz} = -\frac{xyz}{r^3}\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{3xyz}{r^4}\left[\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r}\varphi\right]
\end{aligned} \tag{49}$$

und die zwei ersten der Differentialgleichungen (7) verwandeln sich vermöge dieser Werthe in eine einzige in φ, während die dritte identisch erfüllt ist. Diese einzige ist:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left[\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{2}{r^2}\varphi\right] \tag{50}$$

und besitzt so wie alle übrigen gleichfalls variable Coefficienten. **Ihr Integral verstattet die Einführung** von noch mehr willkürlichen Constanten und zwar von deren fünf, weil man den **Mittelpunkt der Kugel-**

welle auch ausserhalb des Anfangspunktes der Coordinaten nach dem Orte α, β, γ hätte versetzen können und zugleich die Rotationsaxe beliebig gegen die Coordinatenaxen neigen, ohne dass daraus eine Veränderung der Form der letzterhaltenen Differentialgleichung hervorgegangen wäre. Diese fünf Constanten dienen zu dem doppelten Zwecke: erstens jede beliebige gerad- oder krummlinige Schwingungsweise und Intensität der Theilchen an einem bestimmten Orte z. B. demjenigen, von welchem die Schwingungen ausgehen, zu erzeugen und zweitens die Gesetze der Reflexion solcher Wellen kennen zu lernen.

Diese Betrachtungen berechtigen zu folgenden Schlüssen: Erstens: Die Differentialgleichungen die auf dem Gebiete der Mechanik und Physik und namentlich der Undulationstheorie erscheinen, sind zwar beinahe durchgehends partielle mit constanten Coefficienten, so lange man den allereinfachsten und hypothetischen Fall voraussetzt, der in der Natur nirgends stattfindet, dass nämlich das im Schwingungszustande begriffene System materieller Punkte ein lineares oder ebenes sei mit gleicher Anordnung und Dichte in allen Theilen. Sie gehen aber allsogleich in andere mit variablen Coefficienten über, wenn diese Bedingungen erfüllt zu sein aufhören. Zweitens: Die fernere Discussion dieser Gleichungen mit constanten Coefficienten bleibt nur so lange eine mit den älteren Hilfsmitteln der Analysis durchführbare, als man nur die Schwingungsgesetze haben will für einen hypothetischen Fall, der wieder nirgends in der Natur anzutreffen ist, als man nämlich unendlich viele gerade oder ebene Wellen zum Gegenstande seiner Betrachtungen macht. Frägt man aber, um die Aussprüche der Theorie gegen jene des Experimentes zu halten, nach demjenigen, was stattfindet an irgend einer krummen Linie oder krummen Fläche, so besteht die Antwort zunächst wieder in Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten und zwar gelangt man sehr oft nur zu einer einzigen solchen zwischen nur zwei Veränderlichen, einer unabhängigen und einer abhängigen nämlich: Erstere ist die Zeit oder eine Coordinate, Letztere eine lineare Bewegungsgrösse oder Temperatur. An der einen Seite des Gleichheitszeichens hat man dann einen isolirten zweiten oder ersten Differentialquotienten nach der Zeit t; an der anderen Seite vermögen verschiedene Differentialquotienten nach der Coordinate zu erscheinen. Nach ihnen trägt die Differentialgleichung gewöhnlich eine gerade Ordnungszahl: 2, 4, 6, ... und solche sind es, deren schickliche Behandlung der Gegenstand unserer Bestrebungen ist.

Es handelt sich also gegenwärtig nicht darum, eine Theorie aufzustellen der partiellen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten überhaupt. Eine solche nämlich würde ihre eigene Formenlehre, ihre eigenen Transformationsmethoden u. s. w. in Anspruch nehmen und wäre von einem Werke über Differentialgleichungen nicht ein Abschnitt, sondern ein selbsständiges Werk für sich, welches an Umfang das vorliegende leicht überbieten könnte. Es liegt vielmehr nur in unserer Absicht, der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf dem Felde der mathematischen Physik einen passenden Tummelplatz zu verschaffen und auch hier sollen es nicht alle möglichen Behandlungsweisen partieller Differentialgleichungen sein, die wir zu unseren Zwecken auszubilden gedenken, sondern hauptsächlich nur eine einzige und zwar diejenige, die durch ihr besonnenes und stufenweises Fortschreiten nie zu viel auf einmal fragend, dem Geiste nach am meisten den Methoden dieses Werkes verwandt ist.

Ursprünglich schon von d'Alembert in der Theorie der Schwingungen gespannter Saiten in Anwendung gesetzt, später von Poisson bei den Schwingungen elastischer Stäbe weiter fortgebildet, ist sie diejenige, die dem mathematischen Naturforscher die meiste Ausbeute verspricht, und es ist uns gelungen, sie allgemein bei denjenigen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, welche auf dem Felde der Physik erscheinen können, für alle Fälle brauchbar zu gestalten. Ihr ist mithin im Wesentlichen dieser letzte Abschnitt des Werkes gewidmet.

Trotz ihres sehr ausgedehnten Wirkungskreises und ihrer übrigen Vorzüge reicht aber doch diese Methode nicht hin, um alle Sorten mechanischer Probleme, die in letzter Instanz zu einer einzigen linearen Partialgleichung führen, zu bewältigen. Vorzugsweise für lineare Systeme herangebildet, bedarf sie nämlich nicht nur sehr bedeutender Modificationen in den Fällen, wo das in den Bewegungszustand versetzte materielle System zwei oder auch drei Dimensionen im Raume hat, sondern sie muss sogar von vorhinein aufgegeben werden in allen Fällen, wo sich die Bedingungen an den Grenzen des Systemes nicht durch lineare Gleichungen ausdrücken lassen, oder wo diess zwar möglich ist, jedoch erst nach erfolgter Integration der Hauptgleichung bewerkstelligt werden kann, wie z. B. im folgenden Falle: Eine schwingende Saite ist zusammengesetzt aus zwei heterogenen Stücken von ungleicher Masse m und M der Längeneinheit. Das eine Stück von der Masse m reicht von $x = -\infty$ bis $x = 0$, das andere von der Masse M ist von $x = 0$ bis $x = +\infty$ ausgedehnt; man soll die Gesetze der Wellenbewegung in einer solchen Saite angeben. Betrachtet man hier die Masse μ der Längeneinheit als eine Function von x, so ist diess in den Coefficienten der Differentialgleichung vorkommende μ unstetig und kann nur durch besondere analytische Hilfsmittel, wie die Exponentielle dritter Classe Libri's wiedergegeben werden, etwa wie folgt:

$$\mu = m + (M - m)\, 0^{0^x}$$

Ich habe in einer Abhandlung in den Denkschriften der kaiserl. Akademie über die Schwingungen solcher gespannter Saiten gezeigt, dass sich derlei Gleichungen mit unstetigen Coefficienten sehr gut der Integration unterwerfen lassen. Ich setze hinzu, dass sich mit Hilfe dieser unstetigen Functionen und durch Integration von Differentialgleichungen, deren Coefficienten aus solchen zusammengesetzt sind, das Problem der Reflexion der Bewegungen auf eine gründlichere und vollständigere Weise erledigen lasse, als diess bisher geschah, und so begegnen wir wieder einer neuen Art des Vorkommens veränderlicher Coefficienten in den Differentialgleichungen, die auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaftsforschung nicht unerheblichen Nutzen zu bringen verspricht.

Der unstetigen Functionsformen von der Art der Exponentiellen Libri's besitzt aber die Analysis bereits einen grösseren Vorrath. Ich rechne hiezu die Fourier'sche Formel, das trigonometrische Integral, von welchem Lejeune-Dirichlet bei der Attraction der Sphäroide einen sehr eleganten Gebrauch gemacht hat und andere mehr. Alle gestatten bei der Integration der Differentialgleichungen mannigfache nützliche Verwendung. Sie erscheinen bald ursprünglich in der Differentialgleichung selbst, bald erst später im Integrale und es ist gewiss von Wichtigkeit, das, was über ihre

Verwendungsweise bisher herausgebracht worden, übersichtlich geordnet zusammenzustellen, denn diese Functionen gehen offenbar schon aus dem Grunde einer höheren Bedeutung in der Wissenschaft entgegen, weil sie viel öfter Repräsentation in der Natur finden, als die bisher in der Mathematik beinahe allgemein und ausschliesslich im Gebrauche stehenden algebraischen und damit verwandten stetigen Functionen.

Die Wege sind also sehr mannigfaltig, auf welchen man zu linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen, stetigen oder unstetigen Functionen geführt wird; da aber die Integration derselben keineswegs ein Schwelgen sein soll in nutzlosen Formen, die die Eigenschaft besitzen, Genüge zu leisten, sondern ein klares Darlegen eines gewissen Vorganges in verständlicher analytischer Sprache, mithin einem jeden speciellen Falle gehörig angepasst werden muss; so ist wohl nichts geeigneter, den Nutzen der in diesem Werke entwickelten Integrationsmethoden auf das Klarste darzulegen, als eine Sammlung gewählter Beispiele. Der analytische Character, den ich diesem Werke zu wahren wünsche, lässt es jedoch nicht zu, demselben mehr Beispiele einzuverleiben, als die allereinfachsten und nothwendigsten. Ich bin daher gesonnen, eine solche Beispielsammlung in anderer Weise der Veröffentlichung, nämlich in den Schriften der Akademie nachfolgen zu lassen, und betrachte die Schwingungen solcher gespannter Saiten, die aus heterogenen Theilen zusammengesetzt sind, als die erste dieser kleinen Abhandlungen; dieser letzte Abschnitt hingegen möge der allgemeinen Auseinandersetzung der zu ähnlichen Integrationszwecken vorzüglich brauchbaren Methoden gewidmet sein.

§. 2.

Auffindung Genüge leistender Werthe bei einer linearen Partialgleichung und Beherzigung der Bedingungen an den Grenzen eines linearen Systemes materieller Punkte.

Nach den im vorhergehenden Paragraphe gewonnenen Ergebnissen ist die grosse Mehrzahl derjenigen Probleme, die zu linearen Partialgleichungen führen, der Undulationslehre angehörig, und man verfolgt den Zweck, die schwingenden Bewegungen fester oder flüssiger elastischer Körper oder auch tropfbar flüssiger Massen kennen zu lernen. Solche materielle Systeme sind entweder linear mit nur einer einzigen Ausdehnung im Raume oder gestatten mindestens die Zurückführung auf ein solches lineares System in dem Sinne, dass, wenn man die Bewegungen aller in eine gewisse gerade oder krumme Linie fallenden Punkte kennt, auch die der übrigen daraus abgeleitet werden können, ohne dass man zu diesem Zwecke die Integration einer weiteren Differentialgleichung vorzunehmen hat. Solche Probleme sind die der Schwingungen gespannter Saiten oder aufgehängter Ketten, elastischer Stäbe u. s. w. Sie führen, wie gesagt, zu einer einzigen Differentialgleichung zwischen zwei unabhängigen Veränderlichen, von welchen die eine eine Coordinate ist, die wir im Folgenden mit x bezeichnen werden, die andere die Zeit t und einer abhängigen Veränderlichen, die y heissen soll und die Bedeutung hat, einer sehr kleinen mit x und t veränderlichen Verschiebung des materiellen Theilchens aus der

Ruhelage. Einer solchen Differentialgleichung kommt stets eine und dieselbe Form zu, wie die eben im vorigen Paragraphe angeführten Beispiele zur Genüge lehren. Man hat nämlich von der einen Seite den zweiten Differentialquotienten der Verschiebung y nach der Zeit t genommen als Ausdruck der die schwingende Bewegung zu erzeugen fähigen Kraft, die selbstverständlich in der Bewegungsgleichung vorhanden sein muss. Auf der anderen Seite befinden sich nur Differentialquotienten nach x und es ist nach diesen die Gleichung gewöhnlich von gerader Ordnung, d. h. es liegt bei einem linearen materiellen Systeme stets eine Partialgleichung vor, die aussieht, wie folgt:

$$X_{2n} \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + X_{2n-1} \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} + \dots\dots\dots\dots + X_1 \frac{dy}{dx} + X_0 y = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{51}$$

Aber auch bei materiellen Systemen von zwei oder drei Dimensionen im Raume erscheinen gewöhnlich Differentialgleichungen von dieser Gestalt, wenn auch nicht ursprünglich und unmittelbar, doch wenigstens in Folge einer analytisch durchgeführten specielleren Voruntersuchung, die nach der Wellenlinie oder Wellenfläche frägt. Gewöhnlich geht man nämlich von mehreren Differentialgleichungen mit mehreren abhängigen und auch mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen aus und eben durch diese Voruntersuchung reduzirt sich die Anzahl der Gleichungen auf Eine und die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen auf zwei, von denen wieder die eine eine Coordinate, die andere die Zeit ist. Man gelangt also wieder zu einer Gleichung von der Form der (51), wie diess in einigen Beispielen im vorigen Paragraphe gezeigt worden ist; es erscheint mithin von Wichtigkeit, dieser Form (51) erhöhte Aufmerksamkeit zuzuwenden und für dieselbe eine eigene Methode der Integration sowohl, wie auch der ferneren Behandlung des errungenen Integrales gemäss den verschiedenen Fällen, die vorkommen können, festzustellen.

Auch bei den Problemen der Wärmelehre gelangt man zu ähnlichen Differentialgleichungen, wie die (51), nur mit dem Unterschiede, dass y keine Verschiebung aus der Ruhelage, sondern eine Temperatur bedeutet, und dass nicht der zweite Differentialquotient dieses y nach t, sondern der erste auf der einen Seite des Gleichheitszeichens zu stehen kommt. Dieser geringfügige Unterschied nöthigt nur zu ganz unbedeutenden Aenderungen in der Methode.

Es ist nicht zu bestreiten und die Zeit scheint nicht mehr ferne zu sein, wo die Undulationslehre sowohl, wie auch die Theorie der Wärme sehr wesentliche und durchgreifende Veränderungen erfahren wird. Ganz andere Differentialgleichungen, verschieden sowohl der Anzahl, als der Form nach, werden davon die Folge sein. Die Form (51) wird aber doch dabei von ihrer Bedeutung nichts verlieren und man wird auch künftighin am Ende zu einer einzigen Gleichung von dieser Gestalt gelangen, und das Integrationsgeschäft wird eben bei derselben beginnen. In der That, es ist sehr wohl möglich, dass man künftighin die Körper nicht mehr betrachten wird als Systeme von materiellen Punkten von einerlei Art, einerlei Kräften und einerlei Wirkungsweise auf einander, sondern als Inbegriffe von mehreren solchen materiellen Systemen, die sich gegenseitig durchdringen. Sind solcher Systeme r an der Zahl, so werden sich nicht mehr, wie anjetzt in der Undulationslehre höchstens drei Gleichungen

ergeben mit drei Componenten ξ, η, ζ der Verschiebung eines Theilchens, als abhängigen Veränderlichen, sondern vielmehr $3r$ Gleichungen mit einer gleichen Anzahl abhängiger Variabeln. Die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen wird aber nach wie vor nur höchstens vier bleiben, nämlich drei Coordinaten x, y, z und die Zeit t und eine ähnliche, specielle Voruntersuchung wird hinreichen, um die Reduction aller dieser $3r$ Gleichungen auf eine oder mehrere von der Form (51) zu bewerkstelligen. Aehnliches ist vermuthlich von den Problemen der Wärmelehre in ihrer zukünftigen Gestalt zu erwarten, und sollte es in späteren Zeiten den Bearbeitern der mathematischen Physik passend erscheinen, die kleinsten Körpertheilchen nicht wie materielle Punkte zu behandeln ohne Ausdehnung, sondern ihnen bereits Gestalt zu verleihen und Ausdehnung im Raume und hiemit verschiedene Wirkung nach verschiedenen Seiten, so werden zu den $3r$ Gleichungen der progressiven Bewegung noch $3r$ andere hinzutreten, welche die $3r$ Componenten der drehenden Bewegung der einzelnen Massentheilchen als abhängige Veränderliche in sich schliessen werden und man wird immer, rationell vorgehend, auch die Reduction dieser letzteren auf eine oder mehrere der Form (51) angehörige bewerkstelligen können.

Aber auch diese partielle Differentialgleichung wird sich in allen Fällen, sei es, dass sie von einem linearen materiellen Systeme spricht, oder auch von einem anderen mit zwei oder drei Dimensionen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen lassen mit nur zwei Variablen, einer abhängigen und einer unabhängigen nämlich, indem man sie von der Zeit t befreit durch die analytische Frage nach einem Schwingungszustand und indem man y voraussetzt als ein Produkt aus nur zwei Factoren, von welchen der erste eine reine Function von x ohne t, der andere aber eine reine Function von t ist und zwar namentlich eine periodische, etwa $Sin\ \alpha t$ oder $Cos\ \alpha t$. Der nur x enthaltende Factor wird dann abhängig von einer gewöhnlichen Differentialgleichung, die constante Coefficienten hat, wenn X_0, X_1, X_2, ... X_{2n} constante Grössen wären, hingegen mit veränderlichen Coefficienten versehen ist, wenn dieselben X_0, X_1, X_2, ... X_{2n} auch die Veränderliche x enthalten. Die Variable t ist in ihnen nicht enthalten, es sei denn, man nehme an, dass die Beschaffenheit des materiellen Systemes, die Urkräfte der Materie einer Veränderung in der Zeit unterworfen wären.

Man bewirkt also die Verwandlung der partiellen Differentialgleichung in eine gewöhnliche durch eine der beiden Substitutionen:

$$y = \eta\ Cos\ \alpha t\ ,\quad y = \eta\ Sin\ \alpha t \tag{52}$$

Sie führen beide zu einerlei Resultat, nämlich:

$$X_{2n}\frac{d^{2n}\eta}{dx^{2n}} + X_{2n-1}\frac{d^{2n-1}\eta}{dx^{2n-1}} + \dots\dots\dots\dots + X_1\frac{d\eta}{dx} + X_0\eta = -\alpha^2\eta \tag{53}$$

eine Gleichung, die nun der Integration zu unterwerfen ist mit Hilfe irgend einer der entweder in diesem Werke auseinandergesetzten oder auch einer anderen älteren Methode. Mit der Integration allein, d. h. der Auffindung Genüge leistender Werthe, die $2r$ an der Zahl und von einander verschieden sind, ist aber noch nicht Alles gethan, sondern man muss das Integral noch dazu zwingen, gewisse Bedingungen zu erfüllen, die theils bestimmte Punkte des Systemes, z. B. die Grenzpunkte desselben ange-

hen, theils die Art der anfänglichen Erregung formuliren. Hier geht die weitere Behandlung des Schwingungsproblemes in mehrere verschiedene Zweige auseinander und wird eine andere bei linearen Systemen und wieder in der Regel eine andere bei einer solchen mit zwei oder drei Ausdehnungen im Raume. Sie wird ferner eine andere je nach der Form des analytischen Ausdruckes der zu erfüllenden Bedingungen.

Um diess durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, führen wir an, dass die Schwingungsgesetze einer **elastischen Feder** von constantem Querschnitt durch die Gleichung:

$$b^2 \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{54}$$

gegeben sind, so dass man noch überdem verlangt, dass das gefundene Integral die Bedingungen vom Anfangs- und Endpunkte der Feder, denen beziehungsweise die Coordinaten $x = 0$, $x = a$ entsprechen, erfülle. Findet sich nun diese Feder an einem ihrer Grenzpunkte eingeklemmt, so hat man offenbar für denselben:

$$y = 0 \ , \quad \frac{dy}{dx} = 0; \tag{55}$$

ist sie es an beiden, so gelten die eben aufgestellten zwei Grenzgleichungen sowohl für $x = 0$, als auch für $x = a$ und zwar für jedes beliebige t. Ist die Feder an einem Endpunkte frei, so ist für den demselben entsprechenden Werth von x Druck und Spannung der Nulle gleich, oder in analytischer Sprache:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \ , \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \tag{56}$$

Man verlangt aber auch ferner noch, dass das gefundene Integral den Anfangszustand wiedergebe, indem man sich eine gewisse **Erregungsweise der Schwingungen** denkt, was grösstentheils darauf hinausgeht, für den Zeitmoment $t = 0$ Verschiebung aus der Ruhelage und Geschwindigkeit der einzelnen materiellen Theilchen als gegebene Functionen von x anzunehmen, etwa:

$$y = f(x) \ , \quad \frac{dy}{dt} = f_1(x). \tag{57}$$

Es geht hieraus unmittelbar hervor, dass es gar nicht einmal genügend sei, Werthe von y aufgefunden zu haben, welche die Differentialgleichung erfüllen; solcher Werthe gibt es in der That viele und sie gehören mehreren Sorten an: es gibt nämlich Integrale, versehen mit einer Anzahl willkürlicher Constanten. Man überzeugt sich namentlich in dem angeführten Beispiele ohne Mühe, dass jeder Ausdruck von der Form:

$$P + Qt,$$

wo P und Q Functionen von drei Dimensionen nach x, also Polynome wie:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

sind, ein solches Integral repräsentire; man sieht aber auch eben so leicht ein, dass derselbe nicht die Auflösung des vorgelegten Schwingungsproblemes geben könne. Man ist daher genöthigt, sich an Integrale anderer Art zu wenden, diejenigen nämlich, die willkürliche Functionen enthalten, und demgemäss nicht nur der Differentialgleichung genügen, sondern auch die Grundbedingungen der Aufgabe erfüllen können. Das zu lösende Problem erscheint uns daher in folgender Gestalt:

Es ist eine Function von x und t aufzufinden, welche die Eigenschaft hat, anstatt y gesetzt, die Differentialgleichung (51) identisch zu machen und noch überdiess für $x = 0$ den Gleichungen:

$$L_1 = 0,\ L_2 = 0,\ \ldots\ldots\ldots\ L_n = 0 \tag{58}$$

für $x = a$ aber den anderen:

$$M_1 = 0,\ M_2 = 0,\ \ldots\ldots\ldots\ M_n = 0 \tag{59}$$

Genüge zu leisten, was auch t bedeuten mag. Sämmtliche L und M sind lineare Functionen von y, $\frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}}$, die kein von y und seinen Ableitungen freies Glied enthalten. Es soll ferner für $t=0$:

$$y = f(x)\,,\quad \frac{dy}{dt} = f_1(x) \tag{60}$$

sein.

Diess wäre die gewöhnliche Fassung des Schwingungsproblemes bei linearen materiellen Systemen, mitunter jedoch stellt sich die Frage etwas anders. Man kennt nämlich die Bedingungen an den Grenzen gar nicht, wenigstens nicht in der Form, in welcher sie gewöhnlich durch Grenzgleichungen gegeben, gedacht werden. Man weiss nämlich z. B. nur, dass das materielle System dasselbe bleibt von $x=0$ bis $x=a$; über diese Grenze hinaus aber geht es in ein anderes über z. B. die schwingende Saite oder Feder ist zusammengesetzt aus mehreren Stücken von ungleicher Dicke und Elasticität. Einem jeden der Bestandtheile entspricht eine andere Differentialgleichung, wenn auch nicht der Form, doch mindestens den Coefficientenwerthen nach und der Vorgang an den Grenzpunkten $x = 0$ und $x = a$ ist nicht bekannt, sondern ist erst zu bestimmen. Es kann jedoch das eine sowohl, wie auch das andere zu gleicher Zeit stattfinden und die Analysis besitzt Mittel, ein solches Schwingungsproblem, in welcher Fassung es auch immer gegeben sein mag, zu erledigen. Wir wollen dasselbe zuvörderst in der obenangeführten Form zu erledigen suchen, fragen also, wie schon oben bemerkt, zuerst nach der Möglichkeit eines periodischen Schwingungszustandes, der durch die Formel:

$$y = \eta\ Cos\ \alpha t\text{, oder } y = \eta\ Sin\ \alpha t$$

dargestellt wird und erhalten durch jede beliebige dieser beiden Substitutionen eine und dieselbe Gleichung in η, die nicht mehr eine partielle, sondern eine ganz gewöhnliche lineare ist, nämlich:

$$X_{2n} \frac{d^{2n}\eta}{dx^{2n}} + X_{2n-1} \frac{d^{2n-1}\eta}{dx^{2n-1}} + \ldots\ldots + X_0\eta = -\alpha^2\eta,$$

oder, nach einer früher oft gebrauchten Bezeichnungsweise:

$$X_{2n}\eta^{(2n)} + X_{2n-1}\eta^{(2n-1)} + \ldots\ldots + X_1\eta' + X_0\eta = -\alpha^2\eta. \tag{61}$$

Wir schliessen hieraus, dass für solche η, die dieser Gleichung genügen, nicht nur jeder beliebige der zwei Ausdrücke (52), sondern auch die Summe dieser mit willkürlichen Constanten multiplizirten beiden als particuläres Integral der vorgelegten Partialgleichung betrachtet werden könne und diess zwar für beliebige Werthe von α. Wir haben also:

$$y = \eta \, (A \, Cos \, \alpha t + \mathfrak{A} \, Sin \, \alpha t). \tag{62}$$

Der aus der Gleichung (61) gezogene Werth von η erscheint aber bekanntlich als eine Summe von Integralen:

$$\eta = G_1 \eta_1 + G_2 \eta_2 + \ldots\ldots + G_{2n} \eta_{2n} = Y. \tag{63}$$

Man wird daher in (62) η durch Y ersetzen können, ja noch mehr, es wird gestattet sein, dem α andere und andere beliebig und, wenn man will, auch unendlich viele Werthe beizulegen und in Verbindung damit auch die Constanten G_1, G_2, ... G_{2n}, A, $\mathfrak{A}$ anders und anders zu wählen, wodurch auch Y der Reihe nach verschiedene Werthe bekömmt, und endlich alle auf diese Weise hervorgehenden Werthe zu summiren und die Summe anstatt y zu setzen, so dass man hat:

$$y = \mathrm{S} \left\{ Y (A \, Cos \, \alpha t + \mathfrak{A} \, Sin \, \alpha t) \right\} \tag{64}$$

und es handelt sich jetzt nur noch darum, den in diesem Integrale vorhandenen willkürlichen Constanten:

$$G_1, \; G_2, \; \ldots\ldots \; G_{2n}, \; A, \; \mathfrak{A}, \; \alpha$$

solche Werthe beizulegen, dass Erstens: die Bedingungen an den Grenzen, und Zweitens: die für $t = 0$ erfüllt werden. Da den ersten für beliebige t Genüge zu leisten ist, so verfährt man am besten, wenn man ein jedes Glied von y, d. h. nicht bloss das

$$Y (A \, Cos \, \alpha t + \mathfrak{A} \, Sin \, \alpha t), \tag{65}$$

sondern auch jeden seiner aggregativen Bestandtheile:

$$YA \, Cos \, \alpha t \, , \quad Y\mathfrak{A} \, Sin \, \alpha t \tag{66}$$

die Bedingungen an den Grenzen zu erfüllen zwingt. In Folge der linearen Form der Bedingungsgleichungen (58) und (59), und in Folge des Umstandes, dass sie kein von y freies Glied enthalten, wird auch die y darstellende Summe dieselbe Eigenschaft besitzen. Diess heisst nun offenbar eben so viel, als annehmen, dass das von t freie Y, anstatt y in die (58) und (59) gesetzt, den Grenzbedingungen entspreche. Und da sowohl der Ausdruck (65), wie auch seine zwei Bestandtheile (66), was auch x sein mag, denselben Werth wieder annehmen, wenn t um $\frac{2\pi}{\alpha}$ geändert wird, so hat dieses unser Verfahren den Sinn der präcisen Anfrage, ob, und unter welchen Umständen ein periodischer Schwingungszustand mit der Oscillationsdauer $\frac{2\pi}{\alpha}$ isolirt, d. h. mit keiner anderen Bewegungsweise complizirt, im Systeme Platz finden könne.

Wir denken uns also den Ausdruck (63) für Y, der, wie man sieht, die annoch unbestimmten $2n + 1$ Constanten G_1, G_2, ... G_{2n} und α enthält, in die für $x = 0$ und für $x = a$

geltenden Grenzgleichungen (58) und (59) anstatt y substituirt, und in den einen x durch 0, in den anderen x durch a ersetzt, so ergibt sich ein System von Gleichungen $2n$ an der Zahl von der Form

$$
(67)\quad \begin{array}{l}
(1,1)\, G_1 + (1,2)\, G_2 + \dots\dots\dots + (1,2n)\, G_{2n} = 0 \\
(2,1)\, G_1 + (2,2)\, G_2 + \dots\dots\dots + (2.\,2n)\, G_{2n} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(2n,1)\, G_1 + (2n,2)\, G_2 + \dots\dots\dots + (2n,2n)\, G_{2n} = 0,
\end{array}
$$

linear nach $G_1, G_2, \dots\dots G_{2n}$ mit Coefficienten, die α in sich enthalten, jedoch in derselben, wie in $\eta_1, \eta_2, \dots\dots \eta_{2n}$ d. h. in Regel in transcendenter Weise. Da aber die allerdings für jedes α Genüge leistenden Werthe $G_1 = G_2 = \dots\dots = G_{2n} = 0$ verwerflich sind, weil sie Y und y der Nulle gleich machen, sohin die Auflösung eines Schwingungsproblemes nicht enthalten können; so hat man diese vorliegenden Grenzgleichungen zu betrachten als solche, denen durch schickliche Wahl der Relationen $\frac{G_2}{G_1}, \frac{G_3}{G_1}, \dots\dots \frac{G_{2n}}{G_1}$ und der Constanten α, die zusammengenommen gleichfalls $2n$ an der Zahl sind, Genüge geleistet werden muss. Sie bestimmen also $G_1, G_2, \dots G_{2n}$ nicht, sondern geben vermittelst des bekannten Eliminationsverfahrens nur $\frac{G_2}{G_1}, \frac{G_3}{G_1}, \dots\dots \frac{G_{2n}}{G_1}$ in Bruchform mit gemeinschaftlichem Nenner, und wählt man das hiebei willkürlich bleibende G_1 jenem gemeinschaftlichen Nenner gleich, so hat man hiemit den Vortheil erreicht, die Constanten $G_1, G_2, \dots. G_{2n}$ als ungebrochene, wenn auch transcendente Functionen von α dargestellt zu haben. Zur Bestimmung von α aber dient die aus dem vorliegenden Systeme durch Herausschaffen von $G_1, G_2, \dots\dots G_{2n}$ erhaltene Eliminationsgleichung, die man sich durch das bekannte combinatorische Verfahren aus den sämmtlichen Permutationen der $2n$ Elemente $1, 2, \dots\dots 2n$ gebildet denken kann, und die den gemeinschaftlichen Nenner liefert der Werthe der Unbekannten $G_1, G_2, \dots\dots G_{2n}$ aus folgendem anderen Systeme von $2n$ Gleichungen:

$$
(68)\quad \begin{array}{l}
(1,1)\, G_1 + (1,2)\, G_2 + \dots\dots\dots + (1,2n)\, G_{2n} = [1] \\
(2,1)\, G_1 + (2,2)\, G_2 + \dots\dots\dots + (2,2n)\, G_{2n} = [2] \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(2n,1)\, G_1 + (2n,2)\, G_2 + \dots\dots\dots (2n,2n)\, G_{2n} = [2n]
\end{array}
$$

Sie seien der Reihe nach:

$$
(69)\quad G_1 = \frac{K_1}{N},\; G_2 = \frac{K_2}{N}, \dots\dots\dots G_{2n} = \frac{K_{2n}}{N},
$$

so wird bekanntlich ein jeder der Zähler $K_1, K_2, \dots\dots K_{2n}$ aus dem einzelnen Nenner N gebildet, indem man einmal die erste, zur Unbekannten G_1 gehörige Vertikalreihe der Coefficienten, dann die zweite dem G_2 anhängende u. s. w. bis zur letzten, zu G_{2n} gehörigen durch die zweiten Theile der Gleichungen, die Symbole nämlich $[1], [2], \dots\dots [2n]$ ersetzt. Nachdem jedoch in unseren Gleichungen diese zweiten Theile sämmtlich verschwinden, so sind in denselben offenbar $K_1 = K_2 = \dots = K_{2n} = 0$

und nachdem nicht zu gleicher Zeit $G_1 = G_2 = \ldots\ldots = G_{2n} = 0$ sein darf, dem früher Gesagten nach, so ist nothwendig

$$N = 0 \tag{70}$$

unsere transcendente Eliminationsgleichung in α. Ihre im Allgemeinen unendlich vielen Wurzeln seien die Glieder der steigenden Reihe:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ldots\ldots\ \alpha_\infty \tag{71}$$

reeller oder imaginärer, positiver oder negativer Grössen, und irgend eine von ihnen sei α_r, so können nur für diese die Gleichungen (67) zusammen bestehen, und man kann ein Zusammenfallen der (68) mit den (67) für solche α nicht nur dadurch erzielen, dass man $[1] = [2] = \ldots\ldots = [2n] = 0$ setzt, sondern auch dadurch, dass man den sämmtlichen zweiten Theilen den gemeinsamen Werth $\alpha - \alpha_r$ ertheilt und zugleich dem α den speciellen Werth $\alpha = \alpha_r$ gegeben denkt. Man denke sich nun in N anstatt der ersten zu G_1 gehörigen Vertikalreihe der Coefficienten je den Werth $\alpha - \alpha_r$ geschrieben und hiedurch einen Ausdruck, wie $H_1\ (\alpha - \alpha_r)$, gewonnen, eben so anstatt eines jeden zur zweiten Vertikalreihe, d. h. zur Unbekannten G_2 gehörigen Coefficienten $(\alpha - \alpha_r)$ gesetzt und hiedurch einen Ausdruck, wie $H_2\ (\alpha - \alpha_r)$ gebildet u. s. w., so ist:

$$K_1 = H_1\ (\alpha - \alpha_r),\ K_2 = H_2\ (\alpha - \alpha_r), \ldots\ldots\ldots\ K_{2n} = H_{2n}\ (\alpha - \alpha_r) \tag{72}$$

und die den (68) Genüge leistenden Werthe erhalten jetzt die Gestalt:

$$G_1 = \frac{H_1(\alpha - \alpha_r)}{N},\ G_2 = \frac{H_2(\alpha - \alpha_r)}{N},\ \ldots\ldots\ G_{2n} = \frac{H_{2n}(\alpha - \alpha_r)}{N}. \tag{73}$$

Für $\alpha = \alpha_r$ gehen sie offenbar in diejenigen über, welche das System (67) für eben dieses specielle α erfüllen, erscheinen aber sämmtlich in der Form $\frac{0}{0}$, deren numerischer Werth durch das bekannte Verfahren des Differenzirens von Zähler und Nenner und nachherige Substitution von $\alpha = \alpha_r$ ermittelt wird.

$$G_1 = \frac{H_1'}{N'}\Big\}_{\alpha_r},\ G_2 = \frac{H_2'}{N'}\Big\}_{\alpha_r},\ \ldots\ldots\ldots\ G_{2n} = \frac{H_{2n}'}{N'}\Big\}_{\alpha_r} \tag{74}$$

Da wir aber wissen, dass es hier nur auf die Relationen $\frac{G_2}{G_1}, \frac{G_3}{G_1} \ldots \frac{G_{2n}}{G_1}$ ankomme und einer der mit G bezeichneten Coefficienten, etwa G_1, willkürlich bleibe, und da aus den vorliegenden Gleichungen:

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{H_2}{H_1}\Big\}_{\alpha_r},\ \frac{G_3}{G_1} = \frac{H_3}{H_1}\Big\}_{\alpha_r},\ \ldots\ldots\ \frac{G_{2n}}{G_1} = \frac{H_{2n}}{H_1}\Big\}_{\alpha_r} \tag{75}$$

folgt, so sieht man, dass nicht nur die (74), sondern auch die folgenden ungebrochenen Werthe unsere Gleichungen (67) erfüllen werden:

$$G_1 = H_1\Big\}_{\alpha_r},\ G_2 = H_2\Big\}_{\alpha_r},\ G_3 = H_3\Big\}_{\alpha_r}\ \ldots\ldots\ G_{2n} = H_{2n}\Big\}_{\alpha_r} \tag{76}$$

Wir gelangen so zu dem Schlusse, dass es lediglich auf die Bildung des gemeinschaftlichen N nach Krammer's combinatorischem Verfahren ankommt, und dass, wenn man diesen ermittelt hat, aus ihm allsogleich die entsprechenden Werthe von $G_1, G_2, \ldots G_{2n}$ hervorgehen dadurch, dass man einmal anstatt aller zur ersten Vertikalreihe, d. h. zu G_1 gehörigen Coefficienten die Einheit setzt, wodurch der allgemeine Ausdruck für G_1 gewonnen wird; ein andermal jeden der zur zweiten Vertikalreihe, d. h. zu G_2 gehörigen Coefficienten in Eins verwandelt, wodurch ein allgemeiner Ausdruck für G_2 gewonnen wird u. s. w.; endlich schreibt man noch anstatt der Coefficienten der letzten Vertikalreihe die Einheit und findet den allgemeinen Ausdruck für G_{2n}. Aus den allgemeinen gehen die speciellen Werthe dieser Constanten hervor, indem man α der Reihe nach in die Glieder der angeführten Reihe (71) verwandelt, so dass im Allgemeinen einem jeden der unendlich vielen Werthe von α ein anderes System von Constanten G, und in Folge dessen ein anderes Y angehört, gegeben gleichwohl als Function von α, oder α und x, durch eine und dieselbe allgemeine Formel. Bezeichnen wir nun mit $Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_\infty$ die aus der allgemeinen Formel hervorgehenden Werthe dieses Y für $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_\infty$, so bietet sich uns ein allgemeiner Werth dar für y, nämlich:

$$(77)\quad \begin{aligned} y = {} & Y_1 \left[A_1 \, Cos\, \alpha_1 t + \mathfrak{A}_1 \, Sin\, \alpha_1 t\right] + \\ & + Y_2 \left[A_2 \, Cos\, \alpha_2 t + \mathfrak{A}_2 \, Sin\, \alpha_2 t\right] + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + Y_r \left[A_r \, Cos\, \alpha_r t + \mathfrak{A}_r \, Sin\, \alpha_r t\right] + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & \mathop{S}_1^\infty \left\{ Y_r \left[A_r \, Cos\, \alpha_r t + \mathfrak{A}_r \, Sin\, \alpha_r t\right] \right\} \end{aligned}$$

und der nicht nur die Eigenschaft hat, die vorliegende Differentialgleichung zu erfüllen, sondern auch den Bedingungen an den Grenzen $x = 0$ und $x = a$ Genüge leistet, was auch die Constanten A und $\mathfrak{A}$ bedeuten mögen, also sowohl im Ganzen, als auch insbesondere in jedem seiner Theile, so, dass also diese y darstellende Summe in ihren einzelnen Gliedern, wenn auch nicht in allen, doch wenigstens in denjenigen, welchen reelle α angehören, je eine für sich und isolirt statt zu finden vermögende Schwingungsweise des Systemes andeutet, denen beziehlich, falls sie wirkliche Schwingungen sind, die Oscillationsdauer $\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}, \ldots\ldots \frac{2\pi}{\alpha_r}$ angehören, und die in der Zeit mit ungeschwächter Intensität fortbestehen können. Diess gilt jedoch nur für die reellen α. Für imaginäre Werthe verhält sich die Sache anders und namentlich liefern die rein imaginären von der Form $\pm \mu \sqrt{-1}$ zu y ein Glied, welches keinen schwingenden Zustand repräsentirt, die aus einem reellen und imaginären Theile zusammengesetzten, wie $\alpha = \lambda + \mu \sqrt{-1}$, aber ein Glied, dem als Factor eine Exponentialgrösse anhängt, deren Exponent der Zeit t proportionirt ist, und die je nach der negativen oder positiven Beschaffenheit des zu diesem t gehörigen Coefficienten entweder ein mit der Zeit erfolgendes Erlöschen der Schwingung andeutet, oder einen Widerspruch mit der Hypothese sehr kleiner Veschiebungen y, in welch' letzterem Falle die betreffenden Glieder von y, als den Grundvoraussetzungen widersprechend, gänzlich auszulassen wären. Hiezu fügen wir noch die Bemerkung, dass zur Durchführung

dieser Analysis ein allgemeines mit $2n$ Constanten G_1, G_2, ... G_{2n} verbundenes Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung (61) unerlässlich sei, denn hätte man nur ein particuläres, mit weniger als $2n$ solchen Constanten verbundenes erhalten, so könnte vermittelst desselben das System der Gleichungen (67) nicht erfüllt, und somit kein in Summenform erscheinendes y gewonnen werden. Da sich's aber treffen kann, dass ein in complizirter Form gewonnenes Integral der (61) zwar wie ein allgemeines aussieht, es aber nicht ist, weil die η_1, η_2, ... η_{2n} nicht sämmtlich von einander verschieden sind, so liegt in dieser Analysis zugleich ein Kennzeichen der Allgemeinheit des gewonnenen Integrales (63), und es ist überflüssig, sich hievon die Ueberzeugung nach §. 8 des II. Abschnittes zu verschaffen, weil man sicher sein kann, dass, wenn man auf dem betretenen Wege wirklich zu Werthen von G_1, G_2, ... G_{2n} in Function von α gelangt ist, man auch nothwendig das allgemeine Integral habe.

Die eben auseinandergesetzte Methode, sich Genüge leistende Werthe zu verschaffen, die zugleich die Bedingungen an den Grenzen erfüllen, hat zwar vorzüglich Schwingungsprobleme im Auge, bei welchen die Differentialgleichung stets die Form der (51) trägt, allwo die Differentialquotienten nach x von jenen in t gesondert erscheinen und nach der letzteren Variablen lediglich ein zweiter Differentialquotient isolirt auftritt. Man überzeugt sich jedoch nach einiger Ueberlegung, dass die Giltigkeit dieser Methode an diese Form nicht gebunden sei. Es könnten in der Differentialgleichung auch 4te, 6te .... Differentialquotienten von y nach t erscheinen, wenn nur die Coefficienten die Veränderliche t nicht in sich enthalten, so wird man immer wieder von der Substitution (52) ausgehen können und wird durch dieselbe zu ähnlichen Ergebnissen geführt werden. Auch bei Problemen der Wärmelehre hat man den ähnlichen Gang der Rechnung einzuschlagen. Es besteht zwar der Unterschied zwischen der Differentialgleichung (51) und der einer Wärmegleichung, dass anstatt eines zweiten Differentialquotienten von y nach t ein erster auftritt. Diess begründet dann eine Veränderung der Substitution, von welcher man auszugehen hat: anstatt der trigonometrischen (52) nämlich wird man die folgende exponentielle erkiesen:

$$y = e^{\alpha t}\eta \tag{78}$$

In Folge dessen wird anstatt $-\alpha^2$ das Rechnungselement α treten; das übrige Verfahren jedoch bleibt dasselbe und der in Summenform erscheinende allgemeine Werth von y ist von dem früher erhaltenen (64) nur insoferne unterschieden, als das unter dem Summenzeichen vorhandene Produkt einen monomischen, t enthaltenden Factor von der Form $Ae^{\alpha t}$ birgt, anstatt des alldort vorhandenen binomischen $A\ Cos\ \alpha t + \mathfrak{A}\ Sin\ \alpha t$.

Aber auch anders gestaltete Differentialgleichungen, in welchen die Variablen x und t gesondert sind, so dass auf der einen Seite des Gleichheitszeichens eine beliebige lineare Function von Differentialquotienten der abhängigen Variablen y genommen nach t, versehen mit constanten Coefficienten, vorhanden ist, lassen sich auf dieselbe Weise integriren. In der That, man nehme an, die Gleichung sei:

$$X_{2n}\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}+X_{2n-1}\frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}}+\ldots\ldots\ldots+X_1\frac{dy}{dx}+X_0y=F\left[\frac{d}{dt}\right]y \tag{79}$$

so geht man von der zuletzt angeführten Substitution aus und verwandelt hiemit die eben vorgelegte Gleichung offenbar in:

$$X_{2n}\frac{d^{2n}\eta}{dx^{2n}}+X_{2n-1}\frac{d^{2n-1}\eta}{dx^{2n-1}}+\ldots\ldots\ldots+X_1\frac{d\eta}{dx}+X_0\eta=\eta.F(\alpha) \tag{80}$$

allein, was man sich auch immer unter α für einen bestimmten Werth denken mag, z. B. $\alpha=\theta$, so ist doch die Substitution (78) nicht die einzige, die zu dieser Differentialgleichung führt; es ist vielmehr gestattet, anstatt dieses erkiesenen α, d. h. $\alpha=\theta$ auch jede andere Wurzel der folgenden algebraischen Gleichung zu setzen:

$$F(\alpha)=F(\theta)$$

Dieser Wurzeln sind m an der Zahl, wenn die algebraische Function F vom Grade m ist. Sie seien:

$$\alpha=\theta,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots\ldots\ldots\ \theta_{m-1}$$

mithin gehören zu einerlei der Gleichung (80) Genüge leistenden η Factoren in t der Substitutionsgleichung (78) m an der Zahl

$$e^{\theta t},\ e^{\theta_1 t},\ e^{\theta_2 t},\ \ldots\ldots\ldots\ e^{\theta_{m-1}t}.$$

Diess gibt dann offenbar auf dem hier betretenen Wege ein allgemeines Integral der partiellen Differentialgleichung in Summenform, welches die folgende Gestalt hat:

$$y=\mathrm{S}\left[\left\{A_0e^{\theta t}+A_1e^{\theta_1 t}+A_2e^{\theta_2 t}+\ldots\ldots+A_{m-1}e^{\theta_{m-1}t}\right\}\left\{G_1\eta_1+G_2\eta_2+G_3\eta_3\ldots\ldots G_{2n}\eta_{2n}\right\}\right] \tag{81}$$

und durch schickliche Wahl der mit G bezeichneten Constanten und der θ gezwungen werden kann, Glied für Glied die Bedingungen an den Grenzen zu erfüllen, während die andern, A genannten Constanten, zu sonstigen Zwecken der Verwendung z. B. Darstellung der anfänglichen Erregungsweise noch übrig bleiben.

§. 3.

Das Reflexionsproblem.

Der nächst vorhergehende Paragraph erledigt die Behandlung linearer materieller Systeme insoferne, als darin gezeigt wird, wie man sich Genüge leistende Werthe verschaffen kann, die noch dazu die Eigenschaft besitzen, gewisse Bedingungen an zwei Punkten des Systemes, etwa $x=0$ und $x=a$ zu erfüllen und zwar in unendlicher Anzahl, mit anderen Worten, man lernt alle einfachen Schwingungsweisen des Systemes kennen. Die besonderen Punkte, auf welche diese Bedingungen Bezug nehmen, kann zwar der Analyst auffassen als Grenzpunkte des Systemes und kann sich einbilden, dass dasselbe bloss von $x=0$ bis $x=a$ reiche. Die erhaltenen Integrale wissen aber nichts davon und

geben auch ausserhalb dieser Grenzen von der Nulle verschiedene Werthe der abhängigen Veränderlichen, die die Bedeutung einer Bewegungsgrösse hat. Diese Formeln sprechen also im Grunde von einem ins Unendliche ausgedehnten linearen Systeme, an dessen allen Punkten von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ solche Bewegungen vorhanden gedacht werden, die sich an den besonderen Orten $x = 0$ und $x = a$ in einer Weise überdecken, oder, wie man zu sagen pflegt, interferiren, dass die aufgestellten Bedingungsgleichungen zu einer jeden beliebigen Zeit erfüllt bleiben. Diese Bedingungsgleichungen sind ihrer Form nach linear aus den Differentialquotienten der unabhängigen Veränderlichen zusammengesetzt.

Es kann aber noch andere Punkte im Systeme geben, an welchen man die zu erfüllenden Bedingungen nicht kennt, sondern erst sucht. Diese sind namentlich vorhanden bei materiellen Systemen, die aus mehreren heterogenen Theilen von verschiedenen Eigenschaften z. B. verschiedener Dichte, Querschnitt, Elasticität zusammengesetzt sind, und namentlich sind es die Trennungspunkte dieser verschiedenen Bestandtheile, an denen man den Vorgang mit Hilfe des Calculs zu erkennen wünscht. Zur genaueren Einsicht in dasjenige, was hier gemeint ist, wird es dienlich sein, ein Paar Beispiele anzuführen. Eine Saite oder Kette ist aus zwei Stücken von verschiedener Stärke zusammengesetzt, die Masse der Längeneinheit bei dem einen ist m, bei dem anderen M. Man verlangt nicht zu wissen, welche Schwingungen der erste Theil oder der zweite einer solchen Saite fähig sei, sondern, welche Schwingungen gleichzeitig in beiden Abtheilungen vorhanden zu sein vermögen und wie sich die Bewegung von einer derselben auf die andere übertrage, namentlich aber wünscht man die an der Trennungsstelle von einem Stücke auf das andere überführte und auch die von eben diesem Trennungsstück reflectirte Bewegung kennen zu lernen. Es liegt desshalb auf der Hand, dass hier eine allgemeine Auflösung des Reflexionsproblemes gemeint sei, in der dasjenige, was der vorhergehende Paragraph gebracht hat, enthalten sein muss als specieller Fall, der noch dazu einen imaginären, in aller Strenge in der Natur nicht vorfindigen Zustand bezeichnet. In der That, wenn bei einer schwingenden Saite z. B. die Bedingungen hinzugesetzt werden im Sinne des Inhaltes des vorhergehenden Paragraphes, dass für $x = 0$ auch die Schwingungsgrösse y gleich Null sein muss, ferner für $x = a$ ebenfalls $y = 0$ bestehe, d. h. dass die Saite zwei feste Punkte besitze, so ist darauf zu bemerken, dass man feste Punkte in der Natur nur annäherungsweise erzielen kann dadurch, dass man kleinere und desshalb beweglichere Massen mit grösseren und desshalb unbeweglicheren in Verbindung bringt. Sind die letzteren gross genug, so lassen sich allerdings die Verbindungspunkte nahe genug als fest annehmen. Gleichwohl wird jede Bewegung allmählich auf die grösseren Massen übertragen und erlischt in der kleineren. Die zwei festen Punkte einer Saite sind daher nur ein hypothetischer Zustand, in der Wirklichkeit aber besteht ein heterogenes materielles System aus mehreren Theilen von verschiedener Masse zusammengesetzt. Würde man nur nach den Bewegungen forschen, deren der erste mit der Masse m versehene Bestandtheil der zweitheiligen Saite fähig ist, so hätte man die bekannte Differentialgleichung:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = s \frac{d^2y}{dx^2} \tag{82}$$

zu integriren, wo s die Spannung in der Saite bedeutet. Würde man hingegen nur nach den Schwingungen des zweiten Bestandtheiles fragen, so hätte man die Gleichung:

$$M \frac{d^2y}{dt^2} = s \frac{d^2y}{dx^2} \tag{83}$$

der Integration zu unterwerfen. Keine von diesen beiden jedoch lehrt, nach welchem Gesetze sich die Bewegung an der Trennungsstelle von einer Abtheilung auf die andere übertrage und wir wissen vermöge derselben nur, dass einem jeden Stücke des materiellen Systemes eine andere Differentialgleichung eigenthümlich angehöre.

Ein zweites Beispiel biethet die Lichtlehre. Zwei verschiedene lichtfortpflanzende Mittel sind an einem gewissen Orte z. B. in der Nähe der Coordinatenebene der yz von einander geschieden durch eine Trennungsebene oder Trennungsschichte, und man verlangt zu wissen, nach welchen Gesetzen Lichtschwingungen, in dem ersten Mittel erregt, an der Trennungsstelle dem zweiten mitgetheilt und ins erste wieder reflectirt werden, so hat man auch hier wieder zwei Abtheilungen des materiellen Systemes, deren jeder eine eigene Differentialgleichung angehört. Bedingungen jedoch an der Trennungsstelle sind keine gegeben, im Gegentheile, man wünscht den Vorgang allda mit Hilfe des Calculs kennen zu lernen. Diese Beispiele genügen, um das Reflexionsproblem in folgender Fassung einigermassen verständlich zu machen:

Ein materielles System ist aus mehreren, vorderhand nur zwei Theilen von verschiedenen Eigenschaften zusammengesetzt, jedem entspricht eine andere Differentialgleichung. Welche sind unter so gedachten Umständen die Gesetze derjenigen Schwingungen, die gleichzeitig vorhanden sein können in beiden Theilen eines solchen heterogenen Systemes, und welcher ist namentlich der Vorgang der Erscheinungen an der Trennungsfläche.

Angenommen, die Differentialgleichung der Bewegung besitze in der ersten Abtheilung des materiellen Systemes folgende, mit der (51) congruente Gestalt:

$$a_{2n} \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + a_{2n-1} \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} + \dots\dots\dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{84}$$

in der zweiten Abtheilung hingegen:

$$A_{2n} \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + A_{2n-1} \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} + \dots\dots\dots + A_1 \frac{dy}{dx} + A_0 y = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{85}$$

so sind die hier vorkommenden Coefficienten, bezeichnet mit a und A, meistentheils, wenn auch nicht immer und nothwendiger Weise, constant, mindestens wird man an die Lösung des Reflexionsproblemes vorerst in den einfacheren Fällen gehen, wo in beiden Abtheilungen des materiellen Systemes Dichte, Spannung und Elasticität von Punkt zu Punkt sich nicht verändern, die Nähe der Trennungsstelle ausgenommen, mithin constante Coefficienten in den Differentialgleichungen auftreten. Weder die eine nun, noch die andere der beiden Differentialgleichungen und auch nicht beide zusammen vermögen etwas zu lehren über den Vorgang an der Trennungsfläche, sondern man muss die Entwicklung der Differential-

gleichung der Bewegung von Neuem vornehmen für ein solches System, welches seine Beschaffenheit von Punkt zu Punkt ändert nach einem noch unbestimmten Gesetze. Diess unterliegt gewöhnlich keinen Schwierigkeiten, nur sind die Coefficienten der so erhaltenen Differentialgleichung nicht mehr constant, sondern veränderlich und diess zwar so lange in unbestimmter Weise, als das Gesetz der Aenderungen des materiellen Systemes von Punkt zu Punkt ein unbestimmtes bleibt. So z. B. gehört einer schwingenden Saite, bei welcher die Längeneinheit mit der unbestimmten Masse μ begabt ist, unter μ eine beliebige Function von x verstanden, die folgende Differentialgleichung an:

$$\mu \frac{d^2y}{dt^2} = s \frac{d^2y}{dx^2} \qquad ($$

allwo, wie gesagt, der Coefficient μ ein in annoch unbestimmter Weise veränderlicher ist. Ebenso wird man sich auch in einem jeden anderen Falle eine dritte Differentialgleichung verschaffen müssen mit unbestimmt veränderlichen Coefficienten, giltig für ein materielles System von beliebigem Baue. Sie sei die folgende:

$$X_{2n} \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + X_{2n-1} \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} + \dots\dots\dots + X_1 \frac{dy}{dx} + X_0 y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad ($$

In dieser müssen nun die früher angeführten zwei Gleichungen (84) und (85) enthalten sein als specielle Fälle, mithin müssen die Coefficienten:

$$X_{2n},\ X_{2n-1},\ \dots\dots\dots\ X_1,\ X_0$$

solche Functionen von x sein, die sich in dem ersten Mittel, oder in der ersten Abtheilung des schwingenden Systemes reduziren auf die folgenden anderen constanten, oder auch variablen Coefficienten:

$$a_{2n},\ a_{2n-1},\ \dots\dots\dots\ a_1,\ a_0$$

im zweiten Mittel hingegen, also für alle Werthe von x, die Punkten der zweiten Abtheilung angehören, muss eine Reduction derselben stattfinden auf die folgende andere Coefficientengruppe:

$$A_{2n},\ A_{2n-1},\ \dots\dots\dots\ A_1,\ A_0$$

Es sind mithin die X_{2n}, X_{2n-1}, ... X_1, X_0 solche Functionen von x, die an einer gewissen Stelle, d. h. in der Nähe eines gewissen Werthes von x urplötzlich und gleichsam mit einem Sprunge nicht nur ihren numerischen Werth, sondern auch ihre Form verändern können und zwar in einer Weise, die anzugeben uns weder durch den Calcul, noch durch das Experiment gelingen dürfte. Wir wissen z. B. bei einer gespannten Saite, dass μ eine solche Function von x sei, die an der Trennungsstelle der beiden verschiedenen Saitenstücke, etwa für $x = 0$ urplötzlich vom Werthe m zu dem anderen überspringt. Nach welchem Gesetze diess geschehe, wird in aller Strenge wohl Niemand durch Messung erkunden; allein es ist höchst wahrscheinlich, dass von der speciellen Art, durch welche der Uebergang von m in M bei der Function μ bewerkstelligt wird, die Erscheinung der Brechung und Reflexion ganz und gar nicht abhängig seien, dass man sie schon allgemein kenne, wenn man sie nur bei irgend einer vorausgesetzten Weise des Ueberganges in der Nähe des $x = 0$ zu erkunden vermag.

Auch in der Lichtlehre trifft man denselben Sachverhalt. Ein Mittel z. B. Luft geht an einer Stelle in ein anderes z. B. Glas über. Ob dieser Uebergang plötzlich bewerkstelligt wird, oder in einer ausserordentlich dünnen Schichte, die die beiden Mittel trennt, und die ihrem Baue nach weder Luft ist noch Glas, sondern zwischen beiden ein gewisses Mittelding, können wir bei dem jetzigen Zustande der Wissenschaft weder ergründen durch den Calcul, noch durch das Experiment. Letzteres scheint das Wahrscheinlichere, aber das Gesetz des Ueberganges ist und bleibt uns denn doch völlig unbekannt. Gleichwohl ist es höchst wahrscheinlich, dass von demselben der Verlauf der Erscheinungen, insoferne er den Beobachtungen unterliegt, wenig oder gar nicht abhängig sei, dass es mithin nur darauf ankomme, denselben kennen zu lernen bei irgend einem, willkürlich gewählten, aber möglichst allgemeinen und umfassenden Gesetze des Ueberganges. Hiebei soll nicht in Abrede gestellt werden, dass, wenn in der Analysis selbst der Beweis dieser Unabhängigkeit zu finden wäre, oder der Bedingungen, unter welchen sie vorhanden ist, diess als ein besonderer Vortheil hervorzuheben wäre. Die Ungewissheit nun, in der wir uns befinden in Bezug auf die Trennungsstelle zweier solcher Medien, trägt sich nun auch auf die Coefficienten X_{2n}, X_{2n-1}, ... X_1, X_0 über. Wir besitzen gar kein Mittel, sie ihrer wahren Gestalt nach anzugeben, uns ist nur bekannt, dass ein jedes X plötzlich vom Werthe a zu dem ganz anders gestalteten A übergehe. Gelegentlich wird $a = A = 0$ ausfallen; dann wird das zum Ersatz der verschwindenden Coefficienten in der (87) vorhandene X gleichwohl in der Trennungsstelle einen von Null verschiedenen, uns gänzlich unbekannten Werth annehmen können, diessseits und jenseits derselben aber in aller Strenge der Nulle gleich werden. Es wird uns somit von ihnen noch viel weniger bekannt sein, als von den übrigen; höchstens werden wir von ihm sagen können, dass er nicht unendlich sei, weil es unendliche Wirkungen in der Natur nicht gibt, dass er mithin der Dicke der Trennungsschichte weder direct, noch umgekehrt proportional sei, und es wird in Folge dieser Ungewissheit scheinen, als ob sich die mathematische Analysis derzeit noch gar nicht an die Lösung des Reflexionsproblemes in der Fassung wagen sollte, in welcher sie hier angestrebt wird.

Allein die mathematische Analysis hat oft schon Aehnliches gethan. Sie hat sehr oft schon dasjenige, was im Meere der Ungewissheit und Unbestimmtheit als sicher und bestimmt festgestellt worden ist, zum Gegenstande ihrer Betrachtungen erhoben und daraus die werthvollsten Folgerungen gezogen. Belege hiezu liefert der Probabilitätscalcul, noch mehr aber die Bewegungstheorie flüssiger Körper. Unter ein Paar sehr speciellen Voraussetzungen, Hypothese des Parallelismus der Schichten und Hypothese der fadenförmigen Bewegung genannt, hat sie erkundet, dass die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers, die der Druck = als Fallhöhe entsprechende sei, und es zweifelt niemand daran, dass eben diese Geschwindigkeit auch unter den unzähligen anderen Voraussetzungen, die zwischen den beiden genannten Hypothesen als Extremen liegen, die wenigstens sehr nahe dieselbe Formel gegebene sei.

Es ist uns mithin auch hier gestattet, zu sprechen, beiläufig wie folgt: Wenn uns die innerste Natur der Functionen X_{2n}, X_{2n-1}, ... X_0 nicht bekannt ist und auch schwer ...ein wird, so wird es doch immerhin gestattet sein, zu forschen nach denjenige

rungen, die sich nach den bekannten wenigen Eigenschaften derselben ableiten lassen, also nach den Phänomenen der Brechung und Reflexion, die unmittelbare Folgen eben dieser Eigenschaften sind und eben so gut stattfinden müssten, ob jetzt die beiden verschiedenen Mittel durch eine Trennungsfläche gesondert sind, oder durch eine sehr dünne Trennungsschichte. Wäre man zur Kenntniss all' dieser Erscheinungen gekommen, so würde es sich dann am Ende von selbst ergeben, welche Phänomene der Brechung und Reflexion specifisch der Dichte und den anderen Eigenschaften der Trennungsschichte zuzuschreiben seien. Um aber eine solche Untersuchung einzuleiten, wird es vollkommen genügen, den in diesem Werke oft betretenen Weg wieder einzuschlagen, nämlich von speciellen und willkürlich gewählten X_{2n}, X_{2n-1} ..... X_1, X_0 auszugehen, sodann aber durch eine nachträgliche Untersuchung und in viel geübter Weise rückschliessend zu allgemeineren Formen wieder zurückzukehren.

Es käme also gegenwärtig darauf an, für X_{2n}, X_{2n-1}, ... X_0 solche Functionen willkürlich hinzustellen, die die obgenannte Eigenschaft besitzen, von den Werthen a_{2n}, a_{2n-1}, ... a_0 in der nächsten Nähe eines bestimmten x, etwa $x = 0$, in die anderen A_{2n}, A_{2n-1}, ... A_0 sich zu verwandeln. Die Wissenschaft besitzt in ihrem gegenwärtigen Zustande bereits einen gewissen, wenn auch nicht sehr grossen Vorrath von hiezu dienlichen Functionsformen. Dergleichen sind das bekannte Fourier'sche Doppelintegral, dann verschiedene andere bestimmte Integrale, die die Eigenschaft der Unstetigkeit, oder der plötzlichen Werthveränderung besitzen, vorzüglich tauglich jedoch dürfte sich bei den Reflexionsproblemen eine Transcendente erweisen, die meines Wissens zuerst Libri zum Gegenstande gründlicher Betrachtung gemacht hat, nämlich die Exponentielle 0^{0^x}, welche die Eigenschaft besitzt, für negative und verschwindende x zu verschwinden, für positive hingegen den Werth Eins anzunehmen. Ein kleiner Uebelstand bei ihrer Verwendung ist, dass ihr die Unbestimmtheit der unter der Form $^0/_0$ erscheinenden Grössen ebenfalls anhängt. Diesen zu vermeiden, thut man gut, an die Stelle dieser Exponentielle, die Exponentialfunction dritter Classe:

$$\chi = e^{-\beta e^{-\gamma x}}$$

zu setzen, die, ohne dieser Unbestimmtheit zu unterliegen, doch dieselbe Eigenschaft besitzt, wenn man sich unter β und γ unbeschränkt wachsende Zahlen vorstellt. Um nun klar einzusehen, auf welche Weise man von dieser Function zur Darstellung von X_{2n}, X_{2n-1}, ... X_0 Gebrauch zu machen vermöge, wird es nöthig sein, die Eigenschaften derselben vorläufig kennen zu lernen. Diess fängt man am besten damit an, dass man sich die krumme Linie vergegenwärtigt, die aus der geometrischen Construction der Gleichung (88) hervorgeht, in welcher x und χ als zusammengehörige orthogonale Coordinaten gedacht werden. Zur Discussion dieses geometrischen Gebildes gehört aber die Kenntniss der Tangenten, Wendepuncte u. s. w., die man sich bekanntlich durch den Act des Differenzirens verschafft. Um diess mit mehr Bequemlichkeit thun zu können, statuiren wir:

$$e^{-\gamma x} = \tau\ , \quad \text{somit} \quad \chi = e^{-\beta\tau}$$

und erhalten sodann:

$$\tau' = -\gamma\tau\ , \quad \chi' = \beta\gamma\chi\tau$$

…erfen wir jetzt die Function χ behufs der Ermittlung etwa vorhandener Wendepun…
…n Differentiation, so erhalten wir:

$$\chi'' = \beta^2\gamma^2\chi\tau\left(\tau - \frac{1}{\beta}\right)$$

…t es nun einen Wendepunct der Curve, so muss das demselben zugehörige x die Gleichung $\chi''=0$ …füllen, was entweder: $\chi = 0$ oder $\tau = 0$ oder $\tau = \frac{1}{\beta}$ erheischt. Die ersten zwei von diesen drei …ngaben bezeichnen keinen eigentlichen Wendepunct, nur die dritte entspricht einem solchen, wie sich nachher ergeben soll, und es folgt ferner aus:

$$\tau = e^{-\gamma x} = \frac{1}{\beta}, \quad x = \frac{1}{\gamma}\log\beta\,.$$

…)

Diesem kraft der Voraussetzung sehr grosser β und γ sehr nahe an Null liegenden Werthe von x entspricht:

$$\chi = \frac{1}{e}, \quad \chi\tau = \frac{1}{\beta e} \tag{93}$$

Nun bilden wir uns folgendes Schema zusammengehöriger Werthe:

(94)

$x < 0$,	$= 0$,	$= \frac{\log\beta}{\gamma}$,	$= \frac{2\log\beta}{\gamma}$,	$> \frac{2\log\beta}{\gamma}$
$\tau = \infty$,	1,	$\frac{1}{\beta}$,	$\frac{1}{\beta^2}$,	0
$\chi = 0$,	0,	$\frac{1}{e}$,	$e^{-\frac{1}{\beta}} = 1 - \frac{1}{\beta}$,	1
$\chi\tau = 0$,	0,	$\frac{1}{\beta e}$,	0,	0

Die gesuchte Curve fällt also auf der Seite der negativen Coordinatenaxe der x allenthalb… mit der geradlinigen Coordinatenaxe zusammen und diess zwar bis zum Anfangspuncte, dann wendet sich in der Gestalt des bekannten Integralzeichens plötzlich und steil nach aufwärts, bekommt für sehr kleinen Werth von $x = \frac{\log\beta}{\gamma}$ einen Wendepunct, dem die Ordinate $\frac{1}{e}$ angehört, und ver… delt sich bei dem ebenfalls sehr kleinen $x = \frac{2\log\beta}{\gamma}$ wieder in eine gerade, zur Coordinatena… x parallele Linie, geführt im Abstande gleich Eins von dieser Axe. Zu gleicher Zeit haben w… zweite Function von besonderen Eigenschaften kennen gelernt, $\chi\tau$ nämlich. Diese ist beständi… Null auf der Seite der positiven sowohl, wie auch der negativen Coordinaten und nur in … verschwindender x bekömmt sie von Null verschiedene Werthe, deren grösster $\frac{1}{\beta e}$ ist. Bei… uns zur Darstellung der Gleichungscoefficienten von Nutzen sein.

In der That, um einen Coefficienten $\mathbf{X}$ zu erzielen, begabt mit der Eigenscha… … x beständig den übrigens von x abhängigen oder unabhängigen Werth a zu bie…

für alle positiven x in das ebenfalls von x abhängige oder unabhängige A zu übergehen, hat man nur X zu nehmen, wie es die folgende Formel gibt:

$$X = a + \chi(A - a) \tag{95}$$

zugleich findet sich dann der Uebergang von a in A nicht plötzlich und sprungweise bewirkt, sondern in einer Trennungsschichte, welche die Dicke $\frac{2}{\gamma}$ $log\ \beta$ hat, die aber auch nach Belieben in eine Trennungsfläche verwandelt werden kann, dadurch, dass man β und γ unendlich werden lässt.

Auch die Darstellung der Gleichungscoefficienten der zweiten Art, die die Eigenschaft besitzen, diesseits und jenseits der Trennungsfläche Null zu sein, und nur in der nächsten Nähe derselben oder in der Trennungsschichte selbst von Null verschiedene Werthe anzunehmen, kann durch die Functionen bewerkstelligt werden, die wir eben kennen gelernt haben. Ein solcher Ausdruck wäre z. B.

$$X = T\beta e\chi\tau \tag{96}$$

verschwindend für positive und negative x hat er nur in der Trennungsschichte selbst von Null verschiedene Werthe, deren grösster T ist.

Um zu einer möglichst genauen und vollständigen Kenntniss der Functionen χ, $\chi\tau$ und all' derjenigen, die sich aus χ und τ mannigfach zusammensetzen lassen, zu gelangen, was schon desshalb nothwendig ist, weil man Differentialgleichungen mit solchen Coefficienten zu integriren hat, mithin mit diesen analytischen Elementen ausgedehnte Rechnungen vollführen muss, entwickeln wir die ferneren Differentialquotienten von χ, nämlich: χ''', χ^{IV} ..... $\chi^{(n)}$. Sie sind:

$$\chi' = \beta\gamma\chi\tau,\ \chi'' = \beta^2\gamma^2\chi\tau\left(\tau - \frac{1}{\beta}\right),\ \chi''' = \beta^3\gamma^3\chi\tau\left(\tau^2 - \frac{3\tau}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right),\ \chi^{IV} = \beta^4\gamma^4\chi\tau\left(\tau^3 - 6\frac{\tau^2}{\beta} + 7\frac{\tau}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^3}\right) \tag{97}$$

....

Hiemit fällt die Gestalt der allgemeinen Formel für den n^{ten} Differentialquotienten von χ bereits in die Augen. Sie ist nämlich offenbar:

$$\chi^{(n)} = \beta^n\gamma^n\chi\tau\left(\tau^{n-1} + (1)_n\frac{\tau^{n-2}}{\beta} + (2)_n\frac{\tau^{n-3}}{\beta^2} + (3)_n\frac{\tau^{n-4}}{\beta^3} + \ldots\ldots + (n-1)_n\frac{1}{\beta^{n-1}}\right) \tag{98}$$

Um zu den Werthen der Coefficienten: $(1)_n$, $(2)_n$, $(3)_n$, ... $(n-1)_n$ zu gelangen, unterwerfen wir diese Formel direct einer nochmaligen Differentiation und erhalten:

$$\chi^{(n+1)} = \beta^{n+1}\gamma^{n+1}\chi\tau\left(\tau^n + \frac{\tau^{n-1}}{\beta}((1)_n - n) + \frac{\tau^{n-2}}{\beta^2}((2)_n - (n-1)(1)_n) + \ldots\ldots\right) \tag{99}$$

Andererseits wird die Formel (98) als eine allgemeine für jedes n giltige aufgefasst, soll daher auch dann noch zurecht bestehen, wenn man n durch $n+1$ ersetzt. Hiedurch ergibt sich ein zweiter Werth von $\chi^{(n+1)}$, nämlich:

$$\chi^{(n+1)} = \beta^{n+1}\gamma^{n+1}\chi\tau\left(\tau^n + (1)_{n+1}\frac{\tau^{n-1}}{\beta} + (2)_{n+1}\frac{\tau^{n-2}}{\beta^2} + \ldots\ldots\right) \tag{100}$$

Dieser muss mit dem früher erhaltenen Glied für Glied zusammenfallen, sohin hat man folgende Beziehungsgleichungen für die in beiden vorkommenden Coefficienten:

$$
\begin{aligned}
(1)_{n+1} &= (1)_n - n \\
(2)_{n+1} &= (2)_n - (n-1)\,(1)_n \\
(3)_{n+1} &= (3)_n - (n-2)\,(2)_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(r)_{n+1} &= (r)_n - (n-r+1)\,(r-1)_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{101}
$$

Sie sind sämmtlich Differenzengleichungen von einfacher Form und es gibt die erste von ihnen, wenn man in ihr der Reihe nach n in $n-1$, $n-2$, ... 2, 1 verwandelt:

$$
\begin{aligned}
(1)_n &= (1)_{n-1} - (n-1) \\
(1)_{n-1} &= (1)_{n-2} - (n-2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(1)_2 &= (1)_1 \;-\; 1
\end{aligned}
\tag{102}
$$

Diese Gleichungen geben addirt mit Rücksicht auf $(1)_1 = 0$, wie aus der ersten der Gleichungen (97) zu ersehen, den Werth des ersten Coefficienten $(1)_n$ in Function des Stellenzeigers n, nämlich:

$$
(1)_n = -\frac{n(n-1)}{2}
\tag{103}
$$

Jetzt gehen wir zur zweiten der Bestimmungsgleichungen (101) und führen in dieselbe anstatt n der Reihe nach, $n-1$, $n-2$, ... 3, 2 ein. Hiedurch ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
(2)_n &= (2)_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)^2}{2} \\
(2)_{n-1} &= (2)_{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)^2}{2} \\
(2)_{n-2} &= (2)_{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)^2}{2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(2)_3 &= (2)_2 \;+\; 1
\end{aligned}
\tag{104}
$$

Sie geben, addirt, mit Rücksicht auf $(2)_2 = 0$, wie aus der zweiten der (97) zu ersehen,

$$
(2)_n = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{2.3.4}
\tag{105}
$$

Ebenso gibt jetzt die Integration der dritten der Differenzengleichungen (101), die auch so geschrieben werden kann:

$$
\Delta(3)_n = -\frac{n(n-1)(n-2)^2(3n-5)}{2.3.4}
$$

ausgeführt nach den bekannten Methoden, den folgenden Werth:

$$(3)_n = -\frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2.3.4.2} \tag{106}$$

Genau auf dieselbe Weise ergibt sich aus der folgenden der Bestimmungsgleichungen (101):

$$(4)_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)[15n^3-270n^2+1805n-4102]}{2.3.4.5.2.3.8} \tag{107}$$

Von nun an compliziren sich aber die Ausdrücke der folgenden Coefficienten in Function von n und es ist auch nicht gut, ein einfaches Gesetz ihrer Bildung zu entdecken mit Ausnahme des recurrenten im Systeme der Bestimmungsgleichungen (101) enthaltenen.

Man hätte zur Ermittlung dieser Coefficienten auch einen anderen Weg der Bestimmung einschlagen können, zu diesem Zwecke von der allgemeinen Formel (230) Gebrauch machend, die für den n^{ten} Differentialquotienten von $e^{\int\varphi dx}$ Seite 134 unter symbolischer Form enthalten und durch eine Tabelle Seite 143 erläutert ist. Offenbar findet beides, Formel und Tabelle im gegenwärtigen Falle Anwendung, wenn man

$$\int\varphi dx = -\beta e^{-\gamma x}, \text{ also } \varphi = \beta\gamma e^{-\gamma x} = \beta\gamma\tau$$

setzt. Bedient man sich nun der Tabelle, so erhält man, die in derselben ersichtlichen Glieder gruppenweise zusammennehmend, so zwar, dass alle die mit derselben Potenz von τ als Factor verbundenen in eine Summe vereinigt werden, genau dieselben Coefficientenwerthe, die eben durch Integration der Differentialgleichungen erhalten worden sind. Bedient man sich hingegen der symbolischen Formel, so ist es leicht, einen ebenso gestalteten, d. h. symbolischen Ausdruck von $\chi^{(n)}$ im Ganzen sowohl, wie auch zerlegt in die einzelnen Bestandtheile, zu gewinnen. Er ist der folgende:

$$\chi^{(n)} = \beta^n\gamma^n\chi\tau.\mathrm{S}\left[(-1)^p \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\ldots\ldots(1!)^{\alpha_1}(2!)^{\alpha_2}(3!)^{\alpha_3}\ldots} \beta^{m-n}\tau^{m-1}\right]$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + \ldots &= n \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots\ldots &= m \\ (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots\ldots &= p) \end{aligned} \tag{108}$$

$$= \beta^n\gamma^n\chi\tau \left\{ \begin{array}{l} \tau^{n-1} - \dfrac{\tau^{n-2}}{\beta}\mathrm{S}\left[\dfrac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!(1!)^{\alpha_1}(2!)^{\alpha_2}}\right] + \dfrac{\tau^{n-3}}{\beta^2}\mathrm{S}\left[\dfrac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!(1!)^{\alpha_1}(2!)^{\alpha_2}(3!)^{\alpha_3}}\right] \\ \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 = n \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = n \\ \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = n-1 \qquad\qquad\qquad\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = n-2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Die Anfangscoefficienten der Entwicklungsglieder von $\varphi^{(n)}$ lassen sich zwar mit diesen Formeln ohne Schwierigkeit berechnen, bei den späteren jedoch wird der Calcul immer complizirter. Man wird daher zur Ermittlung derselben lieber Gebrauch machen von anderen Formeln, die diese Coefficienten geben, angefangen vom letzten derselben und den Vorzug eines symmetrischen Baues besitzen, der

auch ein allgemeines Bildungsgesetz erkennen lässt. Diese Formeln können auf demselben Wege der Induction gewonnen werden, indem man bemerkt, dass $\chi^{(n)}$ auch hingestellt werden könne in der folgenden Form:

$$\chi^{(n)} = (-1)^{n-1}\beta^n\gamma^n\chi\tau\left\{\frac{1}{\beta^{n-1}} + [1]_n\frac{\tau}{\beta^{n-2}} + [2]_n\frac{\tau^2}{\beta^{n-3}} + [3]_n\frac{\tau^3}{\beta^{n-4}} + \ldots\ldots\right\} \tag{109}$$

Wir differenziren sie noch einmal und erhalten:

$$\chi^{(n+1)} = (-1)^n\beta^{n+1}\gamma^{n+1}\chi\tau\left\{\frac{1}{\beta^n} + (2[1]_n - 1)\frac{\tau}{\beta^{n-1}} + (3[2]_n - [1]_n)\frac{\tau^2}{\beta^{n-2}} + \ldots\ldots\right\} \tag{110}$$

Ein zweiter Werth von $\chi^{(n+1)}$ ersteht aus der (109) durch Substitution von $n+1$ anstatt n. Er ist:

$$\chi^{(n+1)} = (-1)^n\beta^{n+1}\gamma^{n+1}\chi\tau\left\{\frac{1}{\beta^n} + [1]_{n+1}\frac{\tau}{\beta^{n-1}} + [2]_{n+1}\frac{\tau^2}{\beta^{n-2}} + [3]_{n+1}\frac{\tau^3}{\beta^{n-3}} + \ldots\ldots\right\} \tag{111}$$

Durch Gleichstellung der Coefficienten endlich in diesen beiden Werthen für $\chi^{(n+1)}$ gehen die folgenden Bestimmungsgleichungen hervor:

$$\begin{aligned}
[1]_{n+1} &= 2[1]_n - 1 \\
[2]_{n+1} &= 3[2]_n - [1]_n \\
[3]_{n+1} &= 4[3]_n - [2]_n \\
[4]_{n+1} &= 5[4]_n - [3]_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[r]_{n+1} &= (r+1[r]_n - [r-1]_n
\end{aligned} \tag{112}$$

Wir nehmen sie der Reihe nach vor. Die erste von ihnen liefert durch Substitution von:

$$n-1,\ n-2,\ n-3,\ \ldots\ldots\ 3,\ 2$$

anstatt n und mit Rücksicht auf $[1]_2 = -1$, wie die zweite der Formeln (97) lehrt, folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
[1]_n &= 2[1]_{n-1} - 1 \\
[1]_{n-1} &= 2[1]_{n-2} - 1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[1]_3 &= 2[1]_2 - 1 \\
[1]_2 &= \qquad - 1
\end{aligned} \tag{113}$$

Sie liefern, beziehlich mit $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots\ldots$ multiplizirt und addirt:

$$[1]_n = -2^{n-1} + 1 = -[2^{n-1} - 1^{n-1}] \tag{114}$$

Auf dieselbe Weise behandelt gibt die zweite der vorliegenden Bestimmungsgleichungen mit Rücksicht auf den eben gewonnenen Werth von $[1]_n$ und auf $[2]_2 = 1$, wie die dritte der Formeln (97) lehrt, folgenden Werth für $[2]_n$:

$$[2]_n = \frac{1}{2}[3^{n-1} - 2.2^{n-1} + 1^{n-1}] \tag{115}$$

Ebenso gibt die dritte der vorliegenden Bestimmungsgleichungen, mit Rücksicht auf das eben erhaltene $[2]_n$ und $[3]_3 = 1$, den folgenden Werth von $[3]_n$:

$$[3]_n = -\frac{1}{2.3}\left[4^{n-1} - 3.3^{n-1} + 3.2^{n-1} - 1^{n-1}\right] \tag{116}$$

Man gewahrt in diesen Ausdrücken bereits die Binominalcoefficienten und findet sich zur Vermuthung veranlasst, dass allgemein

$$[r]_n = (-1)^r \frac{1}{2.3\ldots\ldots r}\left[(r+1)^{n-1} - \binom{r}{1} r^{n-1} + \binom{r}{2}(r-1)^{n-1} \ldots\ldots\right] \tag{117}$$

ausfallen werde. Diese Vermuthung wird auf dem bekannten Wege der mathematischen Induction dadurch zur Gewissheit erhoben, dass man die Giltigkeit dieser Formel für die nächst höhere Zahl $r+1$ erweist, wenn sie für den Stellenzeiger r giltig war. Hiezu ist aus der Reihe der Bestimmungsgleichungen (112) die folgende nützlich:

$$[r]_{n+1} = (r+1)\,[r]_n - [r-1]_n \tag{118}$$

Substituirt man in dieselbe anstatt $[r]_n$ den eben angenommenen Werth, anstatt $[r]_{n+1}$ dasjenige, was aus demselben wird, wenn man n durch $n+1$ ersetzt, endlich anstatt $[r-1]_n$ das aus eben derselben Formel durch Substitution von $r-1$ anstatt r Gewonnene, so hat man eine identische Gleichung, womit die allgemeine Giltigkeit der (117) für jedes r und jedes n ausser allem Zweifel gesetzt ist. Erwägt man noch überdiess, dass die beiden in unseren Formeln für $\chi^{(n)}$ vorkommenden Symbole: $[r]_n$ und $(n-r-1)_n$ einerlei Coefficienten andeuten, so hat man folgende allgemeine Gleichung:

$$\begin{aligned}[r]_n = (n-r-1)_n &= (-1)^r \frac{1}{r!}\left[(r+1)^{n-1} - \binom{r}{1} r^{n-1} + \binom{r}{2}(r-1)^{n-1} - \ldots\ldots\right] \\ &= \frac{1}{r!}\left[1^{n-1} - \binom{r}{1} 2^{n-1} + \binom{r}{2} 3^{n-1} - \ldots\ldots + (-1)^r (r+1)^{n-1}\right]\end{aligned} \tag{119}$$

Die für die speciellen Werthe des Stellenzeigers r

$$r = n-1,\ n-2,\ n-3,\ n-4,\ n-5$$

zu den folgenden merkwürdigen Relationen führen:

$$\begin{aligned}
1 &= (-1)^{n-1}\frac{1}{1.2.3\ldots.(n-1)}\left[n^{n-1} - \binom{n-1}{1}(n-1)^{n-1} + \binom{n-1}{2}(n-2)^{n-1} - \ldots\ldots\right] \\
\frac{n(n-1)}{2} &= (-1)^{n-1}\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(n-2)}\left[(n-1)^{n-1} - \binom{n-2}{1}(n-2)^{n-1} + \binom{n-2}{2}(n-3)^{n-1} - \ldots\right] \\
\frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{2.3.4} &= (-1)^{n-1}\frac{1}{1.2.3\ldots(n-3)}\left[(n-2)^{n-1} - \binom{n-3}{1}(n-3)^{n-1} + \binom{n-3}{2}(n-4)^{n-1} - \ldots\right] \\
\frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2.3.4.2} &= (-1)^{n-1}\frac{1}{1.2.3.\,.(n-4)}\left[(n-3)^{n-1} - \binom{n-4}{1}(n-4)^{n-1} + \binom{n-4}{2}(n-5)^{n-1} - \ldots\ldots\right]
\end{aligned} \tag{120}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(15n^3-270n^2+1805n-4102)}{2.3.4.5.2.3.8} =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{1.2.3.\ldots.(n-5)}\left[(n-4)^{n-1}-\binom{n-5}{1}(n-5)^{n-1}+\binom{n-5}{2}(n-6)^{n-1}-\ldots..\right]$$

....

ja noch mehr, wenn man anstatt r entweder n oder eine Zahl $m+n$, die grösser ist als n, substituirt, so ist offenbar der Werth des Coefficienten $[r]_n$ der Nulle gleich. Man hat daher ganz allgemein für beliebige ganze und positive Zahlen oder Null, anstatt m und n gesetzt:

$$0 = (m+n+1)^{n-1} - \binom{m+n}{1}(m+n)^{n-1} + \binom{m+n}{2}(m+n-1)^{n-1} - \ldots.. \tag{121}$$

Diese Relationen versprechen einigen Nutzen bei der Integration solcher Differentialgleichungen, welche die Transcendente χ in ihren Coefficienten, mithin im Ausdrucke ihres Integrales enthalten, auch sieht der Analyst aus diesen Entwicklungen, dass es mindestens bei grossen Werthen des Differentiations-index n räthlich sei, die Berechnung des $\chi^{(n)}$ von zwei verschiedenen Seiten anzufangen, indem die Anfangscoefficienten als Summen von arithmetischen Reihen besser durch die für $(1)_n$, $(2)_n$, $(3)_n$, ... unter (103) (105) (106) ..... gewonnenen Formeln, die Endcoefficienten hingegen, die mehr mit Summen geometrischer Reihen in Verwandtschaft stehen, bequemer durch die Formeln für $[1]_n$, $[2]_n$, ... vorfindig unter (114) (115) (116) ..... der Berechnung unterworfen werden.

Diese Analysis setzt uns noch überdiess in den Stand, den neu ermittelten n^{ten} Differential-quotienten von χ in einer anderen von der (108) verschiedenen symbolischen Form wiederzugeben. Es lässt sich nämlich offenbar der unter (119) aufgezeichnete Werth von $[r]_n$ in symbolischer Bezeichnungsweise wiedergeben, wie folgt:

$$[r]_n = \mathbf{S}\left[(-1)^\alpha \binom{r}{\alpha}\frac{(\alpha+1)^{n-1}}{r!}\right] \qquad \alpha+\omega = r \tag{122}$$

oder da man hat:

$$\binom{r}{\alpha} = \frac{r!}{\alpha!\omega!}$$

noch etwas kürzer:

$$[r]_n = \mathbf{S}\left[(-1)^\alpha \frac{(\alpha+1)^{n-1}}{\alpha!\omega!}\right] \qquad \alpha+\omega = r \tag{123}$$

Hiemit bildet man nun den folgenden Werth von $\chi^{(n)}$

$$\chi^{(n)} = \beta^n\gamma^n\chi\tau\left\{\frac{1}{\beta^{n-1}} + \frac{\tau}{\beta^{n-2}}\mathbf{S}\left[(-1)^\alpha\frac{(\alpha+1)^{n-1}}{\alpha!(1-\alpha)!}\right] + \frac{\tau^2}{\beta^{n-3}}\mathbf{S}\left[(-1)^\alpha\frac{(\alpha+1)^{n-1}}{\alpha!(2-\alpha)!}+\right]\right. \qquad \alpha+\omega=1 \qquad \alpha+\omega=2 \tag{124}$$

....

Die Bestandtheile des zweiten Theiles dieser Gleichung unterscheiden sich lediglich darin, dass in ihnen der Stellenzeiger r alle möglichen Werthe von 0 bis $n-1$ annimmt, ja man kann, ohne die Richtigkeit des Resultates zu gefährden, sagen, alle möglichen Werthe von 0 bis ∞, weil sämmtliche Summen, in denen $r > n-1$ ist, Null zum Werthe bekommen. Man kann also die Formel noch kürzer schreiben, indem man nur eine einzige, nämlich die mit dem allgemeinen Stellenzeiger r versehene der im zweiten Theile der vorliegenden Gleichung vorhandenen Summen aufzeichnet, und die Bedingungsgleichung ganz und gar weglässt. Es ist also:

$$\chi^{(n)} = \beta^n \gamma^n \chi \tau \mathbf{S}\left[(-1)^\alpha \frac{(\alpha+1)^{n-1}}{\alpha!(r-\alpha)!} \frac{\tau^r}{\beta^{n-r-1}}\right] \quad ($$

Die Summirung ist auszudehnen auf alle ganzen und positiven Werthe von r sowohl, wie auch von α, die Nulle mit eingeschlossen.

Die mathematische Analysis hat sich bisher vorzugsweise beschäftigt mit algebraischen und mit solchen Functionen, die sich mit algebraischen sehr leicht in Beziehung bringen, d. h. vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel in convergirende Reihen entwickeln, mithin in Potenzsummen verwandeln lassen, was eine Zerlegung vorstellt in einzelne Bestandtheile, die verschiedenen Grössenordnungen angehörig sind. Hiedurch ist offenbar das Mittel gegeben, Functionen von sehr verschiedener Natur mindestens in ihren Bestandtheilen unter einander zu vergleichen, wenn sie auch direct und im Ganzen nicht gut mit einander verglichen zu werden vermöchten. Andere unstetige analytische Gebilde gehörten bisher stets zu den Ausnahmen und wollten sich unseren gangbaren analytischen Formen nicht fügen, daher sie auch im Gebiete der Mathematik nur sehr spärliche Verwendung fanden, wiewohl sie oft genug geometrisch construirt in der Natur vorkommen, die gegen unstetige, plötzliche Uebergänge keineswegs eine solche Scheu trägt, wie die Mehrzahl unserer mathematischen Formeln. Wohin man auch sehen mag, man gewahrt die Function χ untermischt mit anderen stetigen, die manchmal auch algebraische sind, geometrisch construirt. Begrenzung ist in der Natur etwas ganz Gewöhnliches. in der Mathematik hingegen kennen wir zwar das Wort und das den Begriff ausdrückende Zeichen, wir besitzen sogar eine kleine Auswahl von Symbolen zur Bezeichnung dieses Begriffes, die immer reicher zu werden verspricht. Diess hilft uns aber in der Wissenschaft so lange nur sehr wenig, als wir damit nicht rechnen können, und rechnen können wir mit Bequemlichkeit erst dann, wenn wir diese unstetigen Gebilde mit einerlei Massstab, wie die gangbaren Functionen erster und zweiter Classe zu messen im Stande sind d. h. wenn wir sie auf einerlei Form, etwa Reihenform zurückzuführen vermögen. Die vorzunehmenden Rechnungsoperationen, namentlich Integration von Differentialgleichungen, die in ihren Coefficienten solche Gebilde enthalten, bleiben auch unter solchen günstigen Umständen noch immer schwierig genug und müssen offenbar noch viel schwieriger werden, wenn diese, verschiedenen Classen angehörigen Functionsformen als einander völlig fremde Elemente gar keinen Vergleich zulassen.

Diess ist nun in Bezug auf die Function χ und die ihr verwandte $\chi\tau$ bisher noch immer der Fall. Wenn man sie zur Bezeichnung eines plötzlichen Ueberganges verwenden will, muss man die in ihnen vorfindigen β und γ als unbegrenzt wachsende Zahlen auffassen, dann aber lässt sich die Mac-Laurin'sche Formel zur Entwicklung des χ nach aufsteigenden Potenzen von x durchaus nicht in Anwendung bringen, selbst wenn man sich x der Trennungsschichte angehörig, mithin sehr klein denkt. Eine andere Form, als die der aufsteigenden Reihe, auf die alle Rechnungselemente zurückgeführt werden können, aufzustellen, gelang bisher nicht und es werden vermuthlich diese merkwürdigen analytischen Gebilde den Analysten kommender Zeiten noch viele Schwierigkeiten bereiten. Die Natur des vorgelegten Problemes gestattet indessen, diese Schwierigkeiten zu umgehen und die Rechnungen lassen sich auf Grundlage des Wenigen, was man über die Function χ weiss, zur Noth durchführen. Es ist nach dem Ergebnisse der bisherigen Betrachtungen beiläufig Folgendes: Die Exponentielle dritter Classe χ hat nur positive Werthe; für negative x nämlich ist sie beständig Null, für positive x beständig Eins, für nahe an Null liegende geht sie plötzlich von Null in Eins über. Dieselbe Eigenschaft kommt aber auch allen Potenzen von χ zu, wie χ^2, χ^3, ... χ^n, es ist mithin χ in der Rechnung zu den endlichen Grössen, denen man gewöhnlich die Ordnungszahl Null zuschreibt, zu zählen.

Die Function $\chi\tau$ hingegen hat nur in der Nähe von $x = 0$ von Null verschiedene Werthe. Da der grösste von ihnen $\frac{1}{\beta e}$ ist und da β eine unbegrenzt wachsende Zahl andeutet, so ist $\chi\tau$ mit dem sehr kleinen Bruche $\frac{1}{\beta}$ einer und derselben ersten Ordnung der Kleinheit angehörig. Es ist ferner klar, dass auch jedes Produkt, wie $\chi^n\tau^m$, wenn n und m positiv und von Null verschieden sind, dieselbe Eigenschaft mit $\chi\tau$ theile. Ueber die Grössenordnung jedoch, zu welcher $\chi^n\tau^m = \pi$ gehörig ist, verschafft man sich dadurch Aufschluss, dass man das Maximum dieses Produktes sucht. Man hat aber für dasselbe:

$$\pi' = \gamma\chi^n\tau^m(n\beta\tau - m) = 0 \tag{126}$$

Hieraus folgt:

$$\tau = \frac{m}{n\beta} \tag{127}$$

Diess gibt:

$$\chi = e^{-\frac{m}{n}}, \quad \pi = \left(\frac{m}{n\beta e}\right)^m \tag{128}$$

als grössten Werth des in Rede stehenden Produktes. Er ist, wie man sieht, dem kleinen Bruche $\frac{1}{\beta^m}$ proportional, mithin ist ein jedes so gestaltete Produkt eine sehr kleine Grösse der m^{ten} Ordnung, so zwar, dass sich die Ordnungszahl desselben nur nach dem Exponenten m des τ richtet und von dem n des χ völlig unabhängig ist. Endlich kann noch bemerkt werden, dass in dem ganzen Bereiche der Werthe von x, in welchem χ und $\chi\tau$ variabel ist, d. h. in der Trennungsschichte, deren Dicke oben als gleich $\frac{2 \log \beta}{\gamma}$ erkannt worden ist, auch das x mit den Brüchen $\frac{1}{\beta}$ und $\frac{1}{\gamma}$, sohin auch mit $\chi\tau$ zu einerlei Grössenordnung zu zählen sei. Diese Bemerkungen werden das Sortiren der Glieder in der

Rechnung erleichtern. Aus ihnen und der Betrachtung der Formeln (97) für $\chi', \chi'', \chi''', \ldots\ldots$ geht noch überdiess hervor, dass diese Differentialquotienten beziehlich mit $\gamma, \gamma^2, \gamma^3, \ldots\ldots$ zu einerlei Grössenordnung gehörig seien, woraus dann unmittelbar die Nichtanwendbarkeit der Mac-Laurin'schen Formel zur Entwicklung des χ erschlossen werden kann.

Kehren wir jetzt zu unseren Differentialgleichungen (84), (85), (87) zurück. Es vermag jede von ihnen durch den Coefficienten a_{2n}, A_{2n}, X_{2n} dividirt zu werden, wodurch sie einen ersten Coefficienten Eins erlangt, dem man daher eine sprungweise Veränderung des Werthes in der Nähe von $x = 0$ nicht zuzumuthen braucht. Wir setzen dem gemäss:

$$a_{2n} = A_{2n} = X_{2n} = 1$$

voraus. Der erste Schritt, den man zur Integration dieser partiellen Differentialgleichungen thut, besteht in der Frage nach der Möglichkeit eines periodischen Zustandes, die in der folgenden Substitution enthalten ist:

$$y = \eta \, Sin \, \alpha t \quad \text{oder} \quad y = \eta \, Cos \, \alpha t. \tag{129}$$

Die Antwort darauf ist in den folgenden drei gewöhnlichen Differentialgleichungen enthalten:

$$\frac{d^{2n}\eta}{dx^{2n}} + a_{2n-1}\frac{d^{2n-1}\eta}{dx^{2n-1}} + \ldots\ldots + a_1\frac{d\eta}{dx} + a_0\eta = 0 \tag{130}$$

$$\frac{d^{2n}\eta}{dx^{2n}} + A_{2n-1}\frac{d^{2n-1}\eta}{dx^{2n-1}} + \ldots\ldots + A_1\frac{d\eta}{dx} + A_0\eta = 0 \tag{131}$$

$$\frac{d^{2n}\eta}{dx^{2n}} + X_{2n-1}\frac{d^{2n+1}\eta}{dx^{2n-1}} + \ldots\ldots + X_1\frac{d\eta}{dx} + X_0\eta = 0 \tag{132}$$

Die erste gilt für negative, die zweite lediglich für positive x und die dritte soll beide in sich begreifen. Ferner enthalten die Coefficienten a_0, A_0, X_0 jeder ein Glied mit α^2, sind also sämmtlich von der Form:

$$C + D\alpha^2$$

und es muss sowohl C, wie auch D der sprungweisen Veränderung an der Trennungsfläche fähig gedacht werden.

Um jetzt die Coefficienten X so zu bilden, dass sie die Werthe a auf der Seite der negativen, hingegen die Werthe A auf der Seite der positiven x und zum Theil auch solche annehmen, die nur an der Trennungsfläche von Null verschieden sind, kann man sich der Functionen χ und $\chi\tau$ auf mannigfache Weise bedienen, und darf es auch, da man die eigentliche Art des Ueberganges von einem Mittel in das andere nicht kennt und sich demgemäss begnügen muss, dasjenige nur auf dem Wege des Calculs zu ermitteln, was der Werthveränderung der Coefficienten selbst ohne Rücksicht auf das Wie derselben als Folge angehört. Wir erkiesen also eine Art der Bildung der Coefficienten X aus dem a und A, die nach den Ergebnissen der Formenlehre die einfachsten Rechnungen beim Integriren verspricht. Wir statuiren namentlich:

$$
\begin{aligned}
X_{2n-1} &= a_{2n-1} + \chi\,(a_{2n-1} \\
X_{2n-2} &= a_{2n-2} + \chi^2(A_{2n-2} - a_{2n-2}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_1 &= a_1 \quad + \chi^{2n-1}(A_1 - a_1) \\
X_0 &= a_0 \quad + \chi^{2n}\;(A_0 - a_0)
\end{aligned} \qquad \text{33)}
$$

Eine Ausnahme hievon machen nur diejenigen Coefficienten, von deren Dasein man durch die Aufstellung der Differentialgleichung selbst Kunde gewonnen hat, die jedoch der Nulle gleich werden diesseits und jenseits der Trennungsschichte und nur in der Nähe derselben einen bekannten oder unbekannten Werth E annehmen. Wäre z. B. X_{2n-r} ein solcher Coefficient, so stellen wir ihn auf folgende Weise dar:

$$
X_{2n-r} = r\beta e \chi^r \tau . E \qquad (134)
$$

Nach einem allgemeinen, in der Formenlehre Seite 286 des I. Bandes ausgesprochenen Gesetze kann eine Differentialgleichung mit Coefficienten von einer beliebigen n^{ten} Classe nur höchstens Integrale der nächst höheren Classe $n + 1$ enthalten. Durch Betrachtungen, die den am angezeigten Orte angestellten congruent sind, überzeugt man sich ferner, dass in dem Integrale einer Differentialgleichung, gedacht in der Form $e^{\int \varphi dx}$ die Function φ nothwendig dieselbe Transcendente der höchsten Classe beherbergen müsse, die sich auch in den Coefficienten vorfindet und zwar in einer den Vorschriften der Formenlehre völlig congruenten Weise. Nun sind gegenwärtig die Gleichungscoefficienten nach χ genommen der Reihe nach von der Ordnung $0, 1, 2, \ldots\ldots 2n$, von Coefficienten zu Coefficienten eine Ansteigung gleich Eins in der Gradzahl bietend, mithin ist φ nach diesem χ vom Grade Eins und kann vielleicht von der einfachen Form

$$
p\chi + q
$$

vorausgesetzt werden. Diess ist der beabsichtigte Vortheil der in der Form (133) gewählten Coefficienten. Man kann sich indessen, ohne diesen Vortheil aufzugeben, jeden der X auch noch ganz anders hingestellt denken, indem man ihm beliebige, jedoch seine Ordnungszahl nach χ, wie er sie in den (133) besitzt, nicht überschreitende Glieder hinzufügt, die die Eigenschaft haben, bei dem fortwährenden Wachsen von β und γ gegen die Nulle zu convergiren. Solche wären nicht nur $\frac{C}{\beta}$, $\frac{C}{\gamma}$, sondern auch $C\chi\tau$, $C\beta\chi\tau^2$, $C\beta^{r-s}\,\chi^n\tau^r$ u. s. w. und es können diese Zusätze zu den Coefficienten beliebigen Ordnungen der Kleinheit angehörig gedacht werden, wenn man sich hievon in der Rechnung irgend einen Nutzen verspricht. Auch kann man sie anfügen in beliebigen Stadien des Calculs und in dem Augenblicke, wo es irgend ein Bedürfniss erheischt.

Der Leser wird sich einen besseren Begriff machen von demjenigen, was hier beanstrebt wird, wenn er annimmt, dass man weniger beabsichtige die Integration der Differentialgleichung mit den X genannten Coefficienten zu vollbringen, als vielmehr sie zu umgehen und dennoch des Einflusses der an der Trennungsstelle statthabenden Veränderung auf die Phänomene theilhaftig zu werden.

Wir beginnen zu diesem Zwecke damit, die Differentialgleichungen (130) und (131), die noch ohne χ sind, der Integration zu unterwerfen. Wir erhalten von jeder ein allgemeines Integral mit $2n$ willkürlichen Constanten. Fassen wir die particulären Integrale in der Form $e^{\int\varphi dx}$ auf, so ist φ 2n-werthig und es möge die (130) liefern:

$$\eta = B_1 e^{\int\varphi_1 dx} + B_2 e^{\int\varphi_2 dx} + \ldots\ldots + B_{2n} e^{\int\varphi_{2n} dx} \qquad ($$

hingegen möge die der Integration unterworfene (131) geben:

$$\eta = C_1 e^{\int\varphi_1 dx} + C_2 e^{\int\varphi_2 dx} + \ldots\ldots + C_{2n} e^{\int\varphi_{2n} dx} \qquad ($$

so reduzirt sich offenbar jeder, wie folgt, gestaltete Ausdruck:

$$D e^{\int[\varphi_r + x(\psi_s - \varphi_r)]dx} \qquad ($$

wenn man in demselben den Stellenzeigern r und s ganz beliebige gleiche oder verschiedene Werthe beilegt, liegend zwischen 1 und $2n$, für negative Werthe von x auf eines der in der Formel (135) enthaltenen particulären Integrale, leistet mithin für negative x der nur für solche giltigen Differentialgleichung (130) Genüge, hingegen reduzirt sich eben derselbe Ausdruck für positive x auf irgend eines der particulären Integrale in der Form (136), leistet also der für eben solche x giltigen Differentialgleichung (131) Genüge, mithin hat derselbe die Eigenschaft, beide Gleichungen zu erfüllen und wenn man ihn nur noch zwingen könnte, auch der dritten (132) und zwar nur für sehr kleine, im Bereiche der Trennungsschichte liegende x zu erfüllen, so wäre dieser Ausdruck eine specielle Auflösung des Reflexionsproblemes. Letzteres geht aber nicht. Jedoch kömmt zu bemerken, dass man jedes der φ, nämlich φ_1, φ_2, ... φ_{2n} mit jedem der ψ, nämlich mit ψ_1, ψ_2, ... ψ_{2n} zu combiniren das Recht habe, wodurch sich Ausdrücke in der Form (137) $4n^2$ an der Zahl ergeben, deren jedem eine andere Integrationsconstante D angefügt werden kann. Vielleicht lassen sich nun diese ebenfalls $4n^2$ an der Zahl vorhandenen D entweder alle insgesammt, oder gruppenweise so wählen, dass, wenn auch nicht die einzelnen Ausdrücke (137), doch mindestens die Summen aller oder mehrerer derselben gruppenweise zusammengenommen, die Differentialgleichung erfüllen, d. h. vielleicht lassen sich in dem folgenden Ausdrucke:

$$\begin{aligned}
\eta = {} & D_{1,1} e^{\int[\varphi_1 + \chi(\psi_1 - \varphi_1)]dx} + D_{1,2} e^{\int[\varphi_1 + \chi(\psi_2 - \varphi_1)]dx} + \ldots\ldots + D_{1,2n} e^{\int[\varphi_1 + \chi(\psi_{2n} - \varphi_1)]dx} \\
& + D_{2,1} e^{\int[\varphi_2 + \chi(\psi_1 - \varphi_2)]dx} + D_{2,2} e^{\int[\varphi_2 + \chi(\psi_2 - \varphi_2)]dx} + \ldots\ldots + D_{2,2n} e^{\int[\varphi_2 + \chi(\psi_{2n} - \varphi_2)]dx} \qquad (\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + D_{2n,1} e^{\int[\varphi_{2n} + \chi(\psi_1 - \varphi_{2n})]} + D_{2n,2} e^{\int[\varphi_{2n} + \chi(\psi_2 - \varphi_{2n})]dx} + \ldots\ldots + D_{2n,2n} e^{\int[\varphi_{2n} + \chi(\psi_{2n} - \varphi_{2n})]dx}
\end{aligned}$$

die mit D bezeichneten Constanten $4n^2$ an der Zahl so wählen, dass derselbe für nahe an Null liegende x die Differentialgleichung (132) identisch erfüllt, mithin ein Integral derselben darstellt, versehen mit einer bestimmten Anzahl von Constanten. Die Differentialgleichungen (130) und (131) erfüllt er ohnediess, mithin wäre er dann je nach der Anzahl der darin vorfindigen Constanten entweder eine allgemeine oder eine particuläre Auflösung des Schwingungs-, respective Reflexionsproblemes und zwar eine allgemeine, wenn der erübrigten Constanten $2n$ an der Zahl sind, mithin der aufgeopferten

$4n^2 - 2n = 2n(2n - 1)$, und eine particuläre, wenn man weniger als $2n$ Constanten erübrigt hat. Im letzteren Falle wäre dann das Integral durch die bekannte Methode der Variation der Constanten zu completiren.

Diess ist aber noch nicht Alles, und es liegen noch mehr Hilfsmittel in der Natur dieses Problemes, zu den gesuchten Genüge leistenden Werthen zu gelangen. In der That wird nicht bloss jeder Ausdruck von der Form (137) die Eigenschaft besitzen, sowohl ein Integral der Differentialgleichung (130) als auch eines der anderen (131) darzustellen, sondern man wird dasselbe auch sagen können von der folgenden anderen Function:

$$[B + C\chi]\, e^{\int[\varphi+\chi(\psi-\varphi)]dx} \tag{139}$$

Sie ist dadurch von der (137) unterschieden, dass anstatt einer einzigen Constanten D hier deren zwei, nämlich B und C auftreten. Wieder kann man jeden der $2n$ Werthe von φ mit einem jeden der Werthe von ψ combiniren und hiezu die Constanten B und C anders stets und anders wählen. Die so gewonnenen Ausdrücke summirend, gelangt man dann abermals zu einem Integralausdrucke, wie der (138) ist mit der doppelten Anzahl von Constanten jedoch, über deren Werthe verfügt werden kann, $8n^2$ nämlich. Nachdem man nun deren $2n$ braucht zur Darstellung des allgemeinen Integrales der Differentialgleichung (132) für sehr kleine Werthe von x, so sind der disponiblen annoch $8n^2 - 2n = 2n(4n - 1)$ vorhanden. Die Anzahl dieser Constanten ist eine sehr beträchtliche, für $n = 1, 2, 3, \ldots$ nämlich hat man deren beziehlich $6, 28, 66, \ldots$ die offenbar durch ebenso viele Gleichungen in Function der übrigen auszudrücken sind. Sie sind aber keineswegs überflüssig, weil man auch eine sehr bedeutende Anzahl von Gliedern des Substitutionsresultates wegzuschaffen hat, damit sich dasselbe auf Null reduzire, ja sie reichen zu diesem Zwecke nicht einmal zu.

Es ist aber auch nicht nothwendig, dass das Resultat der Substitution des aus $4n^2$ oder auch aus $8n^2$ Gliedern bestehenden Integralausdruckes in die (132) in aller Strenge Null sei, es ist vielmehr nur erforderlich, dass dieses Substitutionsresultat die Eigenschaft besitze, bei dem unendlichen Wachsen von β und γ gegen Null zu convergiren. Da nämlich $\beta = \infty$ und $\gamma = \infty$ einer Trennungsfläche entspricht, so wird der so gewonnene Integralausdruck für eine Trennungsfläche die Lösung des Reflexionsproblemes in aller Strenge, für noch nicht unendliche aber bereits sehr grosse β und γ hingegen wenigstens in erster Annäherung in sich enthalten, d. h. er wird den analytischen Ausdruck bieten derjenigen Erscheinungen, die von der Dicke der Trennungsschichte unabhängig dieselben bleiben, ob es jetzt eine Trennungsfläche oder eine Trennungsschichte gibt. Den Einfluss der Dicke und des Uebergangsgesetzes von einem Mittel in das andere in der Trennungsschichte zu erörtern, ist Obliegenheit einer zweiten Annäherung und diess nicht bloss desshalb, weil wir vorderhand bei unserer völligen Unkenntniss dieses Uebergangsgesetzes nicht anders können, sondern selbst dann, wenn wir auf theoretischem Wege — denn der des Experimentes wird nie dahin führen — das Gesetz dieses Ueberganges wirklich kennen gelernt hätten, müssten wir noch immer im Geiste der echten Wissenschaftsforschung vorgehend, die Wirkungen der verschiedenen Ursachen von einander sondern und zuvörderst dasjenige

erörtern, was von der Beschaffenheit der Trennungsschichte unabhängig ist, dann aber zu dem davon abhängigen übergehen.

Es ist nicht gerade nothwendig, dass die Integrale der beiden Differentialgleichungen (130) und (131) in der Form $e^{\int\varphi dx}$ oder $e^{\int\psi dx}$ erscheinen; man kann manchmal φdx und ψdx bequem zur Integration bringen und wird dann, wenn $\int\varphi dx = P$, $\int\psi dx = Q$ vorausgesetzt wird, etwas anders gestaltete allgemeine Integrale mit je $2n$ willkürlichen Constanten erhalten, als die (135) und (136) sind, nämlich:

$$\eta = B_1 e^{P_1} + B_2 e^{P_2} + \ldots\ldots + B_{2n} e^{P_{2n}} \tag{140}$$

$$\eta = C_1 e^{Q_1} + C_2 e^{Q_2} + \ldots\ldots + C_{2n} e^{Q_{2n}} \tag{141}$$

Aus ihnen wird man, jede der Functionen P mit jeder der Functionen Q combinirend, Ausdrücke $4n^2$ an der Zahl construiren können, welche sämmtlich die Eigenschaft besitzen, Integrale beider Gleichungen (130) und (131) darzustellen. Einem jeden kann man einen Factor anhängen, der entweder eine einzige Constante ist, oder deren zwei in der Form:

$$B + C\chi$$

enthält, oder auch, wenn man will, mit $3n$ solchen in der Gestalt:

$$B + C\chi + G\chi^2$$

versehen ist u. s. w. Alle die so gewonnenen Prodnkte summirend, erhält man dann wieder einen Ausdruck für η in der folgenden Form:

$$\begin{array}{l} \eta = (B_{1,1} + C_{1,1}\chi)e^{P_1+\chi(Q_1-P_1)} + (B_{1,2} + C_{1,2}\chi)e^{P_1+\chi(Q_2-P_1)} + \ldots\ldots \\ \quad (B_{2,1} + C_{2,1}\chi)e^{P_2+\chi(Q_1-P_2)} + (B_{2,2} + C_{2,2}\chi)e^{P_2+\chi(Q_2-P_2)} + \ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (B_{2n,1} + C_{2n,1}\chi)e^{P_{2n}+\chi(Q_1-P_{2n})} + (B_{2n,2} + C_{2n,2}\chi)e^{P_{2n}+\chi(Q_2-P_{2n})} + \ldots\ldots \end{array} \tag{142}$$

von welchem man verlangen kann, dass er bei schicklicher Wahl aller oder mehrerer der darin enthaltenen $8n^2$ Constanten das Polynom der Differentialgleichung (132) auf einen, für unendliche β und γ verschwindenden Werth zurückführe, mithin je nach der Anzahl der in ihm noch vorhandenen willkürlichen Constanten entweder ein allgemeines Integral, oder nur ein particuläres dieser Differentialgleichung darstelle für sehr nahe an Null liegende x.

Welchen immer nun der in Rede stehenden Differentialausdrücke man in die Differentialgleichung einführen mag, man erhält immer ein Substitutionsresultat, das aus $4n^2$ verschiedenen Gliedern zusammengesetzt ist, deren jedes eine andere Exponentialgrösse zum Factor hat. Allen entsprechen gewöhnlich Exponenten, die für sehr kleine x ebenfalls sehr klein sind. Diess ist z. B. immer der Fall, wenn die Coefficienten a und A der beiden Gleichungen (130) und (131) constant sind, dann sind nämlich auch φ und ψ constant und es besteht

$$P = \varphi x\,, \quad Q = \psi x \tag{143}$$

Diese Exponentialgrössen werden sich daher entwickeln lassen in sehr convergirende Reihen. Diess thut man und zwar in Gliedern mindestens $2n$ an der Zahl, weil die anderen Factoren, nach β und γ genommen, Elemente enthalten von der $2n$ — 1sten bis $2n^{ten}$ Grössenordnung. Das Substitutionsresultat erscheint dann in Form einer Summe von Gliedern, wie:

$$K\chi^l \tau^m x^n \tag{144}$$

Man orientirt sich zuvörderst über die Ordnungszahl, die einem jeden solchen Gliede angehört, indem man bei Anwesenheit eines oder mehrerer χ sowohl τ, wie auch x der ersten Ordnung der Kleinheit beizählt, als mit den Brüchen $\frac{1}{\beta}$ und $\frac{1}{\gamma}$ vergleichbar, und schafft durch Nullsetzen der Coefficienten alle solchen Potenzprodukte weg, wenn sie nicht zu irgend einer Grössenordnung gehörig, d. h. mit irgend einer Potenz von β und γ vergleichbar sind.

So viel lässt sich allgemein sagen über das hier einzuschlagende Rechenverfahren. Die Methode ist noch zu neu, als dass es möglich wäre, ihr eine weitere Ausbildung zu ertheilen. Erst im Herbste des Jahres 1857 entstanden, hat sie ihre Wirksamkeit nur erprobt bei zwei verschiedenen Reflexionsproblemen dieser Art, nämlich erstens bei Schwingungen solcher gespannten Saiten, die aus mehreren Stücken von verschiedener Stärke zusammengesetzt sind und zweitens in der Lichtlehre; allein selbst das ist schon genug, um ihr einen Platz unter den wichtigeren Methoden der Analysis zu sichern. Die zwei Abhandlungen, von welchen hier die Rede ist, befinden sich in den Denkschriften der Wiener Akademie der Wissenschaften. Der geneigte Leser, der Beispiele zu derselben wünscht, möge sich daher an diese Abhandlungen wenden; dem vorliegenden Werke jedoch, schien es nicht räthlich, ein solches beizugeben, weil hiedurch nicht nur sein Umfang nicht unbedeutend vermehrt, sondern auch der rein analytische Character theilweise aufgegeben worden wäre.

§. 4.

Darstellung des anfänglichen Erregungszustandes.

Bereits im §. 1 dieses Abschnittes ist in Kürze dargethan, dass es, um zur Auflösung eines Bewegungsproblemes zu gelangen, keineswegs hinreiche, nur eine Differentialgleichung oder deren mehrere zu integriren; da nämlich immer das Integral noch andere Bedingungen zu erfüllen hat, so muss man damit auch weiter rechnen können, mithin muss man es besitzen in hiezu passender Form, muss es zur Erfüllung dieser Bedingungen zwingen können, und es geht aus dem Inhalte der Paragraphe 2 und 3 hervor, dass diese Bedingungen zuvörderst zweierlei seien, nämlich erstens solche, die auf den Raum Bezug nehmen und zweitens solche, die einem Zeitmomente angehörig sind. Die ersteren zerfallen wieder in zwei verschiedene Sorten: sie sprechen nämlich entweder von einzelnen Puncten des materiellen Systemes, von denen man etwas Bestimmtes weiss über die alldort vorhandene Bewegungsgrösse, Druck, Spannung u. s. w. lauter Grössen, die als Functionen der Differentialquotienten

der abhängigen Veränderlichen dargestellt werden können, mithin einzelne Punkte, für welche man eine gewisse Anzahl von Bedingungsgleichungen besitzt, die in einem Zeitmomente erfüllt bleiben müssen.

Hievon sind andere, ebenfalls auf den Raum Bezug nehmende Bedingungen unterschieden, welche besagen, dass nicht einzelne Punkte, sondern ganze Abtheilungen, in die das materielle System zerfällt, eine andere und andere analytische Behandlung erheischen, weil ihnen je andere Bewegungsgleichungen angehören.

Die Bedingungen der einen Art und auch der anderen können für sich im Bewegungsprobleme vorkommen; sie können aber auch vereinigt sein. Eine schwingende Saite z. B. kann von überall gleicher Dicke und mit zwei festen Punkten versehen gedacht werden; man kann sie aber auch zweitens aus zwei unendlich langen Stücken von verschiedener Dicke zusammengesetzt annehmen und man kann endlich drittens eine zwischen zwei festen Punkten gespannte Saite von begrenzter Länge aus zwei heterogenen Stücken zusammenfügen. Hiemit ist aber auch alles erschöpft, was sich an Bedingungen denken lässt, die auf den Raum Bezug nehmen und für jede Zeit giltig sein sollen, und es bleibt uns nur noch übrig, die Bedingungen der anderen Art gehörig ins Auge zu fassen, die einem Zeitmomente, etwa $t = 0$ angehörig, die Art und Weise feststellen, wie man das materielle System in den Bewegungszustand versetzt hat.

Wir wollen also gegenwärtig zeigen, wie man den bisher noch nicht berücksichtigten Bedingungen für $t = 0$, nämlich $y = f(x)$ und $\frac{dy}{dt} = f_1(x)$ Genüge zu leisten habe. Sie stellen den anfänglichen Zustand dar, oder mit anderen Worten, sie enthalten den analytischen Ausdruck der Art, wie die schwingende Bewegung erregt worden ist. Der aufgefundene Werth von y (77) dürfte sich zur Erfüllung dieser Bedingungen zwingen lassen, indem er wegen der in ihm enthaltenen, annoch unbestimmten Constanten $A_1, A_2, \ldots\ldots A_r \ldots\ldots$ und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots\ldots \mathfrak{A}_r \ldots\ldots$ in unbeschränkter Anzahl annoch sehr verschiedene Functionen von x und t vorzustellen geeignet ist, also vermuthlich auch eine solche, die für $t = 0$ übergeht in $f(x)$. Hiezu ist aber nothwendig, dass dasjenige, was man aus der (77) erhält, für $t = 0$ und $y = f(x)$, d. h.

$$f(x) = {}^r\overset{\infty}{\underset{1}{\mathfrak{S}}}\left\{A_r Y_r\right\} = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \ldots\ldots + A_r\ Y_r + \ldots\ldots \tag{145}$$

zurecht bestehe. Diese Gleichung enthält nur $A_1, A_2, \ldots\ldots$ lässt also die $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots\ldots$ unbestimmt. Man wird also diese Letzteren dazu verwenden können, um $\frac{dy}{dt} = f_1(x)$ zu machen für $t = 0$. Nun erhält man aber durch Differentiation der (77) nach t

$$\frac{dy}{dt} = {}^r\overset{\infty}{\underset{1}{\mathfrak{S}}}\ Y_r \left[- \alpha_r\ Sin\ \alpha t + \alpha_r \mathfrak{A}_r\ Cos\ \alpha t\right] \tag{146}$$

sohin für $t = 0$ und $\frac{dy}{dt} = f_1(x)$

$$f_1(x) = {}^r\overset{\infty}{\underset{1}{\mathfrak{S}}}\left\{\alpha_r \mathfrak{A}_r Y_r\right\} = \alpha_1 \mathfrak{A}_1 Y_1 + \alpha_2 \mathfrak{A}_2 Y_2 + \ldots\ldots + \alpha_r \mathfrak{A}_r Y_r + \ldots\ldots \tag{147}$$

eine Gleichung, die durch schicklich gewählte Werthe von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots\ldots$ wo möglich identisch zu machen ist. Dieser also und der (145) muss noch Genüge geleistet werden.

Hätten wir nun allgemeine Methoden, mittelst welcher eine beliebige Function $f(x)$ nicht nach Potenzen, sondern nach Functionen von x von einerlei Form, von der Gestalt der Y nämlich und unterschieden nur durch die numerischen Werthe, die ein in diesem Y vorhandener Parameter α erhält, in Reihen zu entwickeln, so könnten sie uns hier sehr zu Gute kommen, nachdem es nur nothwendig wäre, die Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ mit ihrer Hilfe in Reihenform nach Ausdrücken wie Y wiederzugeben, in die Gleichungen (145) und (147) zu substituiren, und die Coefficienten derselben Y zu äquipariren. Bedenkt man aber, dass Y das Integral einer höheren Differentialgleichung ist, und in Folge dessen, wie wir wissen, eine mannigfaltig complizirte Form haben kann, so überzeugt man sich bald, dass die Aufstellung solcher Methoden nur in wenigen und in den einfachsten Fällen in unserer Gewalt sein könne. Wir sehen uns also genöthigt, einen anderen Weg einzuschlagen und, nachdem nichts anderes vorliegt, bei der Differentialgleichung selbst Rath zu suchen. Unser leitender Gedanke ist folgender: Wenn man irgend eine der identischen Gleichungen (145) und (147) mit was immer für einer Function Z von x multiplizirt und sodann zwischen beliebigen Grenzen, etwa zwischen den 0 und a der Integration unterwirft, so erhält man abermals eine identische Gleichung, die aber kein x mehr enthält, sondern nur eine Beziehungsgleichung zwischen den Constanten darstellt. Vielleicht lässt sich nun der Factor Z so wählen, dass durch dieses Verfahren eine der gesuchten Constanten entweder A_1 aus der Verbindung mit den übrigen geschieden wird und isolirt in der Gleichung erscheint, sohin unmittelbar aufgefunden werden kann, und, wenn diess nicht, so wird man vielleicht Z, anders stets und anders wählend, zu einer Reihe von Gleichungen gelangen, aus denen sich die gesuchten Werthe der Constanten irgend wie ermitteln lassen. Also ein solcher Factor Z ist es, welchen wir zunächst suchen.

Die Leistung, die man von ihm verlangt, ist im Wesentlichen die folgende: es soll das bestimmte Integral

$$\int_0^a yZdx \quad \text{und} \quad \int_0^a \frac{dy}{dt} Zdx$$

auf einen einfachen, aus möglichst wenigen Gliedern zusammengesetzten und mit möglichst wenigen Coefficienten A und $\mathfrak{A}$ versehenen Ausdruck bringen ungeachtet des Umstandes, dass y selbst ein aus Gliedern in unendlicher Anzahl zusammengesetztes Polynom ist.

Denkt man sich in die partielle Differentialgleichung (51) den durch Integration ermittelten Werth von y substituirt, so wird sie identisch. Multiplizirt man sodann mit Zdx und integrirt zwischen den Grenzen 0 und a, so geht wieder eine identische Gleichung hervor, was auch t bedeuten mag, d. h. die:

$$\int_0^a \frac{d^2y}{dt^2} Zdx = \int_0^a \left[X_{2n} Z \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + X_{2n-1} Z \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} + \ldots\ldots + X_1 Z \frac{dy}{dx} + X_0 Zy\right] dx \tag{148}$$

Zerlegen wir hier den zweiten Theil in seine Bestandtheile, indem wir einem jeden Gliede sein Integralzeichen abgesondert vorschreiben, integriren sodann die einzelnen Glieder theilweise, das erste

2*n*mal, das zweite $(2n-1)$mal u. s. w. bis zum letzten, welches unberührt gelassen wird, und bemerken zudem noch, dass, weil Z kein t in sich enthält, der erste Theil der Gleichung auch

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^a yZdx \tag{149}$$

geschrieben werden kann; so gelangen wir zu:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^a yZdx = \int_0^a \Big[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(X_{2n}Z) - \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}(X_{2n-1}Z) + \ldots\ldots - \frac{d}{dx}(X_1Z) + X_0Z\Big] ydx + \\ + \Bigg\{ X_{2n}Z\frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} \left.\begin{matrix} -\frac{d}{dx}(X_{2n}Z) \\ + X_{2n-1}Z \end{matrix}\right\} \frac{d^{2n-2}y}{dx^{2n-2}} + \left.\begin{matrix} \frac{d^2}{dx^2}(X_{2n}Z) \\ -\frac{d^2}{dx^2}(X_{2n-1}Z) \\ + (X_{2n-2}Z) \end{matrix}\right\} \frac{d^{2n-3}y}{dx^{2n-3}} + \ldots\ldots \left[\begin{matrix} -\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}(X_{2n}Z) \\ \ldots\ldots + \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}(X_{2n-1}Z) \\ \ldots\ldots + \frac{d^{2n-3}}{dx^{2n-3}}(X_{2n-2}Z) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + X_1Z \end{matrix}\right] y \Bigg\}_0^a\end{aligned} \tag{150}$$

Man bemerkt sehr wohl, dass diese Gleichung das bestimmte Integral

$$\int_0^a yZdx,$$

auf dessen Beschaffenheit es bei der Bestimmung von A_1, A_2, ... und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... wesentlich ankommt, zu liefern, oder wenigstens über dasselbe etwas zu lehren verspreche, gemäss den verschiedenen Werthen, die man dem Z ertheilen kann. Es käme in der That nur darauf an, Z so zu wählen, dass eben dieses Integral sowohl, wie auch sein Differentialquotient nach t für $t=0$ ein einziges Glied, mit einer einzigen isolirten Constante enthalten. Wir suchen diess dadurch zu bewerkstelligen, dass wir erstens Z allgemein eine Differentialgleichung, wie:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(X_{2n}Z) - \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}(X_{2n-1}Z) + \ldots\ldots - \frac{d}{dx}(X_1Z) + X_0Z = -\beta^2 Z, \tag{151}$$

erfüllen lassen; dieser entspricht ein Integral mit $2n$ willkürlichen Constanten nämlich:

$$Z = H_1\mathfrak{z}_1 + H_2\mathfrak{z}_2 + \ldots\ldots + H_{2n}\mathfrak{z}_{2n}, \tag{152}$$

das in seinen particulären Bestandtheilen $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, ... $\mathfrak{z}_{2n}$ den annoch unbestimmten Parameter β enthält — und zweitens die H_1, H_2, ... H_{2n} und β so wählen, dass die Summe der nicht mehr mit dem Integrale behafteten Glieder in der (150) an der einen Grenze sowohl, d. h. für $x=a$, als auch an der anderen, d. h. für $x=0$ verschwindet. Dass und wie diess unter den zu Grunde gelegten Umständen möglich sei, soll allsogleich erörtert werden. Die Möglichkeit vorderhand angenommen, geht die (150) über in

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^a yZdx + \beta^2 \int_0^a yZdx = 0 \tag{153}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung mit constanten Coefficienten zwischen der unabhängigen Veränderlichen t und der abhängigen $\int_0^a yZdx$. Ihr allgemeines Integral ist:

$$\int_0^a yZdx = C_1 \; Cos\; \beta t + C_2 \; Sin\; \beta t \tag{154}$$

C_1 und C_2 sind die Constanten der Integration. Ihre Werthe lassen sich bestimmen den Bedingungen gemäss, dass für $t = 0$, $y = f(x)$ und $\frac{dy}{dt} = f_1(x)$ sein muss. Sie sind:

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^a f(x)Zdx \\ C_2 &= \frac{1}{\beta}\int_0^a f_1(x)Zdx \end{aligned} \tag{155}$$

und man hat also:

$$\int_0^a yZdx = Cos\; \beta t \int_0^a f(x)Zdx + \frac{1}{\beta}\, Sin\; \beta t \int_0^a f_1(x)Zdx, \tag{156}$$

eine Formel, kraft welcher das fragliche Integral als einfacher binomischer Ausdruck erscheint, die also zu unseren Zwecken verwendbar zu werden verspricht.

Jetzt wollen wir zeigen, dass die Summe der bereits als integrirt erscheinenden Glieder in der Gleichung (150) an jeder der Grenzen 0 und a abgesondert der Nulle gleich gemacht werden könne durch schickliche Wahl der in Z enthaltenen Constanten H_1, H_2, ... H_{2n} und β, d. h. dass

$$\left.\left.\left.\begin{array}{r} X_{2n}Z\dfrac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} - \dfrac{d}{dx}(X_{2n}Z) \\ + \quad X_{2n-1}Z \end{array}\right]\begin{array}{r} \dfrac{d^{2n-2}y}{dx^{2n-2}} + \dfrac{d^2}{dx^2}(X_{2n}Z) \\ - \dfrac{d}{dx}(X_{2n-1}Z) \\ + \quad X_{2n-2}Z \end{array}\right]\begin{array}{r} \dfrac{d^{2n-3}}{dx^{2n-3}} + \ldots + (-1)^{2n-1}\dfrac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}(X_{2n}Z) \\ \ldots + (-1)^{2n-2}\dfrac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}(X_{2n-1}Z) \\ \ldots + (-1)^{2n-3}\dfrac{d^{2n-3}}{dx^{2n-3}}(X_{2n-2}Z) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \qquad X_1Z \end{array}\right] y = 0 \tag{157}$$

sein könne für nicht verschwindende Z und sowohl für $x = 0$, als auch für $x = a$, mit Hilfe jedoch der Bedingungen, welche y an den Grenzen, d. h. für dieselben Werthe von x Glied für Glied erfüllt, und die ausgedrückt sind in (58) und (59). Um diess klar darzuthun, fangen wir an bei dem einfachsten Falle, annehmend, dass die y angehenden Bedingungsgleichungen für $x = 0$ und $x = a$ seien:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = y\Big\}_0 = 0\,,\quad L_2 = \dfrac{dy}{dx}\Big\}_0 = 0\,,\quad L_3 = \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big\}_0 = 0\,,\ \ldots\ldots\ L_n = \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big\}_0 = 0 \\ M_1 = y\Big\}_a = 0\,,\quad M_2 = \dfrac{dy}{dx}\Big\}_a = 0\,,\quad M_3 = \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big\}_a = 0\,,\ \ldots\ldots\ M_n = \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big\}_a = 0 \end{array}\right\} \qquad (158)$$

Sie haben allsogleich das Verschwinden der letzten Glieder n an der Zahl in der (157) zur Folge, und das vollkommene Identischwerden dieser Gleichung ist erzielt, wenn für $x = 0$ und $x = a$ das Z die folgenden Bedingungen $2n$ an der Zahl erfüllt:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L}_1 = X_{2n}Z\Big\}_0 = 0\,,\quad \mathrm{L}_2 = -\dfrac{d}{dx}(X_{2n}Z) + X_{2n-1}Z\Big\}_0 = 0\,,\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{L}_n = (-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(X_{2n}Z) + (-1)^{n-2}\dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(X_{2n-1}Z) + \ldots\ldots + X_{n+1}Z\Big\}_0 = 0 \\ \mathrm{M}_1 = X_{2n}Z\Big\}_a = 0\,,\quad \mathrm{M}_2 = -\dfrac{d}{dx}(X_{2n}Z) + X_{2n-1}Z\Big\}_a = 0\,,\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{M}_n = (-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(X_{2n}Z) + (-1)^{n-2}\dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(X_{2n-1}Z) + \ldots\ldots + X_{n+1}Z\Big\}_a = 0 \end{array}\right\} \qquad (159)$$

Sie sind sämmtlich linear nach Z und seinen Differentialquotienten, ohne einem von dieser Grösse unabhängigen Gliede und es kann an ihre Stelle auch das folgende, dem (158) ähnliche System im Allgemeinen geschrieben werden.

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{L}_1 = Z\Big\}_0 = 0\,,\quad \mathfrak{L}_2 = \dfrac{dZ}{dx}\Big\}_0 = 0\,,\quad \mathfrak{L}_3 = \dfrac{d^2Z}{dx^2}\Big\}_0 = 0\,,\ \ldots\ldots\ \mathfrak{L}_n = \dfrac{d^{n-1}Z}{dx^{n-1}}\Big\}_0 = 0 \\ \mathfrak{M}_1 = Z\Big\}_a = 0\,,\quad \mathfrak{M}_2 = \dfrac{dZ}{dx}\Big\}_a = 0\,,\quad \mathfrak{M}_3 = \dfrac{d^2Z}{dx^2}\Big\}_a = 0\,,\ \ldots\ldots\ \mathfrak{M}_n = \dfrac{d^{n-1}Z}{dx^{n-1}}\Big\}_a = 0 \end{array}\right\} \qquad (160)$$

Durch Substitution des Ausdruckes für Z in die (160) in entwickelter Weise hingestellt, tragen sie genau dieselbe Form, wie die (67) und dienen eben so wenig zur Bestimmung von $H_1, H_2, \ldots H_{2n}$, als diese $G_1, G_2, \ldots\ldots G_n$ geben, liefern vielmehr nur die Relationen $\frac{H_2}{H_1}, \frac{H_3}{H_1}, \ldots\ldots \frac{H_n}{H_1}$ und den Parameter β. Diesen letzteren namentlich als Wurzel einer transcendenten Eliminationsgleichung

$$\mathfrak{N} = 0, \qquad (161)$$

die die aufsteigend nach den Grössen der Moduln geordneten Auflösungen in unendlicher Anzahl

$$\beta = \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots\ldots\ \beta_s \ldots\ldots\ldots \qquad (162)$$

zulassen wird, denen beziehlich eben so viele Systeme ungebrochener Werthe von $H_1, H_2, \ldots\ldots H_n$ sowohl, als auch von Z entsprechen werden, die wir durch

$$Z = Z_1, Z_2, \ldots\ldots\ldots\ Z_s \ldots\ldots\ldots \qquad (163)$$

bezeichnen. Wir sehen also, dass die Gleichung (156), zu der wir gelangt sind, eine unbeschränkte Menge specieller Gleichungen repräsentire, die folgenden nämlich:

$$(164)\quad \begin{aligned} \int_0^a yZ_1dx &= Cos\,\beta_1 t\int_0^a f(x)Z_1dx + \frac{1}{\beta_1}\,Sin\,\beta_1 t\int_0^a f_1(x)Z_1dx \\ \int_0^a yZ_2dx &= Cos\,\beta_2 t\int_0^a f(x)Z_2dx + \frac{1}{\beta_2}\,Sin\,\beta_2 t\int_0^a f_1(x)Z_2dx \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_0^a yZ_sdx &= Cos\,\beta_s t\int_0^a f(x)Z_sdx + \frac{1}{\beta_s}\,Sin\,\beta_s t\int_0^a f_1(x)Z_sdx \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Wir haben sohin der Multiplicatoren Z von einerlei Wirksamkeit, vermittelst einer einzigen Rechnung eine unendliche Anzahl gefunden. Aehnlich würde sich die Sache verhalten, wenn anstatt der Bedingungsgleichungen (158) bei irgend einer Grenze z. B. bei der zweiten die folgenden ähnlichen aufgetreten wären:

$$(165)\quad M_1 = \frac{d^ny}{dx^n}\Big\}_a = 0,\; M_2 = \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\Big\}_a = 0,\;\ldots\ldots,\; M_n = \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}}\Big\}_a = 0,$$

denn diess hat nur zur Folge, dass auch die Z angehenden Bedingungen an der zweiten Grenze sich ändern, und übergehen in:

$$(166)\quad \begin{aligned} \mathrm{M}_1 &= (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(X_{2n}Z) + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(X_{2n-1}Z) + \ldots\ldots + X_n\,Z\Big\}_a = 0 \\ \mathrm{M}_2 &= (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(X_{2n}Z) + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(X_{2n-1}Z) + \ldots\ldots + X_{n-1}Z\Big\}_a = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{M}_n &= -\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}(X_{2n}Z) + \frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}(X_{2n-1}Z) \qquad + \ldots\ldots\ldots\; X_1Z\Big\}_a = 0, \end{aligned}$$

was weder zu einem anderen Gange der Rechnung nöthigt, noch zu anderen Formeln führt, sondern nur zu verschiedenen Werthen von α und β.

Allein nicht nur in den erwähnten speciellen Fällen, sondern auch in allen anderen und namentlich dann, wenn die mit L und M bezeichneten Gleichungspolynome sämmtliche Differentialquotienten von y bis zum $(2n-1)^{sten}$ enthalten, stösst man bei demselben Gange der Rechnung auf dieselben analytischen Formen, wenn nur die einzige Bedingung erfüllt ist, dass in ihnen kein von y und seinen Differentialquotienten freies Glied erscheint. In der That wird man dann vermittelst der Gleichungen (166) n an der Zahl, die für $x = 0$ bestehen, eben so viele, etwa die höchsten Differentialquotienten von y durch die niedereren ausdrücken können, oder umgekehrt, die niedereren durch die höheren und diess zwar linear. Mittelst derselben wird man aus dem gleichfalls linearen Gleichungspolynome (157) die eine Hälfte von ihnen eliminiren, und nach der anderen ordnend einen $n$theiligen, offenbar auch linearen Ausdruck erhalten, dessen n Coefficienten die Z und seine Differentialquotienten

bis zum $(2n-1)^{sten}$ enthalten und zwar wieder in linearer Weise, und die der Nulle gleichgesetzt, ähnliche Grenzgleichungen, wie die (160) liefern werden, aus denen dann eine ähnliche Transcendente, wie die $\mathfrak{N}=0$ zur Bestimmung der mit β bezeichneten Wurzeln hervorgeht. Und es dient das, was wir hier von der einen Grenze gesagt haben, eben so gut auch von der anderen, und man wird unter den obwaltenden Umständen jederzeit eine unendliche Reihe von Functionen Z aufzufinden im Stande sein, denen die durch die (156) ausgedrückte merkwürdige Eigenschaft zukömmt. Wenn man nämlich das aus unendlich vielen, je binomischen Gliedern bestehende y mit irgend einem dieser Z und mit dx multiplizirt, sodann aber der Integration innerhalb der Grenzen 0 und a unterwirft, so gelangt man zu einem einfachen binomischen Ausdruck, der t in sich enthält unter dem Zeichen *Cos* und *Sin* und den Factoren der einzelnen Bestandtheile von y ähnlich ist.

Um aus dieser Eigenschaft Nutzen zu ziehen und zu ferneren Aufschlüssen zu gelangen über das Verhalten der Gleichungen $N=0$ und $\mathfrak{N}=0$ zu einander und sohin über das ihrer mit α und β bezeichneten Wurzeln, wird es dienlich sein für einen Augenblick zu speciellen Voraussetzungen über die Natur der Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ überzugehen, die die anfänglichen, dem Zeitmomente $t=0$ angehörigen Werthe von y und $\frac{dy}{dt}$ darstellen. Sie sind zwar nicht ganz willkürlich, müssen vielmehr nebst der Bedingung der Kleinheit für alle zwischen Null und α liegenden x auch noch die Bedingungen an diesen Grenzen, nämlich die $L=0$ und $M=0$ erfüllen, eben weil diese für jede Zeit gelten und weil $f(x)$ auch ein Werth des allgemeinen zur Erfüllung der Grenzbedingungen verpflichteten y ist, so wie $f_1(x)$ einen von $\frac{dy}{dt}$ darstellt, dem natürlich auch dieselbe Obliegenheit zufällt. Wenn wir daher willkürlich für $f(x)$ und $f_1(x)$ bestimmte Functionsformen annehmen, so können es nur solche sein, die mit den Y_1, Y_2, Y_3 ..... die Eigenschaft theilen, anstatt y in die Grenzgleichungen substituirt, ihnen Genüge zu leisten, etwa die Y_1, Y_2, Y_3 ..... selbst. Es sei daher einfacher Weise:

$$f(x) = Y_r \quad \text{und} \quad f_1(x) = 0. \tag{167}$$

Der Vergleich dieser Annahmen mit den Gleichungen (145) und (147) lehrt uns die entsprechenden Werthe von A und $\mathfrak{A}$ kennen, nämlich:

$$\begin{gathered} A_1 = A_2 = \dots\dots\dots\dots = A_{r-1} = A_{r+1} = \dots\dots\dots\dots = 0 \\ A_r = 1 \\ \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \dots\dots\dots\dots = 0. \end{gathered} \tag{168}$$

Ihnen gemäss verwandelt sich die unendliche Reihe für y in ein einzelnes monomisches Glied, d. h. in: (169)

$$y = Y_r \; Cos \; \alpha_r t.$$

Diess specielle $f(x)$ und y muss also unter anderen auch die (156) identisch machen und zwar für ein beliebig der Reihe Z_1, Z_2, Z_3, ... entnommenes Z, also allgemein auch für Z_s. Es ist daher die:

$$Cos \; \alpha_r t \int_0^a Y_r Z_s dx = Cos \; \beta_s t \int_0^a Y_r Z_s dx \tag{170}$$

eine identische Gleichung, giltig für jedes t. Diess ist aber nur möglich, wenn entweder

(171) $$\alpha_r = \beta_s \,, \quad \text{oder} \quad \int_0^a Y_r Z_s dx = 0$$

ist. Letzteres ist der gewöhnliche, Ersteres der Ausnahmsfall, denn selbst dann, wenn man $N = \mathfrak{N}$, somit $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ... $\alpha_r = \beta_r$ hat, so ist doch eine jede Wurzel β nur einmal in der Reihe der Wurzeln α enthalten, folglich hat man in der Regel und bei allen Bedeutungen der Stellenzeiger r und s, α_r nicht gleich β_s, es sei denn, dass $r = s$ wäre, in welchem einzigen Falle das bestimmte Integral $\int_0^a Y_r Z_s dx$ von der Nulle verschieden sein darf, während es in allen übrigen verschwindet. Denkt man sich demnach, die gemachte specielle Annahme für $f(x)$ verlassend und zur (145) zurückkehrend, dieselbe mit $Z_r dx$ multiplizirt und dann integrirt zwischen den Grenzen Null und a, so dass sich die folgende ergibt:

(172) $$\int_0^a Z_r f(x)\, dx = A_1 \int_0^a Y_1 Z_r dx + A_2 \int_0^a Y_2 Z_r dx + \ldots\ldots + A_r \int_0^a Y_r Z_r dx + \ldots\ldots,$$

so verschwinden im zweiten Theile derselben alle Integrale, mit welchen die Coefficienten A_1, A_2, .. multiplizirt erscheinen, bis auf dasjenige mit dem Factor A_r, sie geht daher über in:

(173) $$\int_0^a Z_r f(x) dx = A_r \int_0^a Y_r Z_r dx$$

und liefert:

(174) $$A_r = \frac{\int_0^a Z_r f(x) dx}{\int_0^a Y_r Z_r dx}.$$

Wäre hingegen gar kein β einem α gleich, somit $\alpha_r = \beta_s$ unmöglich, also auch nicht $\alpha_r = \beta_r$, so wären auch im zweiten Theile der Gleichung (172) sämmtliche Glieder Null und somit auch für jedes den Bedingungen an den Grenzen entsprechende $f(x)$

(175) $$\int_0^a Z_r f(x) dx = 0.$$

Da sich aber diess unmöglich annehmen lässt, so folgt daraus unmittelbar, dass entweder sämmtliche Wurzeln β in der Reihe der Wurzeln α enthalten seien, oder dass sich die Function $f(x)$ durch eine Reihe wie (145) mit endlichen Coefficienten A gar nicht darstellen lasse. Letzteres ist unzulässig, nachdem wir eben erst einen Fall kennen gelernt haben, wo diese Darstellung ausser Zweifel steht, und es auch nicht schwer fällt, unzählige andere namhaft zu machen. Wir schliessen daher, dass das Gleichungspolynom $\mathfrak{N}$ in dem N als Factor enthalten sei, wir werden sogar sehen, dass nothwendig allemal $N = \mathfrak{N}$ werde.

Anstatt von den Voraussetzungen (167) auszugehen, hätten wir auch die anderen

$$f(x) = 0 \,, \quad f_1(x) = Y_r$$

erkiesen können. Sie würden verglichen mit den Formeln (145) und (147) gegeben haben:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$
$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \mathfrak{A}_{r-1} = \mathfrak{A}_{r+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \tag{176}$$
$$\mathfrak{A}_r = \frac{1}{\alpha_r}$$

Der entsprechende monomische Werth von y ist unter solchen Annahmen:

$$y = \frac{1}{\alpha_r} Y_r \, Sin \, \alpha_r t \tag{177}$$

und es müssen dieselben Werthe, in die (156) eingeführt, dieselbe identisch machen, d. h. die

$$\frac{1}{\alpha_r} Sin \, \alpha_r t \int_0^a Y_r Z_s dx = \frac{1}{\beta_s} Sin \, \beta_s t \int_0^a Y_r Z_s dx \tag{178}$$

muss eine identische Gleichung sein für beliebige r und s. Es ist also abermals entweder

$$\alpha_r = \beta_s \quad \text{oder} \quad \int_0^a Y_r Z_s dx = 0 \tag{179}$$

und wenn man, die specielle Annahme verlassend, und zum allgemeinen Functionswerthe von $f_1(x)$ zurückkehrend, die Gleichung (147) mit $Z_s dx$ multiplizirt und sodann innerhalb der Grenzen Null und a integrirt, so kann der zweite Theil derselben höchstens ein von der Nulle verschiedenes bestimmtes Integral enthalten, weil β_s nur einem einzigen der, der Natur der Sache nach, von einander verschiedenen α gleichkommen kann, wird aber ein solches auch jedesmal enthalten müssen, weil sonst für alle zulässigen $f_1(x)$

$$\int_0^a f_1(x) Z_s dx = 0 \tag{180}$$

ausfallen müsste, was offenbar nicht angeht, indem man ja unbeschadet den nothwendigen Eigenschaften der Function $f_1(x)$ dieselbe so wird wählen können, dass sie mit der Z_s für alle zwischen Null und a liegenden x einerlei Zeichen hat, also das Product $f_1(x)Z_s$ immer positiv ist, was das Verschwinden des Integrales unmöglich macht. Die auf diese Weise behandelte Gleichung (147) wird also einen der Coefficienten $\mathfrak{A}$ isolirt enthalten und wird für denselben den Werth:

$$\mathfrak{A}_r = \frac{\int_0^a f_1(x) Z_r dx}{\alpha_r \int_0^a Y_r Z_r dx} \tag{181}$$

liefern. Wiewohl wir also weder die Wurzeln α der transcendenten Gleichung $N = 0$ noch die β der anderen $\mathfrak{N} = 0$ kennen, wiewohl uns selbst die Gleichungspolynome N und $\mathfrak{N}$ völlig unbekannt sind, so wissen wir doch, dass sich unter den Wurzeln β der $\mathfrak{N} = 0$ keine befinden darf, die nicht auch zugleich unter den Wurzeln α der $N = 0$ vorhanden wäre, weil schon die Voraussetzung einer jeden solchen

nicht gemeinschaftlichen Wurzel in einen Widerspruch verwickelt, der besagt, dass ein bestimmtes Integral Null ist, welches augenscheinlich nicht Null zu sein braucht.

Nun entsteht aber die wichtige Frage: Sind unter den Wurzeln β alle Wurzeln α vorhanden, oder nur einige, oder mit anderen Worten, sind die Gleichungspolynome N und $\mathfrak{N}$ völlig identisch dieselben, oder ist $\mathfrak{N}$ in N nur als Factor enthalten? Diese Frage ist wichtig darum, weil bei allen den particulären Integralen der Bewegungsgleichung (51), in denen Wurzeln α vorfindig sind, die unter den β nicht vorkommen, kein die Constante A oder $\mathfrak{A}$ isolirender Multiplicator bestände, man mithin an andere Mittel denken müsste, zu den Werthen dieser bezüglichen Constanten zu gelangen, das Problem der Darstellung des initialen Zustandes mithin nur theilweise und nicht vollständig gelöst wäre. Es ist also, wie gesagt, zu zeigen, dass nicht nur sämmtliche Wurzeln β der $\mathfrak{N} = 0$ unter den α der $N = 0$, sondern auch umgekehrt alle Wurzeln α unter den mit β bezeichneten vorhanden seien, dass mithin $\mathfrak{N} = N$ eine identische Gleichung sei.

Zu diesem Zwecke wollen wir in der Folge der Klarheit und Kürze wegen im Ausdrucke die Gleichung (61) in η die Bewegungsgleichung nennen, die Gleichung (151) hingegen in Z soll die Multiplicatorengleichung heissen, ferner die (157) die zu dieser Multiplicatorengleichung gehörige Grenzgleichung. Letztere zerfällt, wie wir wissen, an jeder der Grenzen 0 und a in zwei Systeme von Bestimmungsgleichungen, von welchen die einen (158) zwischen den Differentialquotienten von y lauten, die anderen (159) hingegen die Differentialquotienten von Z affiziren. Von ihnen ist es noch erspriesslich, zu bemerken, dass, wenn man die einen (158) statuirt, man auch nothwendigerweise die anderen (159) dazu gelten lassen muss, wenn die Grenzgleichung identisch erfüllt sein soll, und umgekehrt, statuirt man die (158), so sind die anderen (159) hievon eine nothwendige Folge.

Diess vorausgesetzt, lässt sich zuvörderst zeigen, dass die Multiplicatorengleichung der ersten Multiplicatorengleichung in Z, also die zweite Multiplicatorengleichung der Bewegungsgleichung (61) eben diese Bewegungsgleichung wieder selbst sei. Dass diess ein nothwendiger Sachverhalt sei, war gerade nicht schwer zu errathen; wenn nämlich Z ein isolirender Multiplicator zu Y ist und zwar in Folge des Umstandes, dass

$$\int_0^a Y_r Z_s dx$$

stets Null sein muss, den Fall $\alpha_r = \beta_s$ ausgenommen, so ist offenbar auch Y ein isolirender Multiplicator zu Z. Es ist unzweifelhaft, dass man sich immerhin irgend ein Bewegungsproblem wird denken können, dem die erste Multiplicatorengleichung in Z als Bewegungsgleichung mit ihren $2n$ Bedingungen an den Grenzen 0 und a angehört. Diese beiden Bewegungsprobleme stehen daher in der innigsten Verwandtschaft zu einander, das eine nämlich liefert dem anderen die isolirenden Multiplicatoren.

Vorderhand soll also bewiesen werden, dass die zweite Multiplicatorengleichung wieder die Bewegungsgleichung selbst sei. Zu diesem Zwecke zeichnen wir das Polynom der ersten Multiplicatorengleichung in Z auf in entwickelter Gestalt und nach den Differentialquotienten von Z in üblicher Weise absteigend geordnet. Das Ergebniss ist die folgende Gleichung:

$$\mathfrak{X}_{2n} \frac{d^{2n}Z}{dx^{2n}} + \mathfrak{X}_{2n-1} \frac{d^{2n-1}Z}{dx^{2n-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}_0 Z = -\beta^2 Z \tag{182}$$

allwo die mit $\mathfrak{X}_{2n}$, $\mathfrak{X}_{2n-1}$, ... $\mathfrak{X}_0$ bezeichneten Coefficienten folgende Werthe besitzen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_{2n} &= X_{2n} \\
\mathfrak{X}_{2n-1} &= -X_{2n-1} + 2nX'_{2n} \\
\mathfrak{X}_{2n-2} &= X_{2n-2} - \binom{2n-1}{1} X'_{2n-1} + \binom{2n}{2} X''_{2n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{X}_r &= (-1)^r \left[X_r - \binom{r+1}{1} X'_{r+1} + \binom{r+2}{2} X''_{r+2} - \ldots\ldots + (-1)^r \binom{2n}{2n-r} X^{(2n-r)}_{2n}\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{X}_0 &= X_0 - X'_1 + X''_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots + X^{(2n)}_{2n}
\end{aligned} \tag{183}$$

Man bilde nun aus dieser Differentialgleichung eine neue nach demselben Gesetze, nach welchem eben dieselbe aus der Bewegungsgleichung (61) hervorgegangen ist. Sie sei:

$$\mathfrak{U}_{2n} \frac{d^{2n}Q}{dx^{2n}} + \mathfrak{U}_{2n-1} \frac{d^{2n-1}Q}{dx^{2n-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathfrak{U}_0 Q = -\gamma^2 Q \tag{184}$$

so setzen sich ihre $\mathfrak{U}$ genannten Coefficienten aus den mit $\mathfrak{X}$ bezeichneten der ersten Multiplicatorengleichung genau auf dieselbe Weise zusammen, wie die $\mathfrak{X}$ aus dem X zusammengefügt sind, d. h. man hat:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_{2n} &= \mathfrak{X}_{2n} \\
\mathfrak{U}_{2n-1} &= -\mathfrak{X}_{2n-1} + 2n\mathfrak{X}'_{2n} \\
\mathfrak{U}_{2n-2} &= \mathfrak{X}_{2n-2} - \binom{2n-1}{1} \mathfrak{X}'_{2n-1} + \binom{2n}{2} \mathfrak{X}''_{2n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{U}_r &= (-1)^r \left[\mathfrak{X}_r - \binom{r+1}{1} \mathfrak{X}'_{r+1} + \binom{r+2}{2} \mathfrak{X}''_{r+2} - \ldots\ldots + (-1)^r \binom{2n}{2n-r} \mathfrak{X}^{(2n-r)}_{2n}\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{U}_0 &= \mathfrak{X}_0 - \mathfrak{X}'_1 + \mathfrak{X}''_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathfrak{X}^{(2n)}_{2n}
\end{aligned} \tag{185}$$

Substituirt man nun in der allgemeinen für $\mathfrak{U}_r$ aufgestellten von ihnen anstatt $\mathfrak{X}_r$, $\mathfrak{X}_{r+1}$ ..... $\mathfrak{X}_{2n}$ die Werthe aus den obigen Gleichungen (183), so erhält man:

$$\mathfrak{U}_r = X_r$$

Die übrigen Glieder erhalten nämlich alle die Nulle zum Factor, verschwinden mithin, und zwar allgemein erscheint der Coefficient von $X^{(s)}_{r+s}$ in der folgenden Gestalt:

$$\frac{(r+s)!}{r!s!}\left[1 - \binom{s}{1} + \binom{s}{2} - \binom{s}{3} + \ldots\ldots\ldots\right] = \frac{(r+s)!}{r!s!}(1-1)^s = 0$$

Es sind also, wie behauptet wurde, die Coefficienten $\mathfrak{X}$ der zweiten Multiplicatorengleichung identisch gleich den Coefficienten X der Bewegungsgleichung, und der einzige Unterschied zwischen den beiden besteht jetzt in der Constanten γ^2 anstatt α^2 und im Namen Q, den die abhängige Veränderliche trägt anstatt Y.

Es bleibt daher jetzt nur noch zu zeigen, dass $\alpha = \gamma$ sei, so ist dann offenbar in aller Strenge: $Q = Y$. Um diess aber zu leisten, betrachten wir die Grenzgleichung (157) und ordnen sie nun nach Differentialquotienten von Z absteigend. Sie wird dann folgende Gestalt tragen:

$$
\begin{aligned}
0 = & (-1)^{2n-1} Z^{(2n-1)} . y X_{2n} + \\
(186) \quad & + (-1)^{2n-2} Z^{(2n-2)} [y' X_{2n} + y(X_{2n-1} - (2n-1) X'_{2n})] \\
& + (-1)^{2n-3} Z^{(2n-3)} [y'' X_{2n} + y'(X_{2n-1} - (2n-2) X'_{2n}) + y(X_{2n-2} - (2n-2) X'_{2n-1} + \binom{2n-1}{2} X''_{2n})] + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Man sieht bei sorgsam durchgeführter Rechnung sehr leicht ein, dass das allgemeine, mit dem Factor $Z^{(\rho)}$ verbundene Glied das folgende sei:

$$
(187) \quad (-1)^{\rho} Z^{(\rho)} \begin{cases}
y \left[X_{\rho+1} - (\rho+1) X'_{\rho+2} + \binom{\rho+2}{2} X''_{\rho+3} - \ldots\ldots + (-1)^{\rho-1} \binom{2n--1}{2n-\rho-1} X_{2n}^{(2n-\rho-1)} \right] + \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ y^{(\sigma)} \left[X_{\rho+\sigma+1} - (\rho+1) X'_{\rho+\sigma+2} + \binom{\rho+2}{2} X''_{\rho+\sigma+3} \ldots\ldots \right. \\
\quad \left. + (-1)^{\mu} \binom{\rho+\mu}{\mu} X^{(\mu)}_{\rho+\sigma+\mu+1} + \ldots + (-1)^{2n-\rho-\sigma-1} \binom{2n-\sigma-1}{2n-\rho-\sigma-1} X_{2n}^{(2n-\rho-\sigma-1)} \right] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ y^{(2n-\rho-1)} X_{2n}
\end{cases}
$$

Diess wäre also das nach Differentialquotienten von Z umgeordnete Polynom (157) der ersten Grenzgleichung, die zur gegebenen Bewegungsgleichung in y gehörig ist, und wir heben daraus ein einzelnes allgemeines Glied hervor, als Repräsentanten aller übrigen, dasjenige nämlich; welches dem Producte $Z^{(\rho)} y^{(\sigma)} X^{(\mu)}_{\rho+\sigma+\mu+1}$ proportional ist. Es ist:

$$
(188) \quad (-1)^{\rho+\mu} \binom{\rho+\mu}{\mu} Z^{(\rho)} y^{(\sigma)} X^{(\mu)}_{\rho+\sigma+\mu+1}
$$

Nun gehen wir über zur ersten Multiplicatorengleichung in Z, betrachten sie als Bewegungsgleichung, suchen ferner zu derselben den entsprechenden isolirenden Factor Q, der, wie so eben nachgewiesen, einerseits durch die Differentialgleichung (184) die mit der Bewegungsgleichung in y zusammenfällt, und andererseits durch das System von Bedingungsgleichungen (160) in Z gegeben ist. Diese zweite Grenzgleichung erheischt keine wiederholte Rechnung, sondern man erhält sie offenbar aus der ersten, die wir zu diesem Zwecke in der Form (157) vornehmen wollen und zwar dadurch, dass man in derselben anstatt y, Z, X beziehlich Z, Q, $\mathfrak{X}$ substituirt. Das Substitutionsresultat erscheint allsogleich nach Differentialquotienten von Z geordnet und bekömmt zunächst die folgende Gestalt:

$$0 = \mathfrak{X}_{2n} Q . Z^{(2n-1)} - \left.\begin{array}{r}\frac{d}{dx}(\mathfrak{X}_{2n}\ Q) \\ + \quad \mathfrak{X}_{2n-1} Q)\end{array}\right\} Z^{(2n-2)} + \left.\begin{array}{r}\frac{d^2}{dx^2}(\mathfrak{X}_{2n}\ Q) \\ - \frac{d}{dx}(\mathfrak{X}_{2n-1} Q) \\ + \quad \mathfrak{X}_{2n-2} Q\end{array}\right\} Z^{(2n-3)} - \ldots\ldots \tag{189}$$

Der Coefficient von $Z^{(\rho)} Q^{(\sigma)}$ in diesem Ausdrucke ist folgender:

$$(-1)^\sigma \mathfrak{X}_{\rho+\sigma+1} + (-1)^{\sigma+1}\binom{\sigma+1}{1}\mathfrak{X}'_{\rho+\sigma+2} + (-1)^{\sigma+2}\binom{\sigma+2}{2}\mathfrak{X}''_{\rho+\sigma+3} + \ldots + (-1)^{2n-\rho-1}\binom{2n-\rho-1}{2n-\rho-\sigma-1}\mathfrak{X}_{2n}^{(2n-\rho-\sigma-1)} \tag{190}$$

Führen wir nun in diesem anstatt der mit $\mathfrak{X}$ benannten Coefficienten der ersten Multiplicatorengleichung ihre Werthe (183) in Function der mit X bezeichneten ein, und heben in dem Substitutionsresultate das Glied mit dem Factor $X^{(\mu)}_{\rho+\sigma+\mu+1}$ hervor, so ergibt sich der folgende Ausdruck für den allgemeinen Repräsentanten aller Glieder der zweiten Grenzgleichung, dem mit dem Factor $Z^{(\rho)} Q^{(\sigma)} X^{(\mu)}_{\rho+\sigma+\mu+1}$ versehenen nämlich:

$$Z^{(\rho)} Q^{(\sigma)} X^{(\mu)}_{\rho+\sigma+\mu+1}\Big[(-1)^{\rho+1}\binom{\sigma+\mu}{\mu} + (-1)^{\rho+2}\binom{\sigma+\mu-1}{\mu-1}\binom{\rho+\sigma+\mu+1}{1} + (-1)^{\rho+3}\binom{\sigma+\mu-2}{\mu-2}\binom{\rho+\sigma+\mu+1}{2} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\rho+\mu+1}\binom{\rho+\sigma+\mu+1}{\mu}\Big] \tag{191}$$

Die in diesem Ausdrucke erscheinende Reihe ist nun ein Binomialcoefficient und dem des ähnlichen Ausdruckes (188) bis auf einen Factor -1 identisch gleich. Diess beweist sich am leichtesten auf folgende Weise: Es besteht bekanntlich:

$$\frac{1}{(1-x)^{\sigma+1}} = 1 + \binom{\sigma+1}{1}x + \binom{\sigma+2}{2}x^2 + \ldots + \binom{\sigma+\mu-2}{\mu-2}x^{\mu-2} + \binom{\sigma+\mu-1}{\mu-1}x^{\mu-1} + \binom{\sigma+\mu}{\mu}x^\mu + \ldots$$

und ebenso noch folgende zweite identische Gleichung:

$$(1-x)^{\rho+\sigma+\mu+1} = 1 - \binom{\rho+\sigma+\mu+1}{1}x + \binom{\rho+\sigma+\mu+2}{2}x^2 - \ldots.$$

Wir multipliziren sie unter einander und heben dann beiderseits ein einziges Glied heraus, nämlich das mit dem Factor x^μ versehene. Die dieser Potenz auf der einen und der anderen Seite zustehenden Coefficienten müssen offenbar identisch gleich sein. Man hat mithin:

$$(-1)^\mu\binom{\rho+\mu}{\mu} = \binom{\sigma+\mu}{\mu} - \binom{\sigma+\mu-1}{\mu-1}\binom{\rho+\sigma+\mu+1}{1} + \binom{\sigma+\mu-2}{\mu-2}\binom{\rho+\sigma+\mu+1}{2} + \ldots + (-1)^\mu\binom{\rho+\sigma+\mu+1}{\mu}$$

und es lehrt die Multiplication mit $(-1)^{\rho+1}$, dass die beiden Coefficienten der allgemeinen Glieder des ersten und des zweiten Grenzgleichungspolynomes nur im Zeichen und in der Benennung einer einzigen Variablen, nämlich hier Y dort Q von einander verschieden seien; hiemit sind bis auf diesen Unterschied in der Benennung auch beide Grenzgleichungen dieselben und wenn bei der Zerlegung der ersten von ihnen die gegebenen Bedingungsgleichungen in y die anderen in Z zur unmittelbaren Folge hatten, so werden jetzt bei der Zerlegung der zweiten Grenzgleichung die aufgestellten Bedingungsgleichungen

in Z unmittelbar diejenigen anderen zur Folge haben, die sich von den in y nur durch die Benennung Q anstatt y unterscheiden. Die Elimination der in Q vorhandenen Integrationsconstanten $2n$ an der Zahl führt mithin, da Q erwiesenermassen dieselbe Differentialgleichung und dieselben Bedingungen an den Grenzen erfüllen muss, wie y, auch zu derselben transcendenten Gleichung $N = 0$. Man hat also allgemein $\gamma = \alpha$ und kann jetzt in folgender Weise weiter schliessen: Es ist erwiesen worden, dass die zur Bewegungsgleichung gehörige Transcendente $N = 0$ dieselben und nicht weniger Wurzeln besitzen kann, als die transcendente Gleichung $\mathfrak{N} = 0$, die ihrer Multiplicatorengleichung zukömmt. Betrachtet man nun diese Letztere als Bewegungsgleichung und geht von derselben auf die nächstfolgende zweite Multiplicatorengleichung über, so kann aus denselben Gründen bewiesen werden, dass die der ersteren zustehende Transcendente $\mathfrak{N} = 0$ dieselben und nicht weniger Wurzeln besitzen kann, als die Transcendente ihrer, der zweiten Multiplicatorengleichung, die abermals $N = 0$ ist. Mithin hat also die $\mathfrak{N} = 0$ weder mehr noch weniger Wurzeln als die $N = 0$ und es führt die hier auseinandergesetzte Methode der isolirenden Multiplicatoren jedesmal zu dem analytischen Ausdrucke des Einflusses der anfänglichen Erregungsweise, und vervollständigt hiemit die Auflösung des vorgelegten Bewegungsproblemes. Es ist auch gänzlich überflüssig, nach speciellen Beweisen zu suchen, dass das auf die angegebene Weise aufgefundene Z wirklich ein isolirender Multiplicator sei. Der bündigste Beweis, dass dem so ist, und gewiss der allgemeinste liegt in der hier vorgetragenen Analysis.

Vermöge dieser Auseinandersetzung erheischt die vollständige Erledigung eines Bewegungsproblemes die Integration zweier Differentialgleichungen von verwandter Form, d. h. der Bewegungsgleichung selbst und der ersten Multiplicatorengleichung und überdem die Auflösung einer transcendenten Gleichung, der $N = 0$. In ziemlich zahlreichen Fällen fallen die beiden Differentialgleichungen in Eine zusammen und es geschieht diess namentlich dann, wenn in der Bewegungsgleichung nur constante Coefficienten und überdem nur Differentialquotienten von gerader Ordnungszahl vorhanden sind. Die Methode ist auch einer entsprechenden Erweiterung fähig auf Differentialgleichungen von anderer als der hier vorausgesetzten Form; es schien mir jedoch räthlich, an diesem Orte nur solche Lehren zur Sprache zu bringen, die im Geschäfte der physikalisch-mathematischen Wissenschaftsforschung den unmittelbarsten Nutzen versprechen.

Es hat schon Lagrange in den Schwingungen gespannter Saiten durch dasselbe Mittel, einen isolirenden Multiplicator nämlich, die Coefficientenwerthe gesucht, die den anfänglichen Erregungszustand repräsentiren. Die Gleichungen, die bei diesem einfachsten aller ähnlichen Schwingungsprobleme vorliegen, tragen aber die Gestalt:

$$f(x) = A_1 Sin_s \theta x + A_2 Sin\, 2\theta x + A_3 Sin\, 3\theta x + \ldots\ldots + A_r Sin\, r\theta x$$

und es ergab sich auf Grundlage einer gewissen analytischen Erfahrung sehr bald, dass ein jedes Glied der nach Sinus der Vielfachen der Bogen geordneten Reihe zugleich isolirender Multiplicator sei. Später hat Poisson das etwas complizirtere Problem der Schwingungen einer elastischen Feder behandelt auf ähnliche Weise und es hat sich derselbe Sachverhalt, nämlich jedes particuläre Integral ist

zugleich isolirender Multiplicator, auch in diesem Falle bestätigt, nur meint er in seinem Traité de mécaniqne, den directen Beweis dieser Thatsache nicht führen zu können. Inzwischen ist es zweien meiner Schüler gelungen, derlei Beweise aufzufinden und einer von Herrn Stefan, befindet sich in den Schriften der kais. Akademie, beansprucht aber nach dem in diesem Paragraphe Vorgetragenen keine besondere Wichtigkeit, nachdem sich die Sache im Grunde ganz allgemein von selbst versteht, und man jedesmal den hier eingeschlagenen analytischen Weg gehend, völlig sicher ist, einer unendlichen Reihe bestimmter isolirender Multiplicatoren zu begegnen, die, wenn sie auch noch so complizirt erscheinen und wenn man auch noch so wenig begreift, in welcher Weise die unzähligen aus ihnen gebauten bestimmten Integrale sich zurückziehen auf die Nulle, dem ohngeachtet ohne allen Zweifel all' dieses leisten. Und wenn es vielleicht hie und da die Neugierde eines Analysten reitzen mag, zu sehen, wie diess zugehe, so liegt doch andererseits der grösste Vorzug und Schönheit der analytischen Methode eben in dem Umstande, dass man von Gleichungen, die man gar nicht kennt, mit desshalb nicht minderer Gründlichkeit Eigenschaften beweist, die sie besitzen müssen und die dann eine Menge langwieriger Rechnungen und sehr complizirter specieller Beweise völlig überflüssig machen.

§. 5.

Beherzigung der Bedingungen an den Grenzen eines Systemes von zwei oder drei Dimensionen im Raume.

Die vorhergehenden Paragraphe und namentlich der §. 2 dieses Abschnittes betrachten im Wesentlichen lineare materielle Systeme, oder diesen verwandte Probleme. Bei ihnen kommen in der Differentialgleichung eine abhängige und zwei unabhängige Variable vor, von welchen letzteren eine die Zeit, die andere eine Coordinate ist. Die Grenzen des Systemes sind durch zwei specielle Werthe dieser Coordinate bestimmt und die Bedingungen an den Grenzen beziehen sich auf diese speciellen Coordinatenwerthe insoferne, dass alle in den Bedingungsgleichungen vorkommenden Grössen, z. B. Differentialquotienten, für einen dieser Werthe berechnet gedacht werden müssen.

Bei materiellen Systemen, die ausgedehnt sind längs einer Fläche oder im Raume, ist aber der Sachverhalt ein anderer, erheischt mithin auch eine veränderte Behandlung. Man hat nämlich erstens in der Regel nicht Eine, sondern mehrere Differentialgleichungen mit eben so vielen abhängigen Veränderlichen, und in diesen hat man zweitens der unabhängigen Veränderlichen nicht zwei, sondern drei oder vier, deren eine wieder die Zeit, die übrigen aber Coordinaten sind, und endlich drittens vermögen die Grenzen des materiellen Systemes und die Bedingungen an denselben auf die mannigfaltigsten Weisen gegeben zu werden, je nachdem nämlich das materielle System, welches Bewegungen von einerlei Art annehmen kann, entweder nur von einer Seite oder von mehreren und je nachdem es dort von ebenen oder krummen Flächen begrenzt erscheint. Man gibt nun den allereinfachsten Arten der Begrenzung den Vorzug und fängt, den wissenschaftlich richtigen Weg gehend, damit an, die Gesetze der Reflexion der Bewegungen an einer einzigen Grenzfläche und zwar namentlich an einer Ebene,

z. B. der Coordinatenebene der yz, für welche $x = 0$ ist, zu erkunden. Man hat also bei ähnlichen Problemen nur einen einzigen Grenzwerth einer einzigen Coordinate, wiewohl man deren auch mehrere gewinnen kann, z. B. zwei von x, wenn das materielle System zwischen zwei parallelen Ebenen eingeschlossen ist. Allein auch in diesem Falle ist die Behandlung des Bewegungsproblemes nicht mehr die in den früheren Paragraphen gelehrte, sondern eine andere, die in ihren Grundzügen hier zur Sprache gebracht werden soll.

Wie schon im §. 1 dieses Abschnittes angedeutet wurde, bekümmert man sich unter ähnlichen Umständen vor allem anderen um die Wellenlinie oder Wellenfläche, die entweder ursprünglich gleich als geradlinig, eben oder kreisförmig, sphärisch angenommen wird, wenn Berechtigung zu einer solchen Annahme vorhanden ist, oder erst gesucht werden muss, wenn das materielle System von Ort zu Ort, oder nach verschiedenen Richtungen im Raume ungleiche Beschaffenheit ausweist. Kann man die Ebene als Wellenfläche annehmen, und wählt man sie den beiden Grenzebenen des Systemes parallel, so hat man in diesem speciellen Falle ein Bewegungsproblem vorliegen, welches genau dieselbe Behandlung erheischt, die auch bei einem linearen Systeme einzutreten hat, und die im Vorhergehenden besprochen wurde, unter allen anderen Voraussetzungen jedoch, z. B. unter der Voraussetzung sphärischer Wellen sich anders gestalten muss.

Hat man nämlich die Wellenfläche angenommen oder ermittelt, so wendet man sich mit derselben an die Differentialgleichung zurück und frägt nach dem Vorgange alldort. Das Ergebniss dieser Anfrage, wenn es gelingt, sie mit mathematischer Präcision zu stellen, ist, wie im §. 1 an mehreren Beispielen nachgewiesen wurde, eine Verringerung der Anzahl der abhängigen Veränderlichen bis auf eine und der unabhängigen Coordinaten im günstigsten Falle ebenfalls bis auf eine einzige. Es werden z. B. so wie am bezeichneten Orte entweder zwei, oder auch drei orthogonale Coordinaten durch einen einzigen Leitstrahl ersetzt. Diess in Verbindung mit der Frage nach einem periodischen Zustande oder einer ähnlichen, reduzirt dann alle gegebenen Bewegungsgleichungen auf eine einzige, von der hier der Betrachtung unterworfenen Gestalt zwischen nur zwei Veränderlichen, einer abhängigen, die z. B. die Bedeutung einer Bewegungsgrösse hat, und einer unabhängigen, die der oberwähnte Leitstrahl ist. Die Bedingungen jedoch an den Grenzen knüpfen sich keineswegs so wie bei einem linearen Systeme an einen oder zwei verschiedene Werthe dieses Leitstrahles, sondern an einen oder zwei verschiedene Werthe einer anderen Coordinate z. B. der x, die im Leitstrahle enthalten ist, der die veränderte Behandlung des Bewegungsproblemes erheischt.

Wiewohl nun Beispiele, der Undulationstheorie entnommen, in ein Werk von rein mathematischem Character, wie das vorliegende, schon desshalb nicht gehören, weil sie, gründlich durchgeführt, von viel zu grossem Umfange sind, so thut man doch gut, sich hier irgend eine bestimmte Aufgabe zu denken, weil so am leichtesten die Natur solcher Probleme mit Klarheit erfasst werden kann. Des Integrirens selbst und überhaupt aller Rechnungsoperationen, die zum Reflexionsprobleme nicht unmittelbar gehörig sind, kann man sich hiebei enthalten, indem man sich dieselben ausgeführt denkt vermittelst der hier auseinandergesetzten Methoden.

Nehmen wir also an, wir wären durch die an die drei Differentialgleichungen (7) Seite 610 gestellte Anfrage nach sphärischen Wellen entweder zu der einen Partialgleichung (44) Seite 622, die die Gesetze longitudinaler, d. h. radialer Schwingungen enthält, gelangt, oder zu der anderen (50) Seite 623, die von Schwingungen spricht, welche in der Wellenfläche selber stattfinden, so folgt zunächst die Anfrage nach einem periodischen Zustande, die in der Einführung einer neuen abhängigen Veränderlichen R enthalten ist, vermittelst der Substitution:

$$\varphi = R \cos \theta t \quad \text{oder} \quad \varphi = R \sin \theta t \tag{192}$$

Die (44) verwandelt sich hiedurch in folgende gewöhnliche Differentialgleichung zwischen nur zwei Variablen.

$$r \frac{d^2R}{dr^2} + 2 \frac{dR}{dr} + \left(\frac{\theta^2}{3a^2} r + 2\right) R = 0 \tag{193}$$

Die (50) hingegen geht vermöge derselben Substitution über in:

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + \left(\frac{\theta^2}{a^2} r^2 - 2\right) R = 0 \tag{194}$$

Die Integration dieser Gleichungen nun sammt der daran hängenden Discussion des Integrales ist Sache der mathematischen Physik und gehört desshalb nicht hieher; allein, wie man auch immer integriren mag, man wird immer R erhalten als eine Function von r, die auch die willkürliche Constante θ in sich enthalten wird und zudem noch versehen sein muss mit zwei anderen Integrationsconstanten, die man auch als Functionen von θ auffassen kann, etwa in der Form:

$$R = C_1 R_1 + C_2 R_2 \tag{195}$$

woraus sich dann ein Werth der Bewegungsgrösse φ ergeben wird zunächst in der folgenden Gestalt:

$$\varphi = [A_1 \cos \theta t + A_2 \sin \theta t]\,[C_1 R_1 + C_2 R_2] \tag{196}$$

Hier bemerkt man wieder einen wesentlichen Unterschied zwischen den linearen materiellen Systemen und den mit mehreren Dimensionen. Während nämlich bei den ersteren der constante Factor der Zeit t, der in den vorhergehenden Paragraphen α hiess, zur Erfüllung der Bedingungen an den Grenzen seine Verwendung fand und einer gewissen Reihe von Wurzeln einer transcendenten Gleichung entnommen wurde, ist hier der ähnliche Coefficient θ von t zu einem solchen Zwecke gar nicht verwendbar und das zwar nicht nur wenn es nur eine einzige, das materielle System begrenzende Fläche gibt, sondern auch dann, wenn mehrere vorhanden sind. Da nun θ der Repräsentant der Schwingungsdauer ist, der der Werth $\frac{2\pi}{\theta}$ zukömmt, so liegt hierin der mathematische Ausdruck der Thatsache, dass ein im Raume ausgedehntes materielles System keineswegs auf eine bestimmte Anzahl einfacher Schwingungsweisen beschränkt sei, sondern dass ihm vielmehr die Fähigkeit zukomme, alle möglichen Sorten undulatorischer Bewegungen fortzupflanzen. Sollte diess vielleicht eine Ausnahme zu erleiden scheinen in Fällen, wie z. B. dem einer schwingenden Kugel, wo die Bewegungen vom Mittelpunkte ausgehen,

ferner dem einer schwingenden Platte von kreisrunder Gestalt oder auch von der Form eines Streifens, der zwischen zwei parallelen Linien eingeschlossen ist, und wo auch die Wellenlinie eine zu diesen beiden Grenzlinien parallele ist; so erkennt man doch sehr bald, die Rechnungen näher ins Auge fassend, dass man das materielle System von mehreren Dimensionen in lauter lineare zerlegt und von diesen nur diejenigen Schwingungsweisen der Betrachtung unterworfen hat, deren alle diese linearen Systeme gleichzeitig fähig sind. Man hat sich also auf eine sehr specielle Auflösung des Schwingungsproblemes beschränkt und hat eine Unzahl anderer, ebenfalls möglicher Schwingungsweisen ganz ausser Acht gelassen. Da man nun solchergestalt über die willkürliche Constante θ nach Belieben zu verfügen das Recht hat, so kann man für φ auch eine Summe substituiren von beliebig vielen, wie in der Formel (196) gestalteten Ausdrücken mit anderen und anderen Werthen der Constanten θ, A, C versehen. Man kann aber auch anstatt der A_1, A_2, C_1, C_2 willkürliche Functionen von θ gesetzt denken, sodann aber den Ausdruck (196) in φ mit $d\theta$ multipliziren und zwischen beliebigen Grenzen θ_1 und θ_2 integriren; so wird auch das auf diese Weise gewonnene bestimmte Integral einen Genüge leistenden Werth von φ darstellen, versehen mit willkürlichen Functionen r und t enthaltender Grundgrössen. In welcher Form man nun immer zu integriren sich bewogen gefunden hat, man wird jederzeit φ als einen r und t enthaltenden Ausdruck gewonnen haben, etwa:

$$\varphi = f(r, t) \tag{197}$$

und es ist in Bezug auf die eine Variable r wichtig zu bemerken, dass ihr ein Werth zukomme, der drei willkürliche Constanten α, β, γ in sich schliesst, wie die Formel (45) Seite 622 ausweist und die die orthogonalen Coordinaten des Punktes bedeuten, von welchem die Bewegung auszugehen scheint, und diese sind es, die sich zur Erfüllung der Bedingungen an den Grenzen tauglich erweisen. Man kann ihnen beliebige Werthe, so viel an der Zahl als man will, beilegen, und alle auf diese Weise gewonnenen Ausdrücke für φ auch addiren, so wird das so gewonnene Aggregat wieder einen giltigen Werth von φ darstellen. Man wird z. B. die folgenden drei Werthe von r erwählen können:

$$r = r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$r = r_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2 + z^2}$$
$$r = r_3 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2 + z^2}$$

und daraus folgenden Werth von φ zusammenstellen:

$$\varphi = f_1(r_1, t) + f_2(r_2, t) + f_3(r_3, t)$$

und es wird das so zusammengefügte Integral eine Bewegung andeuten, die von drei Punkten des Raumes, nämlich vom Anfangspunkte der Coordinaten und von zwei anderen in der Entfernung $-c$ und $+c$ von demselben auf der Axe der x sich befindenden auszugehen scheinen. Jeder Bestandtheil des φ wird für sich der Differentialgleichung Genüge leisten.

Denken wir uns nun das System als ein begrenztes und nehmen wir der Einfachheit wegen an, die Grenze sei eine einzige, eine Ebene nämlich parallel zur Coordinatenebene der yz in der

Entfernung h gelegt, der mithin die Gleichung $x = h$ angehört. Der Einfachheit wegen soll hier angenommen werden, dass diese Ebene ein schwingungsfähiges materielles System, zu welchem auch der Coordinatenanfangspunkt gehörig ist, von einem anderen völlig starren scheide, welches gar keine Bewegungen anzunehmen vermag. Diesem Falle entsprechen nämlich die allereinfachsten denkbaren Bedingungen an der Grenzebene, d. h. für $x = h$. Sie sind:

$$\varphi = 0 \text{ und } \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

Man kann nun immerhin annehmen, dass die Schwingungen ursprünglich vom Anfangspunkte der Coordinaten ausgegangen seien, so wird gleichwohl das dieser Annahme entsprechende:

$$\varphi = f(r, t)$$

unter r den folgenden Werth verstanden:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

zwar die Differentialgleichung erfüllen, jedoch den Bedingungen an der Grenze nicht genügen, mithin auch keine Auflösung des gestellten Schwingungsproblemes sein. Statuirt man jedoch:

$$\varphi = f(r_0, t) - f(r_1, t) \tag{198}$$

allwo:

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$r_1 = \sqrt{(x - 2h)^2 + y^2 + z^2}$$

so wird ein jeder Bestandtheil dieses für φ erwählten Binomes der Differentialgleichung Genüge leisten, die Summe aber wird für $x = h$ verschwinden, was auch y, z und t bedeuten mögen, mithin erfüllt dieses zweitheilige φ auch die Grenzbedingungen, und da sein erster Theil eine vom Anfangspunkte der Coordinaten ausgehende Bewegung andeutet, sein zweiter Theil hingegen eine andere, die vom Punkte $x = 2h$, der im starren System befindlich, auszugehen scheint, so sieht man, dass an der Grenzebene die Schwingungen so reflectirt werden, als ob sie von einem Punkte in gleicher Entfernung und auf der entgegengesetzten Seite derselben ausgingen. Zwei Systeme von Kugelwellen mit verschiedenen Mittelpunkten legen sich daher in den Raum und die Schwingungsintensität ist offenbar für das eine und das andere, so oft $r = r_0 = r_1$ besteht, dieselbe. Der zweite dieser beiden Erregungsmittelpunkte, welcher sich im starren Systeme befindet, und von dem gar keine Bewegungen wirklich ausgehen können, sondern solche nur auszugehen scheinen, stellt jetzt ein Spiegelbild des ersten von ihnen dar.

Anstatt der oben aufgezeichneten Werthe von r_0 und r_1 könnte man allgemeiner noch die folgenden anderen erkiesen:

$$r_0 = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}$$
$$r_1 = \sqrt{(x - 2h - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}$$

könnte zudem noch mit einer beliebigen Function G der Mittelpunktscoordinaten α, β, γ und mit $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ multipliziren, sodann aber zwischen beliebigen Grenzen α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2 integriren und es würde der auf diese Weise gewonnene Ausdruck für φ, nämlich:

$$\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} Gf(r_0, t)\, d\alpha d\beta d\gamma - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} Gf(r_1, t)\, d\alpha d\beta d\gamma \tag{199}$$

ebenfalls sowohl der Differentialgleichung, als auch den Grenzbedingungen genügen, zugleich aber nicht mehr eine Bewegung andeuten, die von einem einzigen Erregungsmittelpunkte ausgeht, und, an der Grenzebene reflectirt, noch von einem zweiten, der ein Spiegelbild des ersten ist, auszugehen scheint; sondern man hätte bereits nach dem Inhalte der vorliegenden Formel für φ eine ausgedehnte Erregungsstelle, deren Gestalt und Ausdehnung durch die Integrationsgrenzen α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2, die Intensität der ausgesendeten Bewegung hingegen durch den Factor G gegeben ist. Dieser entspricht dann, dargestellt durch das zweite Glied des φ, eine ähnliche virtuelle Erregungsstelle im starren Systeme, von der keine Bewegung wirklich ausgeht, sondern nur auszugehen scheint, und die Punkt für Punkt ein Spiegelbild der ersteren ist.

Gehen wir jetzt von dem allereinfachsten Falle der Begrenzung durch eine einzige Ebene zu dem nächst complizirteren über, indem wir das schwingungsfähige materielle System zwischen zwei parallelen Ebenen enthalten denken, deren einer die Gleichung: $x = h$ der anderen die ähnliche $x = -k$ angehört. Diesseits und jenseits der so vorausgesetzten Schichte schwingungsfähiger Materie von der Dicke $h + k$ sei alles starr und keiner Bewegung fähig, so dass für beide der ebengenannten Werthe von x die oben bezeichneten Bedingungen an den Grenzen erfüllt sein müssen.

Ein monomischer Werth von φ, wie der (197) kann hier noch weniger als Auflösung gelten des vorgelegten Bewegungsproblemes, denn wiewohl er die Differentialgleichung erfüllt, so leistet er doch weder den Bedingungen an der einen Grenze, d. h. für $x = h$, noch an der anderen d. h. für $x = -k$ Genüge; allein auch ein binomisches φ, wie das durch die Formel (198) gegebene reicht zu diesem Zwecke noch keineswegs hin, denn es wird zwar $\varphi(r_0, t)$ durch den zweiten Bestandtheil des φ, nämlich $-\varphi(r_1, t)$ allgemein für jedes t auf Null gebracht für $x = h$, allein an der anderen Grenze, nämlich für $x = -k$, bleiben beide und auch ihre Differenz von Null verschieden. Man könnte mithin versuchen, durch den Zusatz von noch mehr Gliedern das Verschwinden des φ an beiden Grenzebenen herbeizuführen. Um nun für $x = -k$ die beiden dem φ bereits in der Formel (198) zugezählten Glieder aufzuheben, setzen wir zwei neue hinzu, nämlich:

$$-f(r_{-1}, t) + f(r_{-2}, t) \tag{200}$$

allwo die Werthe von r_{-1} und r_{-2} die folgenden sind:

$$r_{-1} = \sqrt{(x + 2k)^2 + y^2 + z^2}$$
$$r_{-2} = \sqrt{(x + 2h + 2k)^2 + y^2 + z^2}$$

Das auf diese Weise gewonnene viergliedrige φ ist nun allerdings der Nulle gleich für $x = -k$, hat aber aufgehört dieser Bedingung zu entsprechen für $x = h$ und namentlich ist es der hinzugefügte zweigliedrige Zusatz (200), der für $x = h$ nicht verschwindet, und der durch hinzugefügte zwei fernere Glieder beseitigt werden muss. Sie sind:

$$f(r_2, t) - f(r_3, t) \tag{201}$$

allwo r_2 und r_3 gegeben sind durch die folgenden Formeln:

$$r_2 = \sqrt{(x - 2h - 2k)^2 + y^2 + z^2}$$
$$r_3 = \sqrt{(x - 4h - 2k)^2 + y^2 + z^2}$$

Nun ist zwar das Verschwinden des φ für $x = h$ gesichert, aber für $x = -k$ darum verloren gegangen, weil die letzthinzugefügten zwei Glieder für dieses $x = -k$ nicht Null geben wollen. Der Zusatz des folgenden neuen Binomes hebt sie auf:

$$-f(r_{-3}, t) + f(r_{-4}, t) \tag{202}$$

allwo dem r_{-3} und r_{-4} die folgende Bedeutung zukömmt:

$$r_{-3} = \sqrt{(x + 2h + 4k)^2 + y^2 + z^2}$$
$$r_{-4} = \sqrt{(x + 4h + 4k)^2 + y^2 + z^2}$$

Jetzt aber sind wieder die Bedingungen für $x = h$ verletzt und man ist genöthigt, abermals zwei neue Glieder hinzuzufügen. Da sich aber diese Nothwendigkeit offenbar perpetuirt, so sieht man ein, dass nur durch eine unendliche Reihe von Gliedern, anstatt φ gesetzt, im Falle der angenommenen doppelten Begrenzung die Differentialgleichung sowohl, wie auch die Grenzbedingungen erfüllt werden können. Nehmen nun diese allmählig hinzugesetzten Glieder für zwischen den Grenzen $x = h$ und $x = -k$ enthaltene Werthe der Coordinate x und beliebige y, z und t in einer Weise ab, dass die für φ gewonnene unendliche Reihe von Functionen convergirt, so hat man auch eine befriedigende Auflösung des ganzen Bewegungsproblemes errungen. Das solchergestalt erhaltene φ lässt sich in folgender Weise aufzeichnen:

$$\begin{aligned} \varphi = f(r_0, t) - f(r_{-1}, t) + f(r_{-2}, t) - f(r_{-3}, t) + \ldots\ldots \\ - f(r_1, t) + f(r_2, t) - f(r_3, t) + f(r_4, t) - \ldots\ldots \end{aligned} \tag{203}$$

und ist so geeignet, das Verschwinden für $x = h$ und beliebige y, z, t klar vor Augen zu legen, weil jedes Glied der oberen Zeile durch das unmittelbar unter ihm stehende der zweiten Zeile aufgehoben wird. Um die erfüllten Bedingungen an der anderen Grenze, nämlich für $x = -k$ eben so klar vorliegen zu haben, schreibt man dasselbe φ wieder, wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi = f(r_0, t) - f(r_1, t) + f(r_2, t) - f(r_3, t) + \ldots\ldots \\ - f(r_{-1}, t) + f(r_{-2}, t) - f(r_{-3}, t) + f(r_{-4}, t) - \ldots\ldots \end{aligned} \tag{204}$$

und überzeugt sich jetzt ohne Mühe, dass für $x = -k$ jedes Glied der ersten Zeile durch das unmittelbar unter ihm stehende der zweiten aufgehoben werde. In jedem Falle ist φ als Summe von

zwei Reihen dargestellt, in deren jeder die Zeichen wechseln, die mithin beide die Eigenschaft haben werden, zu convergiren, wenn ihre Glieder ins Unendliche abnehmen, d. h. wenn $f(r_0, t)$ die Eigenschaft besitzt, für unendliche x zu verschwinden, was auch y, z, t bedeuten mögen, oder mit anderen Worten, wenn die im unbegrenzten Raume fortgepflanzte Bewegung in unendlicher Entfernung von der Erregungsstelle verschwindet, was wirklich der Fall in der Natur ist.

Ein jedes der unendlich vielen Glieder, aus welchen φ zusammengesetzt ist, bedeutet nun für sich eine Bewegung, die von einer eigenen Stelle im Raume und namentlich einem Punkte auf der Axe der x auszugehen scheint und nur von einem einzigen, dem Anfangspunkte nämlich der Coordinaten, wirklich ausgeht. Mithin sind alle übrigen Erregungsmittelpunkte nur eben so viele Spiegelbilder dieses Anfangspunktes, insgesammt und in unendlicher Anzahl diesseits und jenseits im starren Systeme befindlich. Es kann durch eine dritte Art der Aufzeichnung des φ auch die Position dieser verschiedenen Spiegelbilder nebst dem Reihengliede, zu welchem sie gehören, und der Coordinate x des Erregungsmittelpunktes, die ihnen zukömmt, einigermassen wiedergegeben werden, so nämlich:

$$(205)\quad \begin{array}{llllllllll} \varphi = \ldots\ldots & -f(r_{-3}, t) & +f(r_{-2}, t) & -f(r_{-1}, t) & +f(r_0, t) & -f(r_1, t) & +f(r_2, t) & -f(r_3, t) & + \ldots\ldots \\ x = \ldots\ldots, & -2h-4k\;, & -2h-2k\;, & -2k\;, & 0\;, & 2h\;, & 2h+2k\;, & 4h+2k\;, & \ldots\ldots \end{array}$$

Die unten stehenden Werthe von x, beziehen sich als Coordinaten des Spiegelbildes auf die unmittelbar ober ihnen stehenden Bestandtheile des φ und es kann auch hier wieder dadurch, dass man anstatt dieser einzelnen Bestandtheile des φ dreifache bestimmte Integrale substituirt, von dem Falle, wo sich ein einziger Erregungsmittelpunkt durch eine Reihe von Reflexionen unzählige Male abbildet, der Schritt gemacht werden zu dem allgemeineren Fall, wo das sich Abbildende beliebige Ausdehnung im Raume hat.

Bestehen noch mehr als zwei das System begrenzender Flächen, etwa noch zwei andere Ebenen, parallel zur Coordinatenebene der x, y gelegt und zwar in den Abständen $z = p$ und $z = -q$ von derselben; so gesellen sich zu der Reihe, welche den Werth von φ angibt, noch andere Reihen in unendlicher Anzahl. Um einzusehen, wie diess geschieht, verändern wir dem Bedürfnisse gemäss unsere angenommene Bezeichnung und statuiren:

$$r_{0,0} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_{1,0} = \sqrt{(x - 2h)^2 + y^2 + z^2}\,, \qquad r_{-1,0} = \sqrt{(x + 2k)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_{2,0} = \sqrt{(x - 2h - 2k)^2 + y^2 + z^2}\,, \qquad r_{-2,0} = \sqrt{(x + 2h + 2k)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_{3,0} = \sqrt{(x - 4h - 2k)^2 + y^2 + z^2}\,, \qquad r_{-3,0} = \sqrt{(x + 2h + 4k)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Behalten wir zudem im Folgenden die Sitte bei, unter ein jedes der Glieder, aus welchen wir nun φ zusammensetzen werden, die zwei Coordinaten x und z des Punktes hinzuzeichnen, von welchem die Bewegung auszugehen scheint, die eben dieses Glied bedeutet, so wird der folgende dem (205) ähnliche Ausdruck:

$$\varphi = \ldots - f(r_{-3,0}, t) + f(r_{-2,0}, t) - f(r_{-1,0}, t) + f(r_{0,0}, t) - f(r_{1,0}, t) + f(r_{2,0}, t) - f(r_{3,0}, t) + \ldots \tag{206}$$
$$\ldots; -(2h+4k),0\;;\; -(2h+2k),0\;;\; -2k,\,0\;;\; 0,\,0\;;\; 2h,\,0\;;\; 2h+2k,0\;;\; 4h+2k,0\;;\;\ldots$$

zwar wie eben nachgewiesen, für $x = h$ und für $x = -k$ der Nulle gleich werden, was auch y, z, t bedeuten mögen, aber an den anderen Grenzen und namentlich für $z = p$ nicht verschwinden, mithin die alldort gestellten Bedingungen nicht erfüllen. Wir suchen ihn daher dazu zu zwingen, durch den Zusatz einer ähnlichen Reihe von unendlich vielen Gliedern, die die Bestandtheile von φ Glied für Glied aufheben. Diese hinzukommende Reihe ist:

$$\ldots + f(r_{-3,1}, t) - f(r_{-2,1}, t) + f(r_{-1,1}, t) - f(r_{0,1}, t) + f(r_{1,1}, t) - f(r_{2,1}, t) + f(r_{3,1}, t) - \ldots \tag{207}$$
$$-(2h+4k),2p\;;\; -(2h+2k),2p\;;\; -2k,\,2p\;;\; 0,\,2p\;;\; 2h,\,2p\;;\; 2h+2k,\,2p\;;\; 4h+2h,2p\;;\;\ldots$$

und die Bedeutungen der verschiedenen r genannten Variablen sind:

$$r_{0,1} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2p)^2}$$
$$r_{1,1} = \sqrt{(x - 2h)^2 + y^2 + (z - 2p)^2}\,,\quad r_{-1,1} = \sqrt{(x + 2k)^2 + y^2 + (z - 2p)^2}$$
$$r_{2,1} = \sqrt{(x - 2h - 2k)^2 + y^2 + (z - 2p)^2}\,,\quad r_{-2,1} = \sqrt{(x + 2h + 2k)^2 + y^2 + (z - 2p)^2}$$
$$r_{3,1} = \sqrt{(x - 4h - 2k)^2 + y^2 + (z - 2p)^2}\,,\quad r_{-3,1} = \sqrt{(x + 2h + 4k)^2 + y^2 + (z - 2p)^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man überzeugt sich nun sehr leicht, dass für $z = p$ die Summe dieser beiden Reihen Null sei, allein für $z = -q$ verschwindet weder die eine, noch die andere, noch auch die Summe von beiden. Man fügt daher, um sie auf Null zu reduziren, die folgenden zwei neuen Reihen hinzu, welche die bereits aufgezeichneten für $z = -q$ Glied um Glied aufheben.

$$\ldots + f(r_{-3,-1}, t) - f(r_{-2,-1}, t) + f(r_{-1,-1}, t) - f(r_{0,-1}, t) + f(r_{1,-1}, t) - f(r_{2,-1}, t) + f(r_{3,-1}, t) - \ldots$$
$$\ldots; -(2h+4k),-2q\;;\; -(2h+2k),-2q\;;\; -2k,-2q\;;\; 0,-2q\;;\; 2h,-2q\;;\; 2h+2k,-2q\;;\; 4h+2k,-2q\;;\;\ldots \tag{208}$$
$$\ldots f(r_{-3,-2}, t) + f(r_{-2,-2}, t) - f(r_{-1,-2}, t) + f(r_{0,-2}, t) - f(r_{1,-2}, t) + f(r_{2,-2}, t) - f(r_{3,-2}, t) + \ldots$$
$$\ldots; -(2h+4k),-(2p+2q)\;;\; -(2h+2k),-(2p+2q)\;;\; -2k,-(2p+2q)\;;\; 0,-(2p+2q)\;;\; 2h,-(2p+2q)\;;\; 2h+2k,-(2p+2q)\;;\; 4h+2k,-(2p+2q)\;;\;\ldots$$

Hier haben die mit r bezeichneten Variablen die folgenden Bedeutungen:

$$r_{0,-1} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2q)^2}$$
$$r_{1,-1} = \sqrt{(x - 2h)^2 + y^2 + (z + 2q)^2}\,,\quad r_{-1,-1} = \sqrt{(x + 2k)^2 + y^2 + (z + 2q)^2}$$
$$r_{2,-1} = \sqrt{(x - 2h - 2k)^2 + y^2 + (z + 2q)^2}\,,\quad r_{-2,-1} = \sqrt{(x + 2h + 2k)^2 + y^2 + (z + 2q)^2}$$
$$r_{3,-1} = \sqrt{(x - 4h - 2k)^2 + y^2 + (z + 2q)^2}\,,\quad r_{-3,-1} = \sqrt{(x + 2h + 4k)^2 + y^2 + (z + 2q)^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_0{}'_{-2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2p + 2q)^2}$$
$$r_{1,-2} = \sqrt{(x - 2h)^2 + y^2 + (z + 2p + 2q)^2}\,,\quad r_{-1,-2} = \sqrt{(x + 2k)^2 + y^2 + (z + 2p + 2q)^2}$$
$$r_{2,-1} = \sqrt{(x - 2h - 2k)^2 + y^2 + (z + 2p + 2q)^2}\,,\quad r_{-2,-2} = \sqrt{(x + 2h + 2k)^2 + y^2 + (z + 2p + 2q)^2}$$
$$r_{3,-1} = \sqrt{(x - 4h - 2k)^2 + y^2 + (z + 2p + 2q)^2}\,,\quad r_{-3,-2} = \sqrt{(x + 2h + 2k)^2 + y^2 + (z + 2p + 2q)^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nun sind die Bedingungen an der Grenze $z = -q$ in aller Strenge erfüllt, hingegen die an der anderen $z = p$ verletzt und namentlich sind es die zuletzt hinzugefügten zwei Reihen, die weder einzeln, noch aggregirt für $z = p$ verschwinden wollen. Man bringt sie durch hinzugefügte zwei neue Reihen, Glied um Glied auf Null, ist aber sodann abermals genöthigt, diesen Zusatz durch zwei neue Reihen zu completiren und so geht es fort ins Unendliche, und der allgemeine Werth, den man für φ auf solche Weise gewinnt, ist in folgender Formel enthalten:

$$
(209)\quad \varphi = \begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots + f(\underset{-(2h+2k),-2p-2q}{r_{-2,-2}}, t) - f(\underset{-2k,-2p-2q}{r_{-1,-2}}, t) + f(\underset{0,-2p-2q}{r_{0,-2}}, t) - f(\underset{2h,-2p-2q}{r_{1,-2}}, t) + f(\underset{2h+2k,-2p-2q}{r_{2,-2}}, t) - \cdots \\
\cdots - f(\underset{-(2h+2k),-2q}{r_{-2,-1}}, t) + f(\underset{-2k,-2q}{r_{-1,-1}}, t) - f(\underset{0,-2q}{r_{0,-1}}, t) + f(\underset{2h,-2q}{r_{1,-1}}, t) - f(\underset{2h+2k,-2q}{r_{2,-1}}, t) + \cdots \\
\cdots + f(\underset{-(2h+2k),0}{r_{-2,0}}, t) - f(\underset{-2k,0}{r_{-1,0}}, t) + f(\underset{0,0}{r_{0,0}}, t) - f(\underset{2h,0}{r_{1,0}}, t) + f(\underset{2h+2k,0}{r_{2,0}}, t) - \cdots \\
\cdots - f(\underset{-(2h+2k),2p}{r_{-2,1}}, t) + f(\underset{-2k,2p}{r_{-1,1}}, t) - f(\underset{0,2p}{r_{0,1}}, t) + f(\underset{2h,2p}{r_{1,1}}, t) - f(\underset{2h+2k,2p}{r_{2,1}}, t) + \cdots \\
\cdots + f(\underset{-(2h+2k),2p+2q}{r_{-2,2}}, t) - f(\underset{-2k,2p+2q}{r_{-1,2}}, t) + f(\underset{0,2p+2q}{r_{0,2}}, t) - f(\underset{2h,2p+2q}{r_{1,2}}, t) + f(\underset{2h+2k,2p+2q}{r_{2,2}}, t) - \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Sie gibt durch die Anordnung ihrer Glieder zugleich die Stellung der unzähligen Spiegelbilder an, mit den unten angefügten Coordinaten x, z eben derselben und es befinden sich alle diese Bilder in der Ebene der xz selbst, und weist nach, dass bei einer doppelten Begrenzung von zwei Paaren paralleler Ebenen der gesuchte Werth der Bewegungsgrösse φ nur aus einer ganzen Schichte von unendlichen Reihen zusammengesetzt werden könne.

Tritt jetzt noch die Begrenzung durch ein drittes System von parallelen Ebenen hinzu, von solchen z. B. die zur Coordinatenebene der xz parallel sind, so dass das schwingungsfähige materielle System in den Raum eines rechtwinkligen Parallelepipedes eingeschlossen erscheint; so lässt sich auf dieselbe Art nachweisen, dass, um die Bedingungen an allen sechs Grenzebenen zu erfüllen, das φ aus einer unendlichen Anzahl solcher Reihenschichten, wie die in der Formel (209) enthaltene, zusammengesetzt werden müssen. Da die Art ihrer Aufstellung aus dem Vorhergehenden zur Genüge erhellt, so lässt sich hier füglich davon absehen.

Der Klarheit wegen ist hier zwar nur der allereinfachste Fall einer Bedingungsgleichung $\varphi = 0$ zum Gegenstande der Betrachtung gemacht worden, allein der analytische Gang bleibt derselbe, auch wenn complizirtere Bedingungsgleichungen an den Grenzen, etwa $\psi = 0$ gegeben werden, allwo ψ aus den Differentialquotienten des φ linear zusammengesetzt ist, nur wird man hier zwei Functionen haben, die in Form von unendlichen Reihen erscheinen, φ nämlich und ψ. Diese Reihen werden zusammengesetzt sein aus ebenso vielen Gliedern und werden sich Glied für Glied entsprechen. Die Reihe für ψ verschwindet an den Grenzen, die für φ wird im Allgemeinen von Null verschieden bleiben.

Sind die Grenzflächen keine ebenen, sondern gekrümmte, so hat man es wenigstens in der Theorie des Lichtes immer vorgezogen, von der Brechung und Reflexion nicht der Lichtwellen, sondern der Lichtstrahlen zu sprechen und es scheint, dass auch künftighin die Einführung der im Sinne der Undulationslehre gehörig definirten Lichtstrahlen, oder allgemeiner, Leitstrahlen der Bewegung beibehalten werden wird, weil sie eine Betrachtungsweise ist, die mehr in das Detail der Erscheinungen eingeht.

Wie man sich dann zu benehmen hat, wenn an einer zwei verschiedene materielle Systeme trennenden Ebene gar keine Bedingungen gegeben sind und wenn man nur die allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung für den Fall eines Mittels kennt, das seine Beschaffenheit von Punkt zu Punkt im Raume nach einem unbestimmt gelassenen Gesetze ändert und überdiess weiss, in was diese Differentialgleichungen übergehen, im ersten materiellen Systeme sowohl, wie auch im zweiten, gedenke ich in einer besonderen Abhandlung zu zeigen.

Geht man die in den letzten Paragraphen enthaltenen Betrachtungen aufmerksam durch, so gewahrt man sehr bald den wesentlichen Unterschied, welcher zwischen der Behandlungsweise solcher materieller Systeme, die mehrere Dimensionen im Raume besitzen, und jener der linearen Systeme besteht, gleichviel ob letztere ursprünglich gegeben, oder nur durch Zerlegung der ersteren erhalten sind. Dieser Unterschied mag hier kurz noch hervorgehoben werden, er ist ein mehrfacher und zwar:

E r s t e n s: Bei Systemen von zwei oder drei Dimensionen im Raume, hat man sich, wenn man überhaupt das Schwingungsproblem gründlich erledigen will, vor allem anderen zu bekümmern um die Wellenfläche oder Wellenlinie und zwar im unbegrenzten Systeme. Ist dieses homogen und von einerlei Beschaffenheit nach allen Richtungen, so erfordert das Auffinden dieser Wellenlinie oder Wellenfläche keine Rechnung. Sie ist aus populären Gründen die Kugel oder der Kreis. Hat hingegen das System verschiedene Elasticität nach verschiedenen Seiten, dann kann es nothwendig werden, die Differentialgleichungen, wie C a u c h y gethan, einer vorläufigen Integration durch gerade oder ebene Wellen zu unterwerfen, und dann die eigentliche Wellenlinie oder Wellenfläche, die von einem Punkte der Erregung ausgeht, als Einhüllende dieser Geraden oder Ebenen auf geometrischem Wege aufzusuchen. Mit der auf solche Art aufgefundenen oder auch a priori als Kreis oder Kugel erkannten Wellenfläche hätte man dann zu den Differentialgleichungen zurückzukehren, um ihnen den mechanischen Vorgang in dieser krummen Wellenlinie oder Wellenfläche abzufragen. Hiedurch reduziren sich denn die Differentialgleichungen der Bewegung in der Regel auf eine einzige. Alles dieses fällt als unnöthig weg bei einem linearen Systeme, wo es keine Wellenlinie oder Fläche gibt, und wo man ohnehin meistentheils nur eine Differentialgleichung vorliegen haben wird.

Z w e i t e n s: Die eine Differentialgleichung muss integrirt und das Integral noch zudem gezwungen werden, die Bedingungen an den Grenzen zu erfüllen. Liegt nun z. B. das Integral (196) vor und ist die Rede von einem linearen Systeme, so werden dazu die Constanten C_1, C_2 und θ verwendet, für die sich unendlich viele aus einer transcendenten Gleichung zu ziehende Werthe ergeben. Bei einem ausgedehnten materiellen Systeme hingegen bleiben θ, C_1, C_2 unbestimmt und die Bedin-

gungen an den Grenzen werden durch schickliche Wahl anderer Constanten, hier α, β, γ, erfüllt, die in der Gleichung der Wellenlinie oder Wellenfläche als constante Parameter vorkommen.

Drittens: Endlich muss auch der Art und Weise Rechnung getragen werden, wie die Bewegung erregt worden ist, um in einem linearen Systeme diese initiale Erregung darzustellen. Hiezu dienen die schicklich gewählten Constanten A_1 und A_2. In Systemen von mehreren Dimensionen bleiben auch diese Constanten der Verfügung des Rechners überlassen und es sind abermals die oberwähnten Parameter α, β, γ, von denen man zu diesem Zwecke auf andere Weise Gebrauch zu machen hat.

Da hier eine allgemeine Exposition der Methode und keineswegs irgend eine specielle Theorie verfolgt wird, so möge hiemit die allgemeine analytische Reflexionstheorie geschlossen werden. Es wird aber hiemit keineswegs verkannt, dass es noch andere Behandlungsarten derartiger Probleme geben wird, die je ihren besonderen Werth haben. Der Nutzen, den sie auf dem Gebiete der Wissenschaftsforschung bieten, kann in der Folge einzig und allein diesen Werth bestimmen und wird hoffentlich auch die übrigen in diesem Werke niedergelegten Lehren zu der ihnen gebührenden Geltung bringen.

Ende.

Inhalt des zweiten Bandes.

Seite

V. Abschnitt.

Integrationsmethoden.

VI. Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen.

Verbesserungen.

S.	Z.	statt	lies
16 Formel (20)			
	7 v. ob.	$-\ 2z'''_2\ X^2$	$-\ 2z'''_2\ X_2^2$
73	9 v. ob.	was abermals seinen Grund in der	was abermals in der
81	1 v. ob.	$B = -\dfrac{a_1\beta + b_1}{\alpha - \beta}$	$B = +\dfrac{a_1\beta + b_1}{\alpha - \beta}$
144	7 v. u.	$\frac{1}{5!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{2}\binom{n-8}{2}\varphi^{n-10}\varphi'$	$\frac{1}{5!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{2}\binom{n-8}{2}\varphi^{n-10}\varphi'^5$
»	6 v. u.	$\frac{1}{3!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{4}\varphi^{n-10}\varphi'^4\varphi^{IV}$	$\frac{1}{3!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{4}\varphi^{n-10}\varphi'^3\varphi'''$
327	2 v. ob.	$\binom{h-n}{2}\ X''_{n-1}$	$\binom{h-n+1}{2}\ X''_{n-1}$
»	3 » »	$(h-n)\ X'_{n-2}$	$(h-n+1)\ X'_{n-2}$
»	13 » »	$\binom{h-n+1}{2}\ X''_{n-1}$	$\binom{h-n+2}{2}\ X''_{n-1}$
»	14 » »	$(h-n+1)\ X'_{n-2}$	$(h-n+2)\ X'_{n-2}$
328	5 » »	$\binom{h-n+p}{2}\ X''_{n-1}$	$\binom{h-n+p+1}{2}\ X''_{n-1}$
»	6 » »	$(h-n+p)\ X'_{n-2}$	$(h-n+p+1)\ X'_{n-2}$
445	8 » »	sieht aus,	substituirend, sieht aus,
614	1 » »	Bewegung	Begrenzung.
660	9 v. u.	$\dfrac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}$	$\dfrac{d^{2n-2}y}{dx^{2n-2}}$

Druck und Papier von Leopold Sommer in Wien.



